Principi di Ingegneria Elettrica
Ingegneria Industriale

– MUTUE INDUTTANZE –
– CIRCUITI MAGNETICI –

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

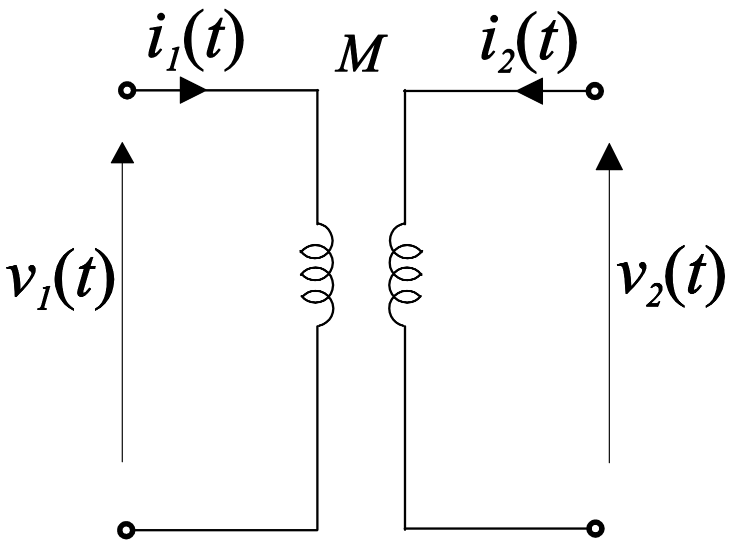
a.a. 2018-19

Mutua induttanza

- È un componente dinamico a due porte conservativo (del II ordine)

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

- $L_1 > 0$: induttanza primaria [H]
- $L_2 > 0$: induttanza secondaria [H]
- M: mutua induttanza [H]



Mutua induttanza (2)

- Rappresentazione differenziale

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$i_1(0^-) = I_1, \qquad i_2(0^-) = I_2$$

- Rappresentazione integrale

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_{0^-}^{t} v_1(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \int_{0^-}^{t} v_2(\tau)\mathrm{d}\tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Mutua induttanza (3)

- Con Laplace

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 & sM \\ sM & sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 I_1 + M I_2 \\ M I_1 + L_2 I_2 \end{bmatrix}$$

Con Steinmetz

$$\begin{bmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

Mutua induttanza (4)

- L'energia immagazzinata è

$$E(t) = \frac{L_1 i_1^2(t) + L_2 i_2^2(t) + 2M i_1(t) i_2(t)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i_1(t) & i_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

- È una forma quadratica che deve essere semi-definita positiva, ovvero maggiore o uguale a zero per qualsiasi valore delle correnti. Quindi si ha:

$$L_1 \, L_2 \geq M^2$$

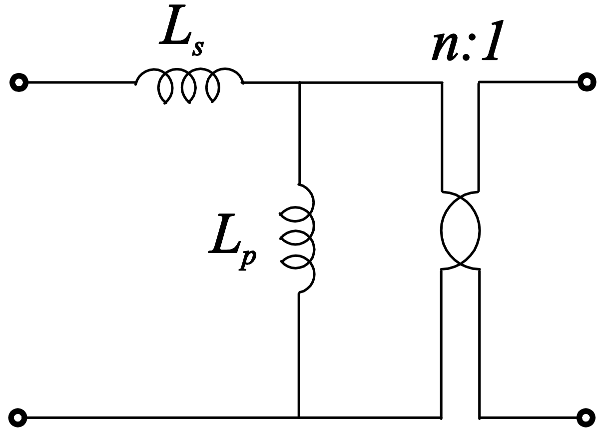
- Inoltre la matrice deve essere simmetrica altrimenti il differenziale della potenza $p(\tau)d\tau$ non sarebbe esatto.

Mutua induttanza (5)

- Si definisce come coefficiente di accoppiamento k

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \qquad -1 \le k \le 1$$

- Un modello equivalente è



$$n = \frac{M}{L_2}, \qquad L_p = \frac{M^2}{L_2} = k^2 L_1,$$

$$L_s = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} = (1 - k^2) L_1$$

- Ogni matrice **Z** può essere realizzata con un tripolo a T

Mutua induttanza (6)

- Nel caso in cui $k = 1$, si ha che:

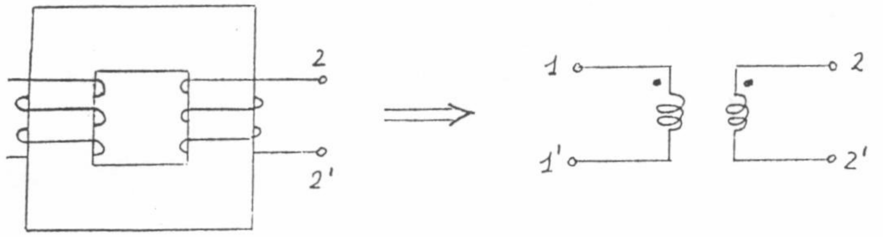
$$n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \qquad L_p = L_1, \qquad L_s = 0$$

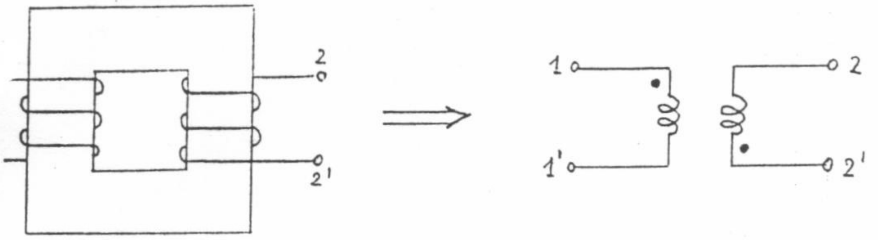
- Le equazioni diventano

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega\sqrt{L_1 L_2} \\ j\omega\sqrt{L_1 L_2} & j\omega L_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

- In questo caso det $\mathbf{M} = 0$, ovvero la matrice non è invertibile, ovvero il componente è non-controllato in tensione

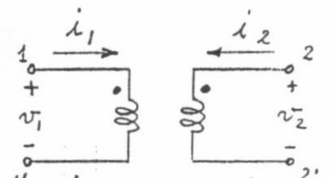
Mutua induttanza (7)



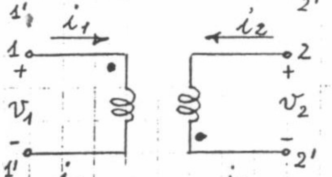


<u>Convenzione:</u> una tensione positiva applicata ad uno dei due bipoli al terminale contrassegnato dal punto genera nell'altro bipolo una tensione con il segno positivo sul terminale contrassegnato dal punto.

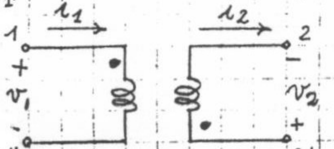
Es:



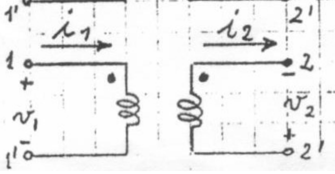
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = -M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = -M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Legge di Ampere

- La legge circuitale di Ampere ci permette di calcolare i campi magnetici note le correnti elettriche. E' particolarmente utile per sistemi simmetrici:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = I$$

- Dove I è una corrente continua e il vettore **H** è misurato in [A/m]. Definiamo come positiva la corrente che fluisce nella direzione di avanzamento di una vite destrorsa fatta ruotare nel senso del percorso della linea chiusa.
- Qualsiasi percorso viene scelto per l'integrazione di **H**, il risultato è sempre pari alla corrente I che passa all'interno della curva chiusa, qualunque forma essa abbia.

Legge di Ampere - esempi

- Consideriamo un percorso circolare posto in un piano perpendicolare al filo e con raggio ρ. Per simmetria, deduciamo che debba esistere solo la componente H_φ del campo, con modulo costante se ρ è costante. Si ha quindi:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = \int_0^{2\pi} H_\varphi \rho \, \mathrm{d}\varphi = H_\varphi \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = I$$

$$\Rightarrow H_\varphi = \frac{I}{2\pi\rho}$$

- Consideriamo ora una bobina, o solenoide, di raggio *R,* con *N* spire avvolte in aria su una lunghezza *d*, percorse da una corrente *I*. Il campo, ben dentro al solenoide, è disposto lungo l'asse del solenoide, con il verso determinato dalla regola della mano destra (vite destrorsa, etc) secondo il verso di percorrenza delle spire da parte della corrente. Supponendo nullo il campo esterno al solenoide stesso, si ha:

$$Hd = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{d}$$

Flusso magnetico

- Introduciamo ora il vettore **B**, chiamato densità di flusso magnetico, nello spazio vuoto, come:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ H/m$$

- dove B è misurato in weber per metro quadro [Wb/m^2] o in tesla [T]. La costante μ è chiamata permeabilità magnetica.
- Il flusso Φ_B del vettore **B** attraverso una superficie S è dato da:

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$$

- Si misura in weber [Wb].

Legge di Faraday

- La legge di Faraday ci permette di calcolare la tensione che si genera in un percorso chiuso dovuta a un campo magnetico pulsante concatenato. Si esprime come:

$$fem = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

- Il percorso chiuso può non essere completamente formato da un conduttore continuo: può essere completato anche da un condensatore, o da una linea puramente immaginaria.

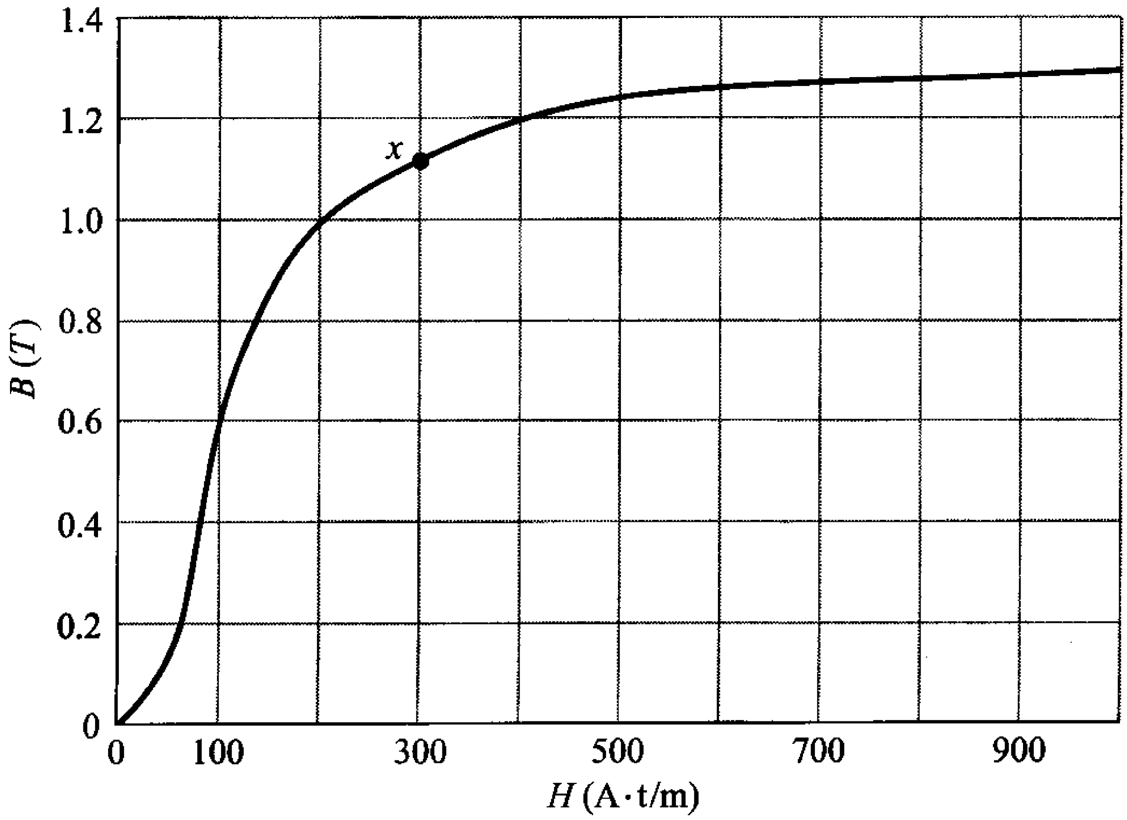
Legge di Faraday (2)

- Una fem può risultare da una qualsiasi delle seguenti situazioni:
  1) un campo magnetico variabile concatenato con una spira fissa;
  2) un campo magnetico costante in moto relativo con una spira fissa;
  3) un campo magnetico costante e una spira variabile
  4) una combinazione delle due situazioni precedenti.
- Il segno negativo sta ad indicare che la fem produce una corrente il cui flusso, sommato all'originale, tende a ridurne l'ampiezza opponendosi al flusso originale. Questa è la legge di Lenz. Se il percorso chiuso è formato da *N* spire, si può scrivere:

$$fem = \oint_L \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = -N \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

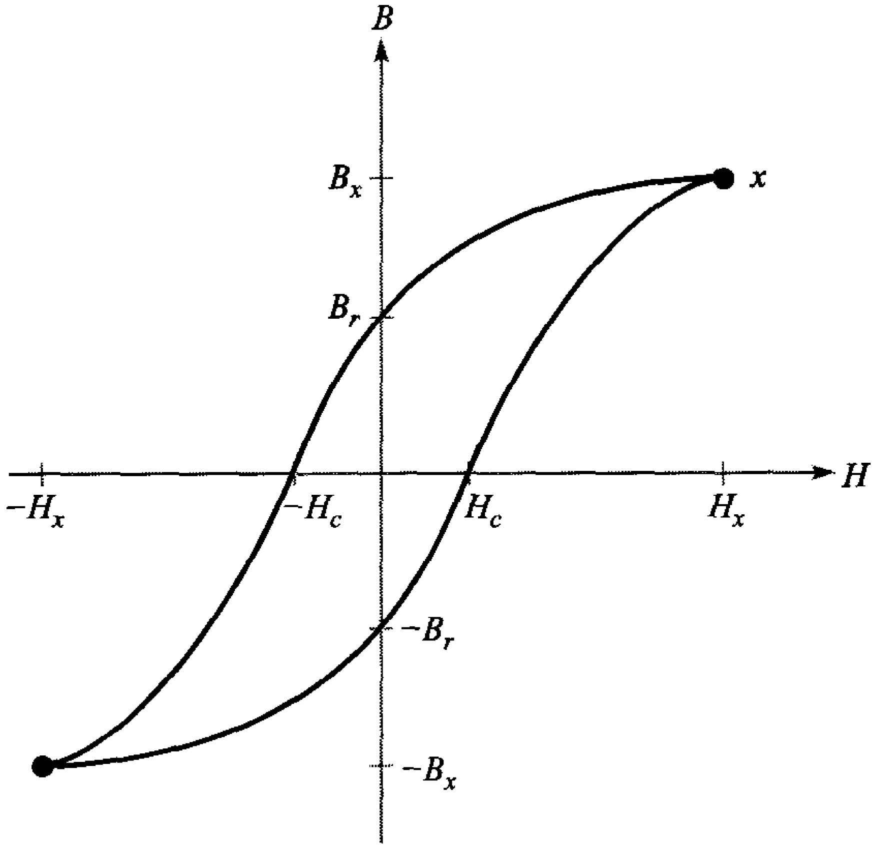
Isteresi magnetica

- Consideriamo il legame tra *H* e *B* in un materiale ferromagnetico. In figura è rappresentata la curva di prima magnetizzazione di un materiale ferromagnetico.



Isteresi magnetica (2)

- Raggiunto un valore massimo di H_x = 300 A·spire/m, riduciamo ora il valore di *H*. La curva di ritorno non coincide con la curva di andata. Notiamo che la curva di prima magnetizzazione è compresa tra le due curve successive di magnetizzazione, curve che sono tanto più strette, quanto più basso è il valore massimo di *H* raggiunto.
- L'energia dissipata durante un ciclo è pari all'area racchiusa dalle curve di isteresi.



Circuiti magnetici

- Il nome deriva dalla analogia con i circuiti elettrici. Data la natura nonlineare delle porzioni ferromagnetiche del circuito, i metodi di analisi che devono essere adottati sono simili a quelli che si usano nei circuiti contenenti componenti nonlineari come i diodi, ad esempio.
- Dobbiamo introdurre una “corrente magnetica” e una “tensione magnetica”.
- Analogamente a quanto fatto per il campo elettrico, definiamo un potenziale magnetico scalare, o meglio una tensione magnetica tra A e B, come:

$$V_{mAB} = \int_A^B \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L}$$

- dove l'integrale dipende dal percorso.

Circuiti magnetici (2)

- A differenza del potenziale elettrico, il potenziale magnetico non è conservativo, poiché l'integrale su una linea chiusa non è nullo:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = I_{tot} = NI$$

- Si può pensare che questo percorso chiuso, lungo cui calcoliamo la circuitazione di **H**, sia l'equivalente magnetico di un circuito elettrico, un "tubo di flusso" chiuso su se stesso in cui sia confinato un flusso magnetico Φ_B, ovvero la "corrente magnetica".
- La sorgente del flusso, detta forza magnetomotrice (fmm), è la corrente I_{tot} che passa all'interno del circuito magnetico; non è un componente identificabile con due morsetti, come nel caso dei circuiti elettrici.

Riluttanza e permeanza

- Consideriamo un tubo di flusso cilindrico lungo *d,* con sezione variabile $S(L)$ e composto da un materiale con permeabilità μ.
- Definiamo come riluttanza $\mathcal{R}_{AB}$ [A·spire/Wb] = [H^{-1}] il rapporto tra la tensione magnetica e il flusso:

$$\Re_{AB} = \frac{\int_A^B \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L}}{\int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}} = \frac{\int_A^B H \,\mathrm{d}L}{\Phi} = \frac{\int_A^B \frac{\Phi}{\mu S(L)} \mathrm{d}L}{\Phi} = \int_A^B \frac{\mathrm{d}L}{\mu S(L)}$$

- Se la sezione S è costante:

$$\Re_{AB} = \int_A^B \frac{\mathrm{d}L}{\mu S} = \frac{1}{\mu S} \int_A^B \mathrm{d}L = \frac{d}{\mu S}$$

- Il reciproco della riluttanza è detto permeanza [H]:

$$\mathscr{P}_{AB} = \frac{1}{\Re_{AB}} = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}{\int_A^B \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L}}$$

Ipotesi sul campo

- Le ipotesi alla base della formula precedente sono:
  - La linea su cui è definito il campo magnetico è contenuta all'interno del tubo di flusso
  - Il tubo di flusso ha una sezione piccola tale da poter considerare uniforme l'ampiezza di B su una qualsiasi superficie trasversale
  - I vettori B e H sono paralleli alle superfici laterali del tubo di flusso, in modo da poter sostituire il loro prodotto scalare con il prodotto dei moduli.

Legge di Hopkinson

- In analogia con la legge di Ohm: $V = R\, I$, consideriamo un tubo di flusso cilindrico lungo *d,* con sezione S costante e composto da un materiale isotropico e lineare con permeabilità μ.
- La legge di Hopkinson si esprime come:

$$V_{mAB} = \Re \Phi_B$$
$$\Phi_B = \mathscr{P} V_{mAB}$$

- dove:

$$\Re = \frac{d}{\mu S}, \quad \mathscr{P} = \frac{\mu S}{d}$$

- Il materiale più comune dove si applica questa formula è l'aria.

Materiali ferromagnetici

- Se il materiale è ferromagnetico, quindi non è lineare, si ha:

$$B = \mu(H)H$$

- La permeabilità magnetica varia con il valore di H.

- Ricordando la curva di isteresi, in zona lineare si ha comunque:

$$\frac{\mu_{FE}}{\mu_{amag}} = \mu_{FE} = 10^{3\sim5}$$

Flusso in un toroide in aria

- Troviamo il flusso in un toroide, con il nucleo di aria, di 500 spire percorse da 4 A, una sezione di 6 cm^2 e un raggio medio di 15 cm. Il confinamento del campo nel toroide si ottiene distribuendo le spire uniformemente lungo la circonferenza del toroide stesso. L'equivalente elettrico di questo circuito è una sorgente di tensione chiusa su di una resistenza lineare.

$$V_{m,s} = 500 \times 4 = 2000 \ \text{A} \cdot \text{spire}$$

$$\Re = \frac{d}{\mu_0 S} = \frac{2\pi(0.15)}{4\pi 10^{-7} \times 6 10^{-4}} =$$

$$= 1.25 10^{9} \ \text{A} \cdot \text{spire/Wb}$$

$$\Phi_B = \frac{V_{m,s}}{\Re} = \frac{2000}{1.25 10^{9}} = 1.6 10^{-6} \ \text{Wb}$$

$$B = \frac{\Phi}{S} = 2.67 10^{-3} \ \text{T}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} = 2120 \ \text{A} \cdot \text{spire/m}$$

$$H_\varphi 2\pi R = NI \Rightarrow H_\varphi = \frac{NI}{2\pi R}$$

Flusso in un toroide in acciaio con traferro

- Nel secondo esempio, usiamo un toroide con il nucleo di acciaio, eccetto per un traferro di 2 mm in aria. Le misure del toroide e il numero di spire sono le stesse di prima.

- Vogliamo sapere che corrente è necessaria per instaurare una densità di flusso di 1 T ovunque nel toroide. Il circuito magnetico attuale è equivalente a un circuito elettrico con una sorgente e due resistenze in serie, una delle quali nonlineare.

- Dal momento che è fissata la "corrente magnetica”, è facile trovare la "tensione magnetica" su ogni resistenza e quindi la forza “magneto-motrice“ complessiva.

Flusso in un toroide in acciaio con traferro (2)

- Nel traferro si ha:

$$\Re_{\text{aria}} = \frac{d_{\text{aria}}}{\mu_0 S} = \frac{2\,10^{-3}}{4\pi\,10^{-7} \times 6\,10^{-4}} =$$
$$= 2.65\,10^{6}\ \text{A} \cdot \text{spire/Wb}$$

- Il flusso totale nel toroide è:

$$\Phi_B = BS = 1 \times 6\,10^{-4} = 6\,10^{-4}\ \text{Wb}$$

- La tensione magnetica nel traferro è:

$$V_{m,\text{aria}} = \Phi_B\,\Re_{\text{aria}} = 6\,10^{-4} \times 2.65\,10^{6} =$$
$$= 1590\ \text{A} \cdot \text{spire/m}$$

Flusso in un toroide in acciaio con traferro (3)

- Guardando ora la figura sull'isteresi, vediamo che è necessario un campo magnetico *H* pari a 200 A·spire/m per produrre una densità di flusso di 1 T. Perciò si ha:

$$H_{\text{acciaio}} = 200 \ \text{A} \cdot \text{spire/m}$$

$$V_{m,\text{acciaio}} = H_{\text{acciaio}} d_{\text{acciaio}} = 200 \times 2\pi \times 0.15 = $$
$$= 188 \ \text{A} \cdot \text{spire}$$

- La somma delle due tensioni magnetiche corrisponde alla tensione magnetica complessiva del circuito e alla fmm che deve essere applicata

$$V_{m,\text{tot}} \text{ (fmm)} = V_{m,\text{acciaio}} + V_{m,\text{aria}} = 1778 \ \text{A} \cdot \text{spire}$$

- La corrente è quindi

$$I = \frac{V_{m,\text{tot}}}{N} = 3.556 \, \text{A}$$

Flusso in un toroide in acciaio con traferro (4)

- Confrontiamo ora il vettore *H* nell'acciaio e quello nell'aria. Calcoliamo infine la riluttanza "linearizzata" nell'acciaio.

$$H_{\text{aria}} = \frac{V_{m,\text{aria}}}{d_{\text{aria}}} = \frac{1590}{2\,10^{-3}} = 795\,10^{3}\ \text{A} \cdot \text{spire}$$

$$H_{\text{acciaio}} = 200\ \text{A} \cdot \text{spire}$$

$$\Re_{\text{aria}} = 2.65\,10^{6}\ \text{A} \cdot \text{spire/Wb}$$

$$\Re_{\text{acciaio}} = \frac{188}{6\,10^{-4}} = 0.3\,10^{6}\ \text{A} \cdot \text{spire/Wb}$$

- Si vede come la "resistenza" al flusso dell'acciaio sia molto inferiore a quella nell'aria.

Flusso in un toroide in acciaio con traferro (5)

- Da notare la differenza di tensione magnetica tra l'anello in acciaio e il traferro. Un materiale ferroso presenta una "resistenza magnetica" molto più bassa dell'aria, per cui il flusso magnetico rimane confinato, per la maggior parte, nell'anello stesso. Per fare un'analogia con i circuiti elettrici, se mettiamo in parallelo due resistenze in valore molto diverse tra loro, la corrente scorrerà quasi interamente nella resistenza di valore più basso.

$$\left(\frac{\sigma_{cond}}{\sigma_{dielet}} = 10^{20} \qquad \frac{\mu_{FE}}{\mu_{amag}} = 10^{3\sim5} \right)$$

- E' infine importante notare che, pur non scendendo in particolari, ci sono parecchie approssimazioni nei calcoli fatti, che comunque non invalidano i risultati ottenuti.

Corrispondenza tra circuiti elettrici e magnetici

- Come abbiamo visto, l'introduzione del flusso magnetico, della tensione magnetica e della riluttanza ha permesso di eliminare le grandezze di campo **H** e **B** nelle equazioni di un circuito magnetico.
- Si può quindi stabilire una analogia tra le grandezze di un circuito elettrico e di uno magnetico.

Circuiti elettrici	Circuiti magnetici
f.e.m. E, V	f.m.m. Ni, A
Tensione V, V	Tensione mag. V_m, A
Corrente I, A	Flusso Φ, Wb
Resistenza R, Ω	Riluttanza $\mathcal{R}$, H^{-1}
Conduttanza G, S	Permeanza $\mathcal{P}$, H
Campo elettrico E, V/m	Campo mag. H, A/m
Densità di corr. J, A/m^2	Ind. mag. B, T, Wb/m^2
Conducibilità elet. σ,$(\Omega m)^{-1}$	Permeabilità mag. μ, H/m

Circuiti magnetici ad elevata permeabilità

- Le analogie tra circuiti elettrici e magnetici possono essere sfruttate nel caso di campo magnetico stazionario e quando il circuito è costituito da materiali a permeabilità molto elevata rispetto ai materiali circostanti, tipicamente l'aria.

- In ogni caso, ci sono dei flussi dispersi in aria. Un flusso disperso può essere considerato equivalente a un tubo di flusso parallelo al tubo principale in ferro. Come abbiamo visto, $\mathcal{R}_{aria} >> \mathcal{R}_{ferro}$, per cui il flusso in aria sarà molto minore del flusso principale nel ferro.

Legge di Kirchhoff per i flussi magnetici

- La somma algebrica dei flussi nei rami che attraversano una superficie chiusa è nulla in ogni istante.
- Ovvero, La somma algebrica dei flussi nei rami afferenti un nodo è nulla in ogni istante.
- Questa legge è basata sul fatto che **B** è solenoidale:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sum_{k} \oint_{S_k} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sum_{K} \Phi_k = 0$$

- Nei circuiti elettrici: $\sum_{k} i_k = 0$

Legge di Kirchhoff per Le tensioni magnetiche

- La somma algebrica delle tensioni magnetiche nei rami di una maglia è uguale alla forza magnetomotrice concatenata con la maglia stessa in ogni istante.
- Questa legge si ottiene applicando la legge di Ampere:

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = \sum_k \int_{r_k} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = \sum_k V_{mk} =$$

$$= \sum_k \Re_k \Phi_k = \sum_m N_m i_m$$

- Nei circuiti elettrici: $\sum_k R_k i_k = \sum_m e_m$

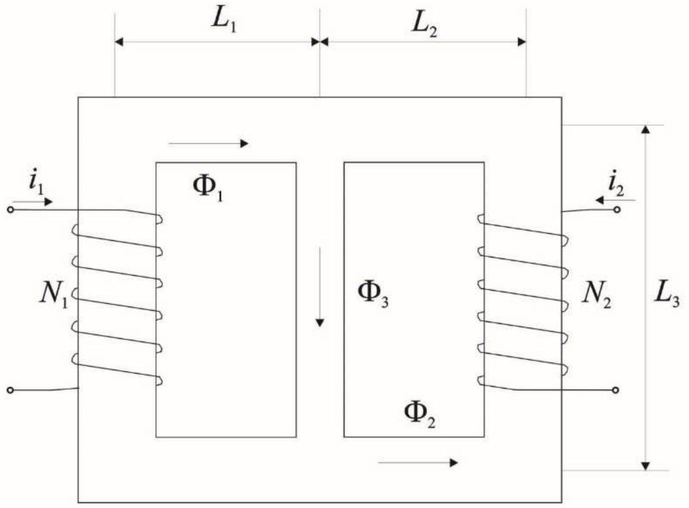
Versi di riferimento delle f.m.m.

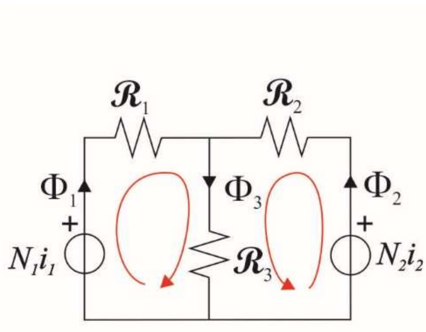
- I versi di riferimento delle f.m.m. relative agli avvolgimenti sono orientati in relazione ai versi delle correnti secondo la regola della mano destra.

- A secondo membro di una equazione magnetica di maglia, il segno di una f.m.m è positivo se il suo verso di riferimento è concorde con il verso della maglia, negativo se discorde.

Esempio di circuito magnetico

- Consideriamo il circuito di figura con l'equivalente elettrico. La permeabilità è μ e l'area dei tubi di flusso è S.





- Le equazioni di Kirchhoff applicate a questo circuito sono:

$$\Re_1 = \frac{2L_1 + L_3}{\mu S}, \Re_2 = \frac{2L_2 + L_3}{\mu S}, \quad \Re_3 = \frac{L_3}{\mu S}$$

$$\begin{cases} -\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ \Re_1 \Phi_1 + \Re_3 \Phi_3 = N_1 i_1 \\ \Re_2 \Phi_2 + \Re_3 \Phi_3 = N_2 i_2 \end{cases}$$