

TEORIA dei CIRCUITI
Ingegneria dell'Informazione

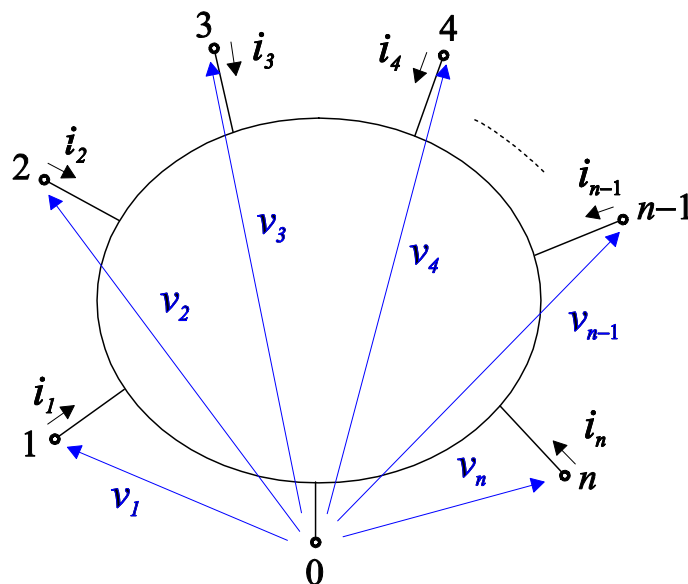
– DOPPI BIPOLI –

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Corso di Teoria dei Circuiti (105IN)
a.a. 2013-14

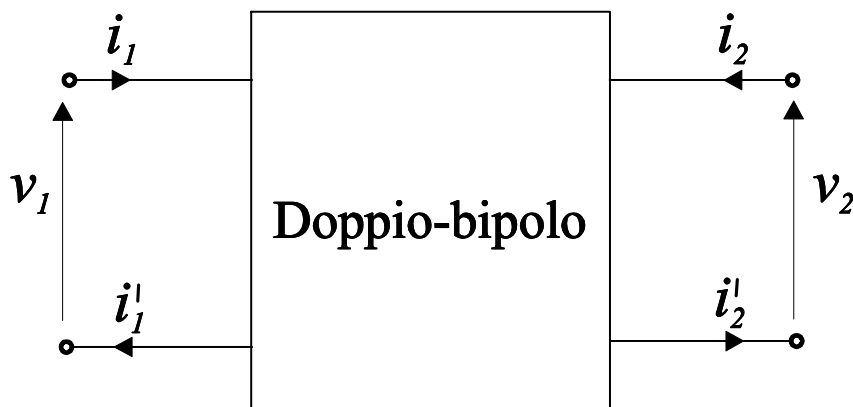
N-polo

- Un componente a $n+1$ terminali ($n+1$ -polo) ha, a causa di IK e IIK e fissato un terminale di riferimento, n tensioni e n correnti indipendenti.
- Il grafo è rappresentato da n rami congiunti nel terminale di riferimento
- Si descrive con n equazioni indipendenti



Doppio-bipolo

- Un doppio-bipolo è un 4-polo che pone un vincolo sulle correnti ai terminali presi a coppie ($i_1 = i'_1$, $i_2 = i'_2$)



- Il grafo è rappresentato da due rami congiunti nel terminale di riferimento
- Si descrive non con 3 equazioni, ma soltanto con 2, a causa del vincolo posto sulle correnti

Classificazione dei doppi-bipoli

- **PROPRI**
trasformatori

- **IMPROPRI**
quadrupoli in una opportuna connessione

- **TRIPOLARI**
transistori

Rappresentazione implicita

- Consideriamo un doppio-bipolo LRI. Può essere sempre descritto, se ben posto, da una coppia di equazioni implicite

$$\begin{cases} a_{11}v_1(t) + a_{12}v_2(t) + b_{11}i_1(t) + b_{12}i_2(t) = h_{s1}(t) \\ a_{21}v_1(t) + a_{22}v_2(t) + b_{21}i_1(t) + b_{22}i_2(t) = h_{s2}(t) \end{cases}$$

- In forma matriciale

$$\mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}\mathbf{i}(t) = \mathbf{h}_s(t)$$

$$[\mathbf{A} | \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \mathbf{i}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{h}_s(t)$$

- Si richiede che il rango della matrice $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ sia 2.

Rappresentazioni esplicite

- Possiamo esplicitare due variabili alla volta per ottenere le rappresentazioni esplicite

- Sono 6, ovvero $\binom{4}{2}$

- Mentre la rappresentazione implicita esiste sempre, non sempre esistono tutte e 6 le rappresentazioni esplicite. Un doppio-bipolo ha una rappresentazione esplicita solo se le corrispondenti variabili indipendenti sono tali nel doppio-bipolo

Rappresentazione delle resistenze

- Rappresentazione controllata in corrente o delle resistenze
- Le variabili indipendenti sono le correnti

$$\begin{cases} v_1(t) = R_{11}i_1(t) + R_{12}i_2(t) + v_{s1}(t) \\ v_2(t) = R_{21}i_1(t) + R_{22}i_2(t) + v_{s2}(t) \end{cases}$$

- Si ricava in forma matriciale dalla rappresentazione implicita

$$\mathbf{v}(t) = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{i}(t) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_s(t)$$

$$\text{ponendo: } \mathbf{R} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (\det \mathbf{A} \neq 0),$$

$$\mathbf{v}_s(t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h}_s(t)$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{R}\mathbf{i}(t) + \mathbf{v}_s(t)$$

Coefficienti di R

- Azzeroando le sorgenti indipendenti interne $v_{s1}(t)$ e $v_{s2}(t)$ si ottengono i coefficienti omogenei

$$R_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad [\Omega]$$

$$R_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad [\Omega]$$

$$R_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad [\Omega]$$

$$R_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad [\Omega]$$

- Tutti i coefficienti hanno le dimensioni di una resistenza

Reciprocità

- A correnti uguali, $i_1 = i_2$, corrispondono tensioni uguali all'altra porta $v_1 = v_2$. Se il doppio-bipolo contiene soltanto componenti LRI a 2 terminali, sarà reciproco



- Per questa rappresentazione: $R_{12} = R_{21}$

Uni- e zero-direzionalità

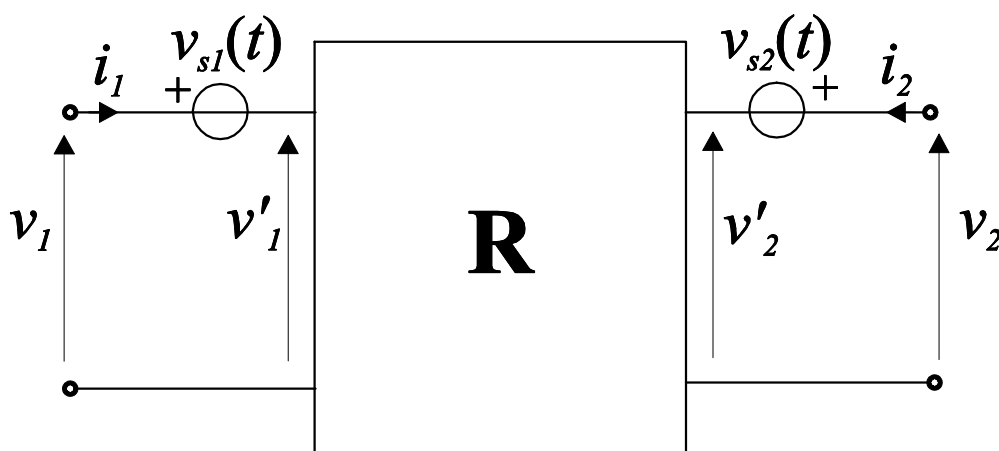
- Un doppio-bipolo è uni-direzionale quando una porta è influenzata dall'altra ma non viceversa; zero-direzionale quando le porte sono indipendenti tra loro.
- $R_{12} = 0$ oppure $R_{21} = 0 \rightarrow$ uni-dir.
- $R_{12} = R_{21} = 0 \rightarrow$ zero-dir.

Sorgenti indipendenti

- Le sorgenti $v_{s1}(t)$ e $v_{s2}(t)$ corrispondono alle tensioni a vuoto alle porte (vedi Thevenin)

$$\begin{cases} v_1(t) = v_{s1}(t) | i_1(t) = i_2(t) = 0 \\ v_2(t) = v_{s2}(t) | i_1(t) = i_2(t) = 0 \end{cases}$$

- Le sorgenti indipendenti di tensione interne possono essere inserite in serie alle porte del componente omogeneo



Rappresentazione delle conduttanze

- Rappresentazione controllata in tensione o delle conduttanze
- Le variabili indipendenti sono le tensioni

$$\begin{cases} i_1(t) = G_{11}v_1(t) + G_{12}v_2(t) + i_{s1}(t) \\ i_2(t) = G_{21}v_1(t) + G_{22}v_2(t) + i_{s2}(t) \end{cases}$$

- Si ricava in forma matriciale dalla rappresentazione implicita

$$\mathbf{i}(t) = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{h}_s(t)$$

$$\text{ponendo: } \mathbf{G} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \quad (\det \mathbf{B} \neq 0),$$

$$\mathbf{i}_s(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{h}_s(t)$$

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{G}\mathbf{v}(t) + \mathbf{i}_s(t)$$

Resistenze e conduttanze

- Valgono le relazioni:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^{-1}$$

- Quindi se un doppio-bipolo ha una matrice delle resistenze a determinante nullo, non avrà la rappresentazione delle conduttanze e viceversa
- Una rappresentazione esplicita non esiste quando le variabili che dovrebbero essere indipendenti hanno invece una dipendenza lineare tra loro

Coefficienti di G

- Azzeraando le sorgenti indipendenti interne $i_{s1}(t)$ e $i_{s2}(t)$ si ottengono i coefficienti omogenei

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} [\Omega^{-1}]$$

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} [\Omega^{-1}]$$

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} [\Omega^{-1}]$$

$$G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} [\Omega^{-1}]$$

- Tutti i coefficienti hanno le dimensioni di una conduttanza

Proprietà di G

- Reciprocità:

$$G_{12} = G_{21}$$

- Uni-direzionalità:

$$G_{12} = 0 \text{ oppure } G_{21} = 0$$

- Zero-direzionalità:

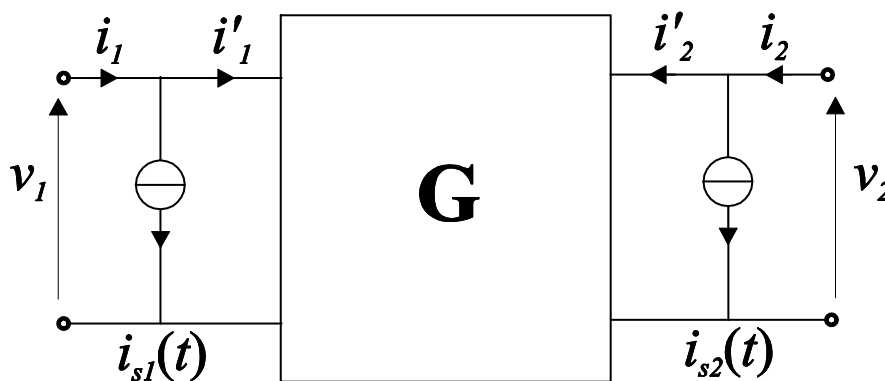
$$G_{12} = G_{21} = 0$$

Sorgenti indipendenti

- Le sorgenti $i_{s1}(t)$ e $i_{s2}(t)$ corrispondono alle correnti in corto circuito alle porte (vedi Norton)

$$\begin{cases} i_1(t) = i_{s1}(t) |_{v_1(t) = v_2(t) = 0} \\ i_2(t) = i_{s2}(t) |_{v_1(t) = v_2(t) = 0} \end{cases}$$

- Le sorgenti indipendenti di corrente interne possono essere inserite in parallelo alle porte del componente omogeneo



Rappresentazioni ibride

- Rappresentazione ibrida (prima): le variabili indipendenti sono una tensione e una corrente

$$\begin{cases} v_1(t) = h_{11}i_1(t) + h_{12}v_2(t) + v_{s1}(t) \\ i_2(t) = h_{21}i_1(t) + h_{22}v_2(t) + i_{s2}(t) \end{cases}$$

- Rappresentazione ibrida (seconda)

$$\begin{cases} i_1(t) = h''_{11}v_1(t) + h''_{12}i_2(t) + i_{s1}(t) \\ v_2(t) = h''_{21}v_1(t) + h''_{22}i_2(t) + v_{s2}(t) \end{cases}$$

- Valgono le relazioni:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}''^{-1}$$

$$\mathbf{H}'' = \mathbf{H}^{-1}$$

Coefficienti di H

- Azzeroando le sorgenti indipendenti interne $v_{s1}(t)$ e $i_{s2}(t)$ si ottengono i coefficienti omogenei

$$h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} [\Omega]$$

$$h_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} [A_V]$$

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} [A_I]$$

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} [\Omega^{-1}]$$

- I coefficienti hanno dimensioni ibride

Coefficienti di H''

- Azzeroando le sorgenti indipendenti interne $i_{s1}(t)$ e $v_{s2}(t)$ si ottengono i coefficienti omogenei

$$h''_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{i_2=0} [\Omega^{-1}]$$

$$h''_{12} = \left. \frac{i_1}{i_2} \right|_{v_1=0} [A_I]$$

$$h''_{21} = \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0} [A_V]$$

$$h''_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{v_1=0} [\Omega]$$

- I coefficienti hanno dimensioni ibride

Proprietà delle ibride

- Reciprocità:

$$h_{12} = -h_{21}, h''_{12} = -h''_{21}$$

- Uni-direzionalità:

$$h_{12} = 0 \text{ oppure } h_{21} = 0$$

$$h''_{12} = 0 \text{ oppure } h''_{21} = 0$$

- Zero-direzionalità:

$$h_{12} = h_{21} = 0$$

$$h''_{12} = h''_{21} = 0$$

- Sorgenti indipendenti interne:

quelle di tensione in serie e quelle di corrente in parallelo

Matrici e trasformate

- Nel dominio dei fasori la matrice **R** diventa **Z** e la matrice **G** diventa **Y**
- Nel dominio di Laplace la matrice **R** diventa **Z(s)** e la matrice **G** diventa **Y(s)**
- Le matrici ibride rimangono inalterate
- Tutte le definizioni viste finora (mutatis mutandis) rimangono inalterate nella forma

Potenza nei doppi-bipoli

- Le prime 4 rappresentazioni esplicite sono dette cardinali: esplicitano una variabile di una porta e una dell'altra porta. Sono adatte al calcolo della potenza
- La potenza in un doppio-bipolo, che sia nel dominio del tempo o dei fasori, si calcola come in qualsiasi n -polo, sommando le potenze alle porte

$$p(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t)$$

$$P_c = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^*$$

Forma quadratica

- In forma matriciale, nel dominio del tempo, utilizzando la matrice \mathbf{R} , si ottiene una forma quadratica

$$p(t) = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = \mathbf{i}^T \mathbf{R}^T \mathbf{i}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{i}$$

- Nel dominio dei fasori nello stesso modo si ottiene una forma quadratica

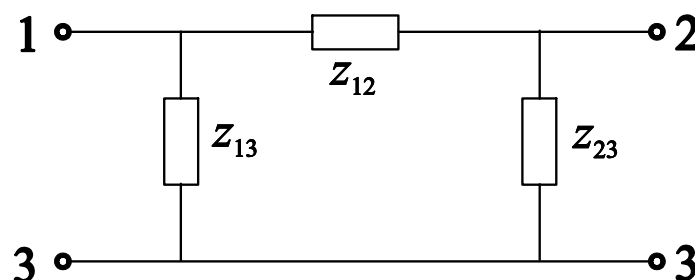
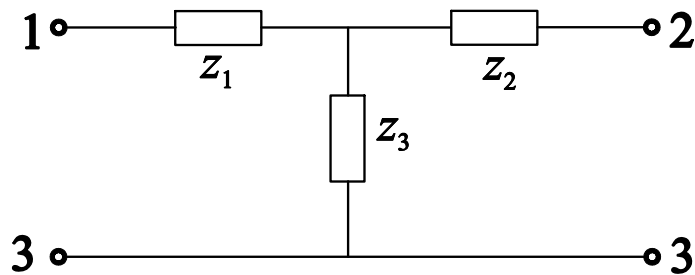
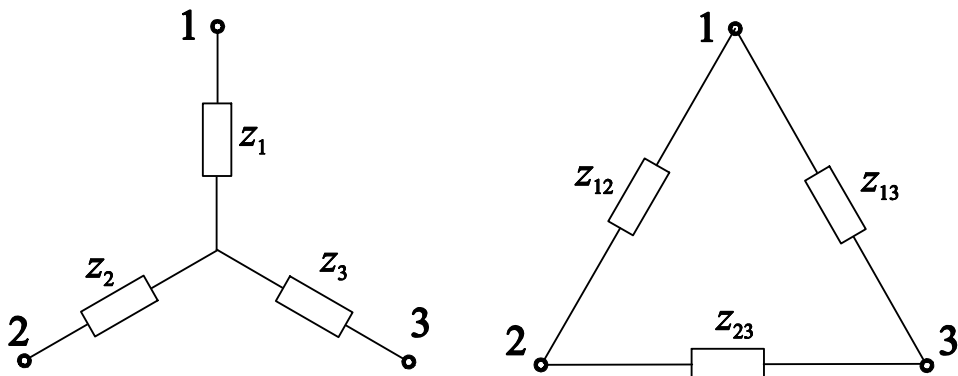
$$P_c = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* + \bar{V}_2 \bar{I}_2^* = \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{I}}^* = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{Y}^* \bar{\mathbf{V}}^*$$

$$\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{Y} \bar{\mathbf{V}}$$

- Una forma quadratica è semi-definita positiva, ovvero maggiore o uguale a zero per qualsiasi valore delle correnti, se il determinante è maggiore o uguale a zero.

Trasformazioni stella-triangolo e viceversa

- Nei doppi-bipoli sono viste come trasformazioni T- π e viceversa



Trasformazioni T - π e viceversa

- Le matrici \mathbf{Z} della T e \mathbf{Y} del π sono rispettivamente

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1 + z_3 & z_3 \\ z_3 & z_2 + z_3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{13} + y_{12} & -y_{12} \\ -y_{12} & y_{23} + y_{12} \end{bmatrix}$$

- La trasformazione si ottiene con l'inversione delle matrici

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1} = \begin{bmatrix} y_{23} + y_{12} & y_{12} \\ y_{12} & y_{13} + y_{12} \end{bmatrix} \frac{1}{\det(\mathbf{Y})}$$

$$\det(\mathbf{Y}) = (y_{13} + y_{12})(y_{23} + y_{12}) - y_{12}^2$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} z_2 + z_3 & -z_2 \\ -z_2 & z_1 + z_3 \end{bmatrix} \frac{1}{\det(\mathbf{Z})}$$

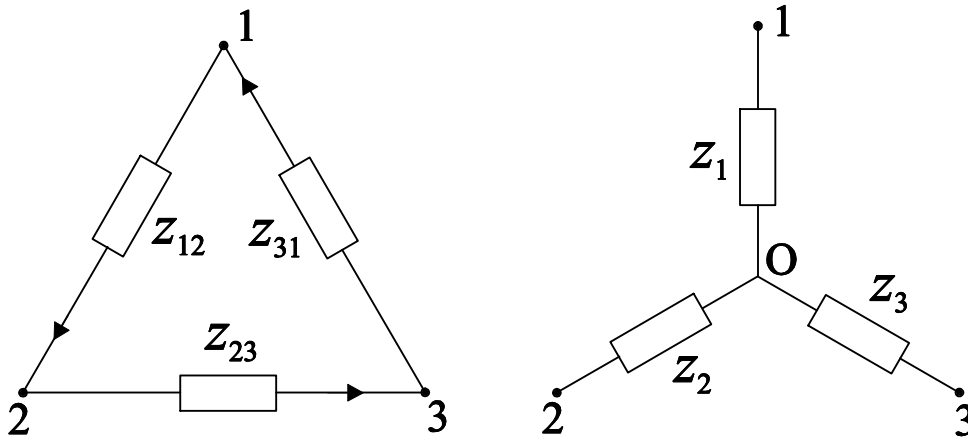
$$\det(\mathbf{Z}) = (z_1 + z_3)(z_2 + z_3) - z_2^2$$

Procedura delle trasformazioni

- Trasformazione $T \rightarrow \pi$ (stella-triangolo)
 - 1) Trovare la \mathbf{Z} della T
 - 2) Invertire la \mathbf{Z} e trovare la \mathbf{Y}
 - 3) Realizzare la \mathbf{Y} con un π
- Trasformazione $\pi \rightarrow T$ (triangolo-stella)
 - 1) Trovare la \mathbf{Y} della π
 - 2) Invertire la \mathbf{Y} e trovare la \mathbf{Z}
 - 3) Realizzare la \mathbf{Z} con un T

Trasformazioni triangolo-stella

- Tre resistenze a triangolo possono essere “trasformate” in tre resistenze a stella, in modo che le tensioni e le correnti ai morsetti esterni restino le stesse



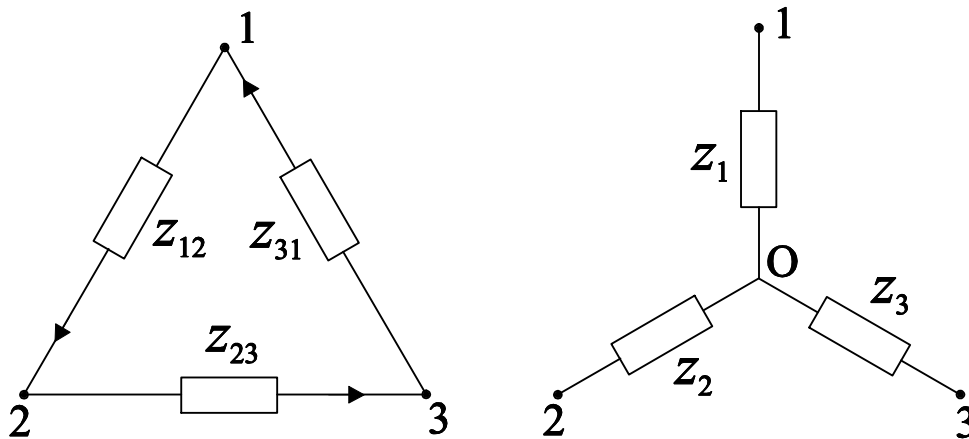
$$z_1 = \frac{z_{12}z_{13}}{z_{12} + z_{13} + z_{23}}, \quad y_1 = y_{12} + y_{13} + \frac{y_{12}y_{13}}{y_{23}}$$

$$z_2 = \frac{z_{12}z_{23}}{z_{12} + z_{13} + z_{23}}, \quad y_2 = y_{12} + y_{23} + \frac{y_{12}y_{23}}{y_{13}}$$

$$z_3 = \frac{z_{13}z_{23}}{z_{12} + z_{13} + z_{23}}, \quad y_3 = y_{13} + y_{23} + \frac{y_{13}y_{23}}{y_{12}}$$

Trasformazioni stella-triangolo

- Tre resistenze a stella possono essere “trasformate” in tre resistenze a triangolo, in modo che le tensioni e le correnti ai morsetti esterni restino le stesse



$$y_{23} = \frac{y_2 y_3}{y_1 + y_2 + y_3}, \quad z_{23} = z_2 + z_3 + \frac{z_2 z_3}{z_1}$$

$$y_{13} = \frac{y_1 y_3}{y_1 + y_2 + y_3}, \quad z_{13} = z_1 + z_3 + \frac{z_1 z_3}{z_2}$$

$$y_{12} = \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2 + y_3}, \quad z_{12} = z_1 + z_2 + \frac{z_1 z_2}{z_3}$$

Matrici di trasmissione

- Matrici di trasmissione prima e seconda in forma omogenea: esplicitano due variabili della stessa porta (notare il segno “-” posto sulla corrente i_2). Vale la relazione: $\mathbf{T} = \mathbf{T}''^{-1}$

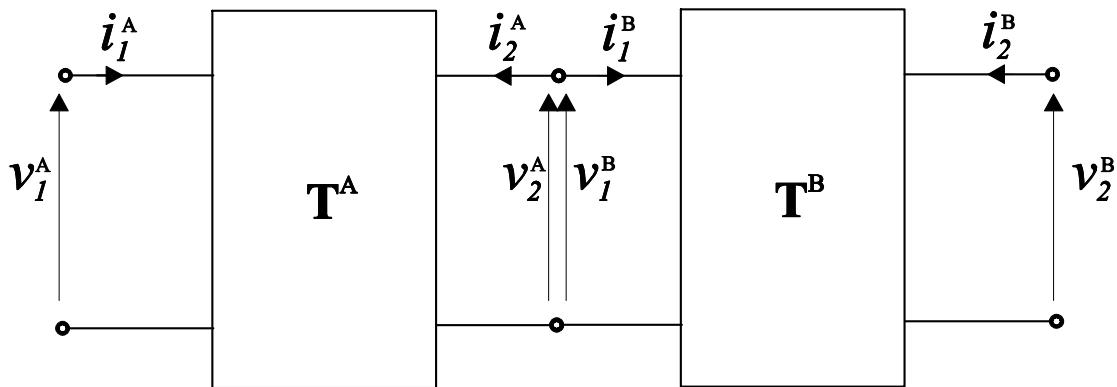
$$\begin{cases} v_1(t) = t_{11}v_2(t) + t_{12}(-i_2(t)) \\ i_1(t) = t_{21}v_2(t) + t_{22}(-i_2(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2(t) = t''_{11}v_1(t) + t''_{12}i_1(t) \\ (-i_2(t)) = t''_{21}v_1(t) + t''_{22}i_1(t) \end{cases}$$

- Esprimono direttamente la relazione tra le due porte.
- Reciprocità: $\det \mathbf{T} = 1$, $\det \mathbf{T}'' = 1$
- Uni-direzionalità: $\det \mathbf{T} = 0$ oppure $\det \mathbf{T}'' = 0$
- Zero-direzionalità: non esistono entrambe

Connessione in cascata

- È la connessione che rende importante la matrice di trasmissione



$$\begin{bmatrix} v_1^A \\ i_1^A \end{bmatrix} = \mathbf{T}^A \begin{bmatrix} v_2^A \\ -i_2^A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_1^B \\ i_1^B \end{bmatrix} = \mathbf{T}^B \begin{bmatrix} v_2^B \\ -i_2^B \end{bmatrix}$$

- Le relazioni per la connessione sono

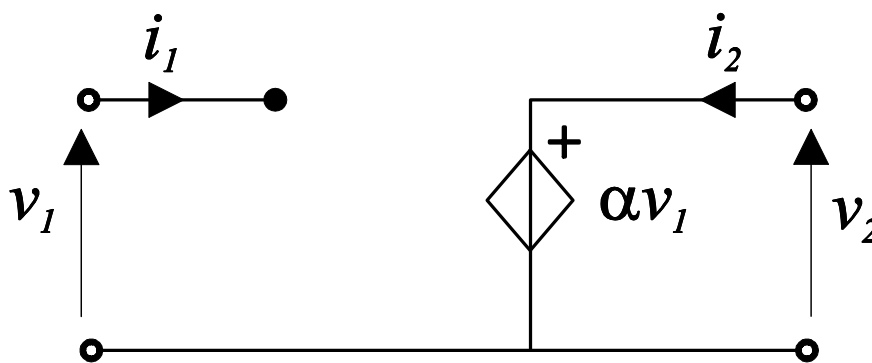
$$v_2^A = v_1^B, \quad -i_2^A = i_1^B$$

- Ne deriva che

$$\begin{bmatrix} v_1^A \\ i_1^A \end{bmatrix} = \mathbf{T}^A \mathbf{T}^B \begin{bmatrix} v_2^B \\ -i_2^B \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{T}^A \mathbf{T}^B$$

Sorgenti controllate ideali

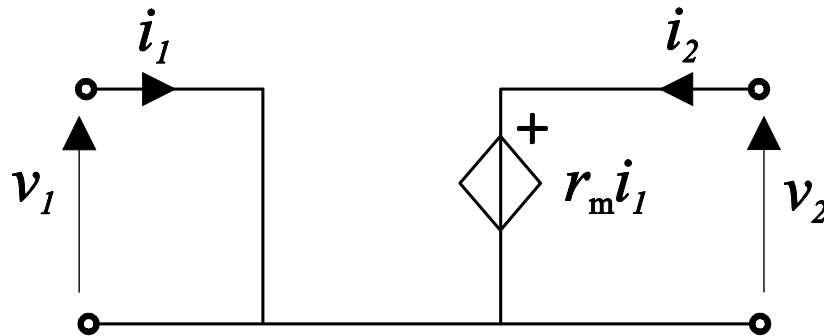
- sono 4 e servono a modellizzare la dipendenza uni-direzionale di una tensione (o corrente) in un ramo dalla tensione (o corrente) di un altro ramo
- Sorgente di tensione controllata in tensione (VCVS)



$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = \alpha v_1 \end{cases} \rightarrow \mathbf{H}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

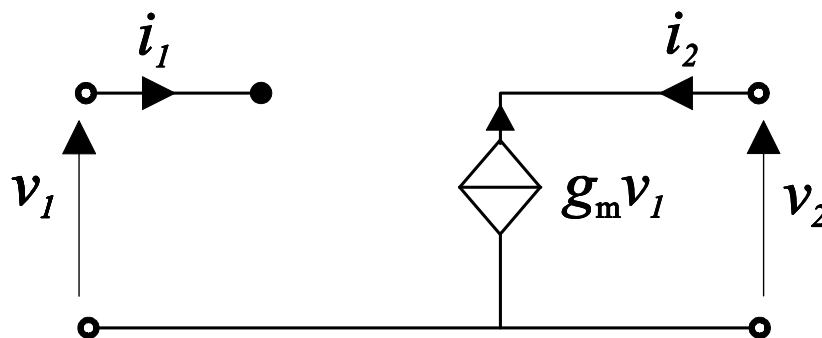
Sorgenti controllate ideali (2)

- Sorgente di tensione controllata in corrente (CCVS)



$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = r_m i_1 \end{cases} \rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_m & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r_m & 0 \end{bmatrix}$$

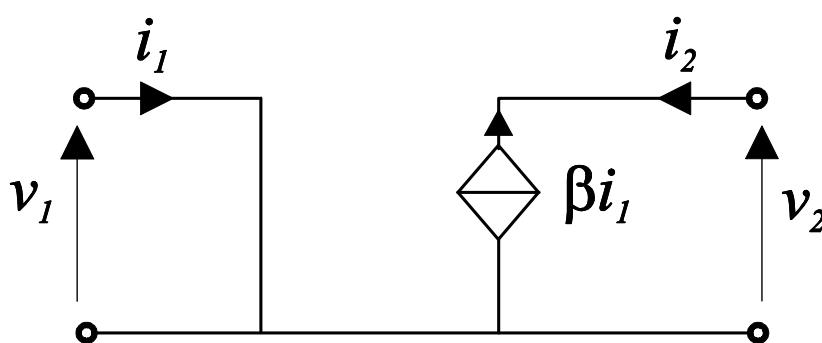
- Sorgente di corrente controllata in tensione (VCCS)



$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = -g_m v_1 \end{cases} \rightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g_m & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1/g_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sorgenti controllate ideali (3)

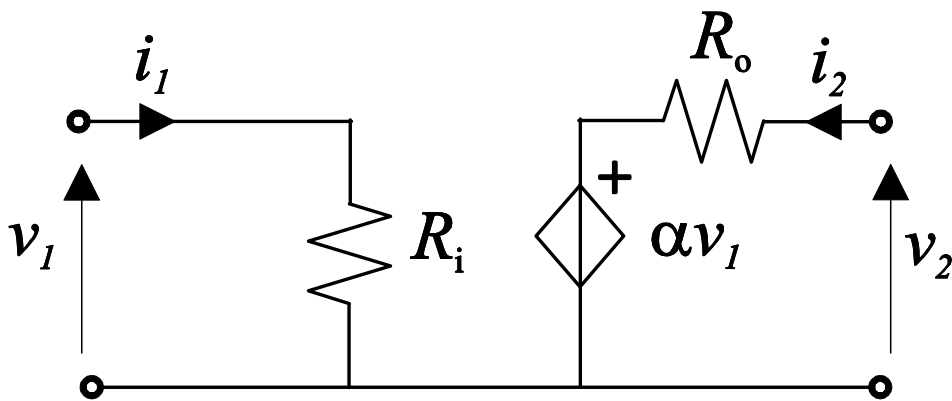
- Sorgente di corrente controllata in corrente (CCCS)



$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = -\beta i_1 \end{cases} \rightarrow \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\beta \end{bmatrix}$$

Sorgenti controllate reali

- Sono ottenute dalle ideali aggiungendo una resistenza in ingresso e una in uscita. A differenza delle ideali, le reali sono tutte equivalenti tra loro applicando i teoremi di Thevenin e Norton.

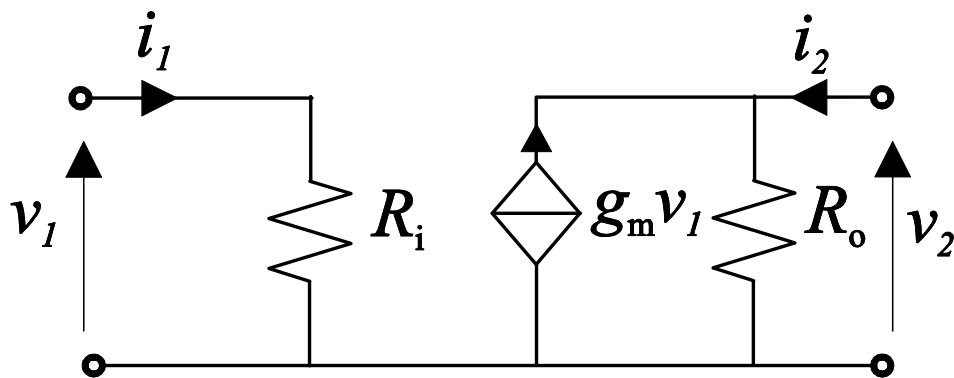


- VCVS

$$\begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{R_i} \\ v_2 = \alpha v_1 + R_o i_2 \end{cases} \rightarrow \mathbf{H}'' = \begin{bmatrix} 1/R_i & 0 \\ \alpha & R_o \end{bmatrix}$$

Sorgenti controllate reali (2)

- VCCS (applicando Norton in uscita)



$$\begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{R_i} \\ i_2 = -g_m v_1 + \frac{v_2}{R_o} \end{cases} \rightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1/R_i & 0 \\ -g_m & 1/R_o \end{bmatrix}$$

dove: $g_m = \frac{\alpha}{R_o}$

- Le altre 2, CCVS e CCCS possono essere ottenute ponendo: $v_1 = R_i i_1$

Sorgenti controllate reali (3)

Criterio di scelta della sorgente reale:

Porta d'ingresso:

- R_i «piccola» (c.c.) \rightarrow controllo in corrente
- R_i «grande» (c.a.) \rightarrow controllo in tensione

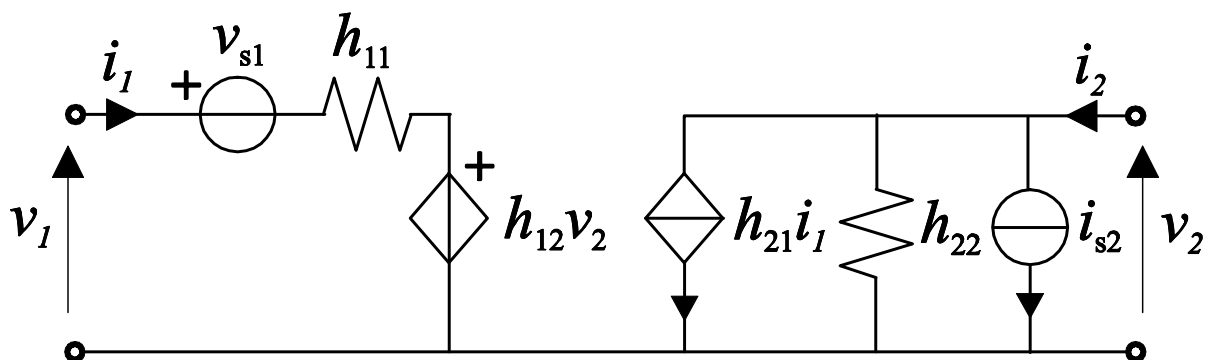
Porta d'uscita:

- R_o «piccola» (c.c.) \rightarrow sorgente di tensione (Thevenin)
- R_o «grande» (c.a.) \rightarrow sorgente di corrente (Norton)

Sintesi dei doppi-bipoli

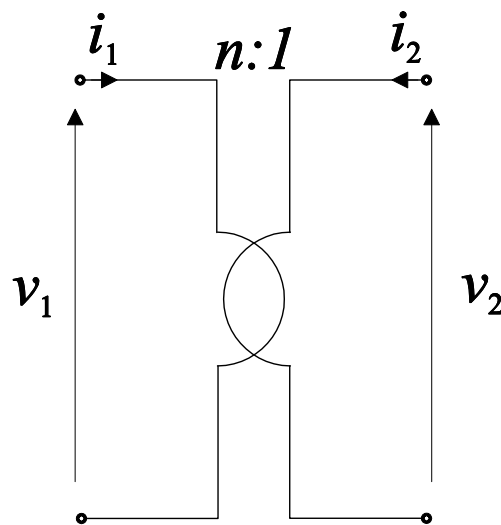
- Utilizzando le sorgenti controllate, siamo ora in grado di realizzare qualsiasi doppio-bipolo

$$\begin{cases} v_1(t) = h_{11}i_1(t) + h_{12}v_2(t) + v_{s1}(t) \\ i_2(t) = h_{21}i_1(t) + h_{22}v_2(t) + i_{s2}(t) \end{cases}$$



Trasformatore ideale

- È un doppio-bipolo resistivo



- n : rapporto di trasformazione

$$\begin{cases} v_1 = n v_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Trasformatore ideale (2)

- Notare che $\det \mathbf{H} \neq 0$ e $\det \mathbf{T} = 1$
- Non esistono la matrice \mathbf{R} e \mathbf{G}

- Proprietà fondamentale: è un componente inerte

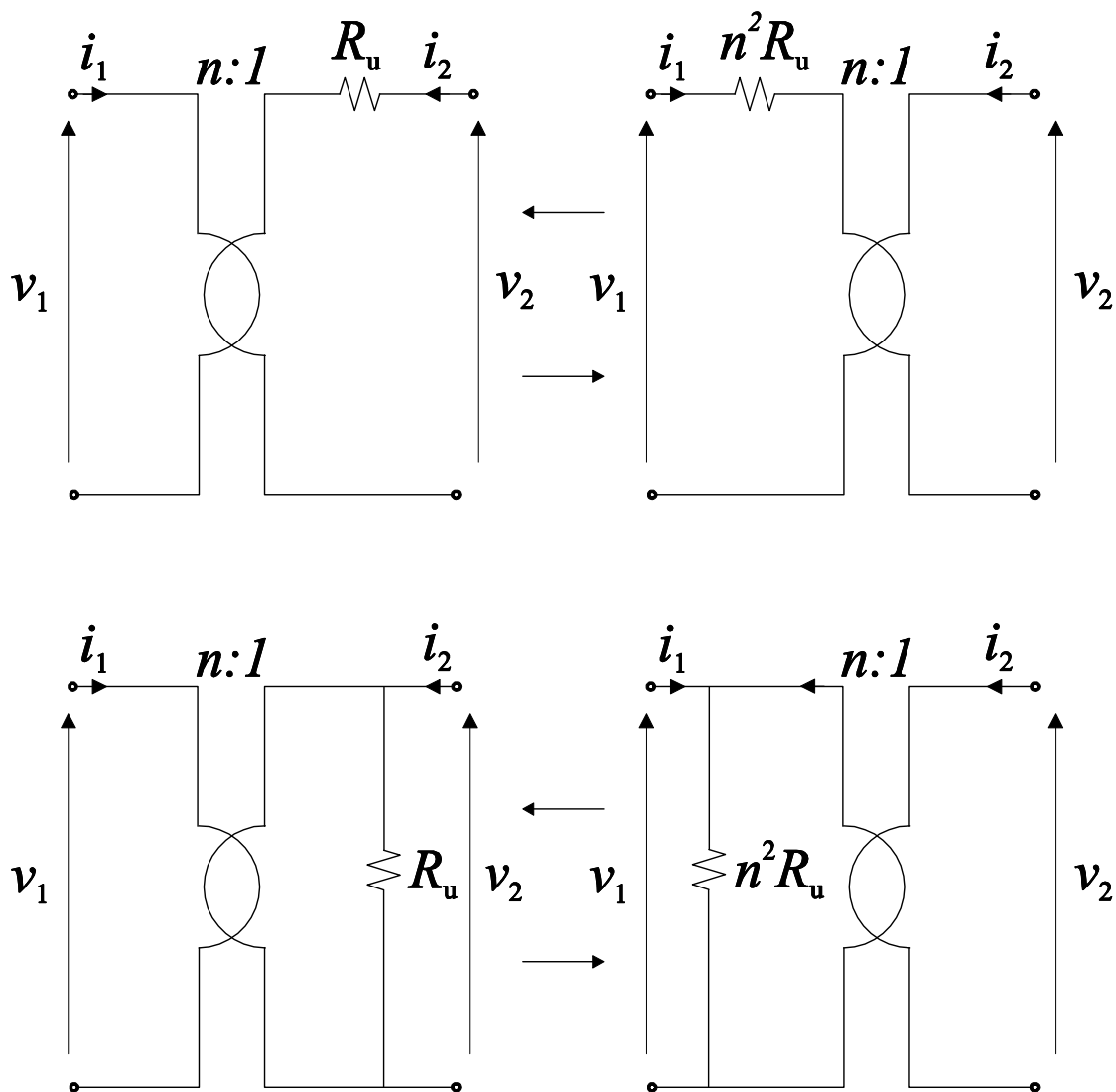
$$p(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 = nv_2 \left(-\frac{1}{n} i_2 \right) + v_2 i_2 = 0$$

- Proprietà di adattamento di impedenza: consideriamo un trasformatore chiuso su una resistenza R_u

$$R_{ing} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{nv_2}{-\frac{1}{n} i_2} = -n^2 \frac{v_2}{i_2} = n^2 R_u$$

Trasformatore ideale (3)

- Si dimostra che valgono pure le seguenti proprietà di spostamento delle resistenze tra le porte, per cui i seguenti doppi-bipoli risultano equivalenti

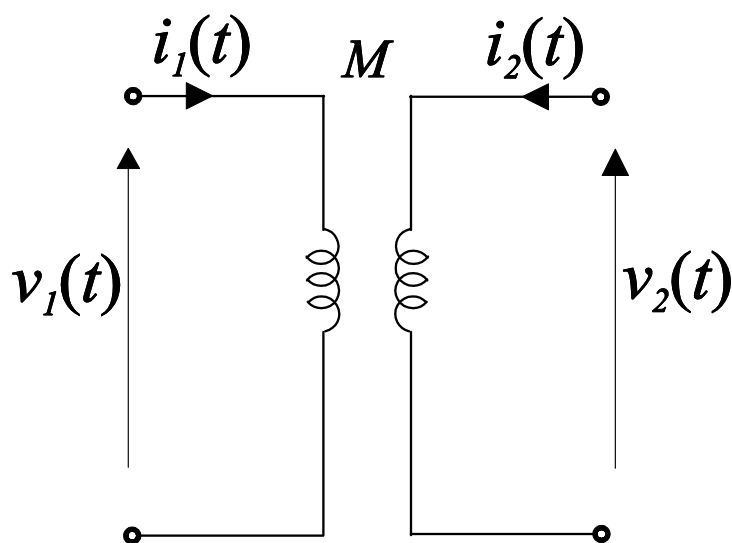


Mutua induttanza

- È un doppio-bipolo dinamico conservativo del II ordine

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

- $L_1 > 0$: induttanza primaria [H]
- $L_2 > 0$: induttanza secondaria [H]
- M : mutua induttanza [H]



Mutua induttanza (2)

- Rappresentazione differenziale

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$i_1(0^-) = I_1, \quad i_2(0^-) = I_2$$

- Rappresentazione integrale

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \int_{0^-}^t v_1(\tau) d\tau \\ \int_{0^-}^t v_2(\tau) d\tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

- Con Laplace

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1 & sM \\ sM & sL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 I_1 + M I_2 \\ M I_1 + L_2 I_2 \end{bmatrix}$$

Mutua induttanza (3)

- L'energia immagazzinata è

$$E(t) = \frac{L_1 i_1^2(t) + L_2 i_2^2(t) + 2M i_1(t) i_2(t)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_1(t) & i_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

- È una forma quadratica che deve essere semi-definita positiva, ovvero maggiore o uguale a zero per qualsiasi valore delle correnti. Quindi si ha:

$$L_1 L_2 \geq M^2$$

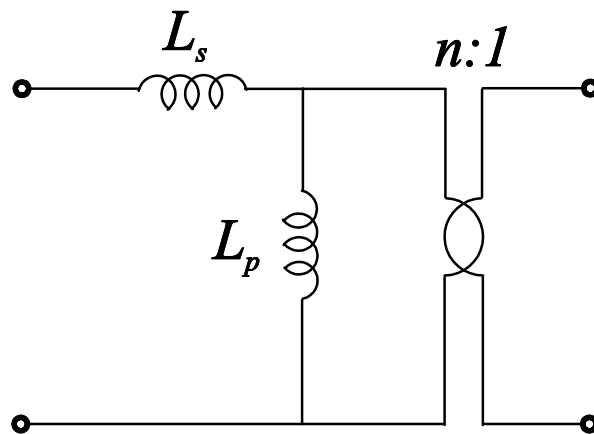
- Inoltre la matrice deve essere simmetrica altrimenti il differenziale della potenza $p(\tau)d\tau$ non sarebbe esatto.

Mutua induttanza (4)

- Si definisce come coefficiente di accoppiamento

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad -1 \leq k \leq 1$$

- Un modello equivalente è



$$n = \frac{M}{L_2}, \quad L_p = \frac{M^2}{L_2} = k^2 L_1,$$

$$L_s = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} = (1 - k^2) L_1$$

- Ogni matrice \mathbf{Z} può essere realizzata con un tripolo a T (tripolo di induttanze)

Mutua induttanza (5)

- Nel caso in cui $k = 1$, si ha che:

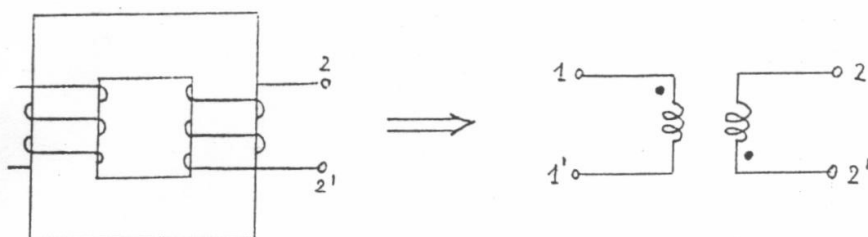
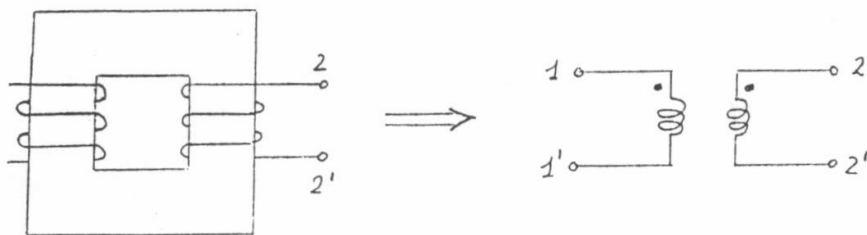
$$n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}, \quad L_p = L_1, \quad L_s = 0$$

- Le equazioni diventano

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega\sqrt{L_1 L_2} \\ j\omega\sqrt{L_1 L_2} & j\omega L_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix}$$

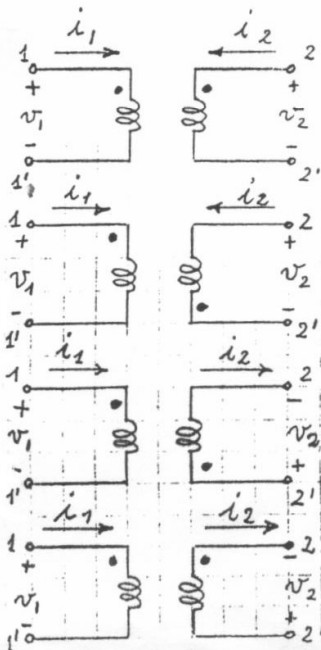
- In questo caso $\det \mathbf{M} = 0$, ovvero la matrice non è invertibile, ovvero il componente è non-controllato in tensione

Mutua induttanza (6)



Convenzione: una tensione positiva applicata ad uno dei due bipoli al terminale contrassegnato dal punto genera nell'altro bipolo una tensione con il segno positivo sul terminale contrassegnato dal punto.

Es:



$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

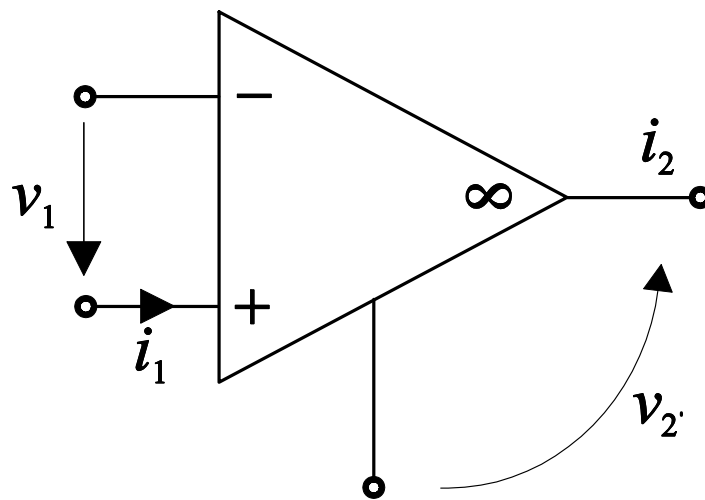
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

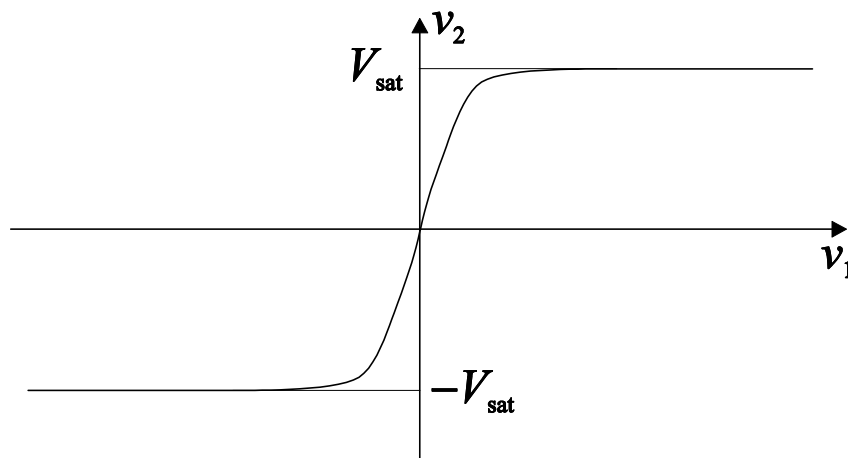
$$\begin{cases} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Amplificatore operazionale

- È un dispositivo (OA) fondamentale (nonlineare) nell'elettronica analogica



- È un amplificatore differenziale con trans-caratteristica



Amplificatore operazionale (2)

- La curva presenta un lato lineare ad alta amplificazione al centro e due zone di saturazione. Noi utilizzeremo il OA solo nella zona centrale lineare
- L'alta amplificazione fa sì che la tensione v_1 sia prossima a zero (massa virtuale).

Esempio:

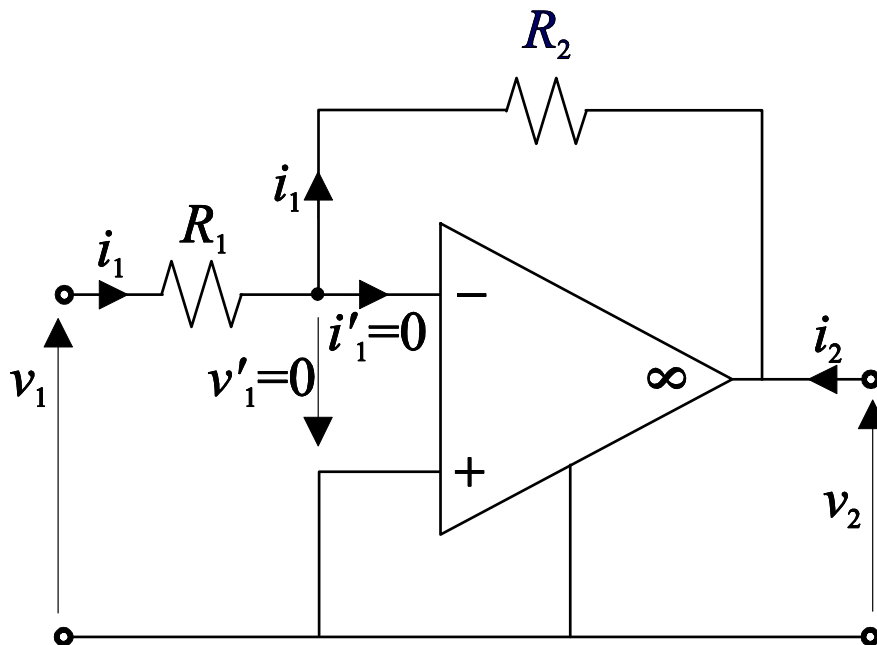
$$v_2 = 10 \text{ V} \rightarrow v_1 = \frac{v_2}{A_{dV}} = \frac{10}{10^5} = 10^{-4} \text{ V}$$

- Le equazioni lineari sono:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Amplificatore operazionale (3)

- La configurazione principale del OA è detta “invertente”



$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{R_2}{R_1} = A_V$$

- Perché il OA lavori in zona lineare, ovvero tra i terminali di ingresso ci sia un corto circuito, la tensione di uscita non deve arrivare nelle zone di saturazione

Amplificatore operazionale (4)

- Si ha

$$|v_2| < V_{sat} \rightarrow -V_{sat} < -\frac{R_2}{R_1} v_1 < V_{sat} \rightarrow$$

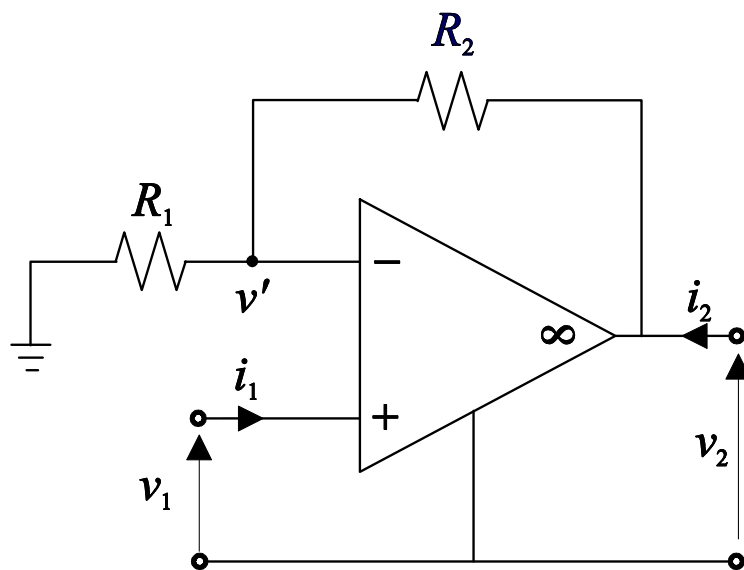
$$\rightarrow -\frac{R_1}{R_2} V_{sat} < v_1 < \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$$

$$\rightarrow -\frac{V_{sat}}{|A_V|} < v_1 < \frac{V_{sat}}{|A_V|}$$

- Il segnale di ingresso deve essere limitato dall'amplificazione A_V
- Ci sono anche dei vincoli in frequenza, dovuti all'abbassamento di A_V all'aumentare della frequenza.

Amplificatore operazionale (5)

- Vediamo la configurazione del OA detta “non-invertente”

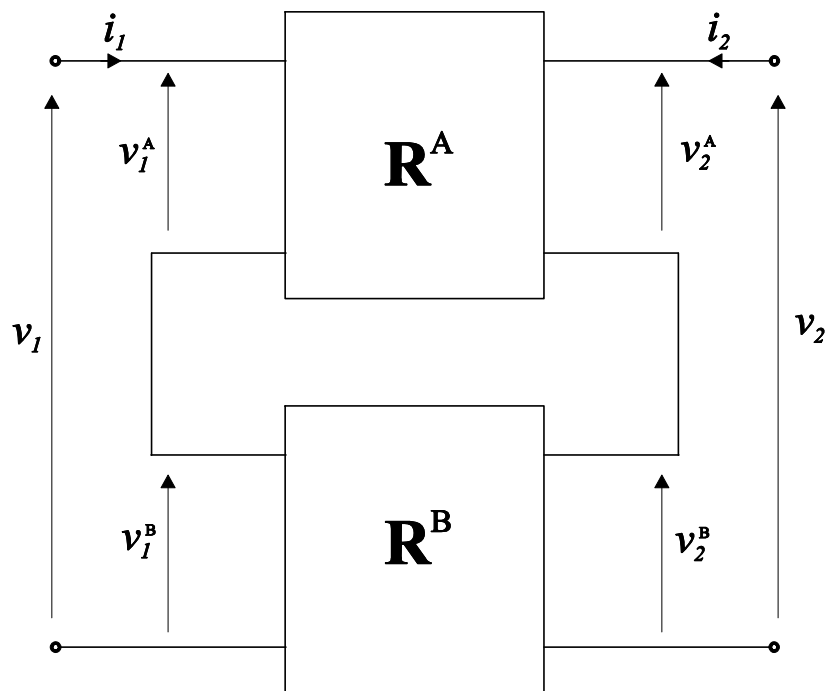


- Per la “massa virtuale”, il potenziale v' è uguale a v_1 . Si ottiene una amplificazione di tensione pari a:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = A_V$$

Connessione serie

- Due doppi-bipoli sono connessi in serie quando le correnti sono in comune e le tensioni si sommano



$$\begin{cases} i_1 = i_1^A = i_1^B \\ i_2 = i_2^A = i_2^B \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = v_1^A + v_1^B \\ v_2 = v_2^A + v_2^B \end{cases}$$

Connessione serie (2)

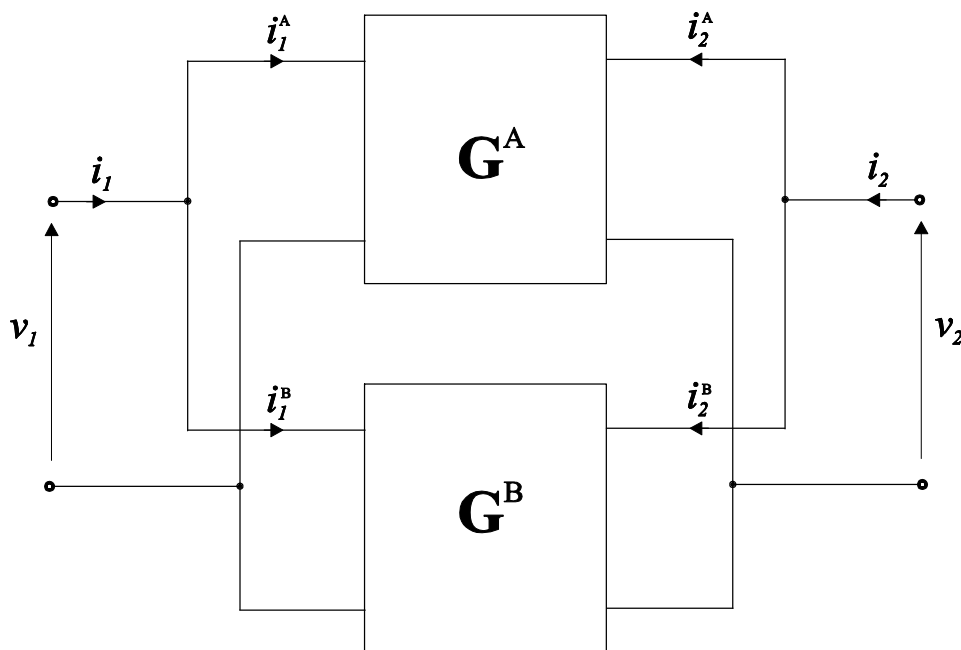
- Se esistono le matrici \mathbf{R}^A e \mathbf{R}^B , allora la connessione può essere risolta facendo la loro somma: $\mathbf{R} = \mathbf{R}^A + \mathbf{R}^B$

$$\begin{bmatrix} v_1^A \\ v_2^A \end{bmatrix} = \mathbf{R}^A \begin{bmatrix} i_1^A \\ i_2^A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_1^B \\ v_2^B \end{bmatrix} = \mathbf{R}^B \begin{bmatrix} i_1^B \\ i_2^B \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^A \\ v_2^A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^B \\ v_2^B \end{bmatrix} = (\mathbf{R}^A + \mathbf{R}^B) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Connessione parallelo

- Due doppi-bipoli sono connessi in parallelo quando le tensioni sono in comune e le correnti si sommano

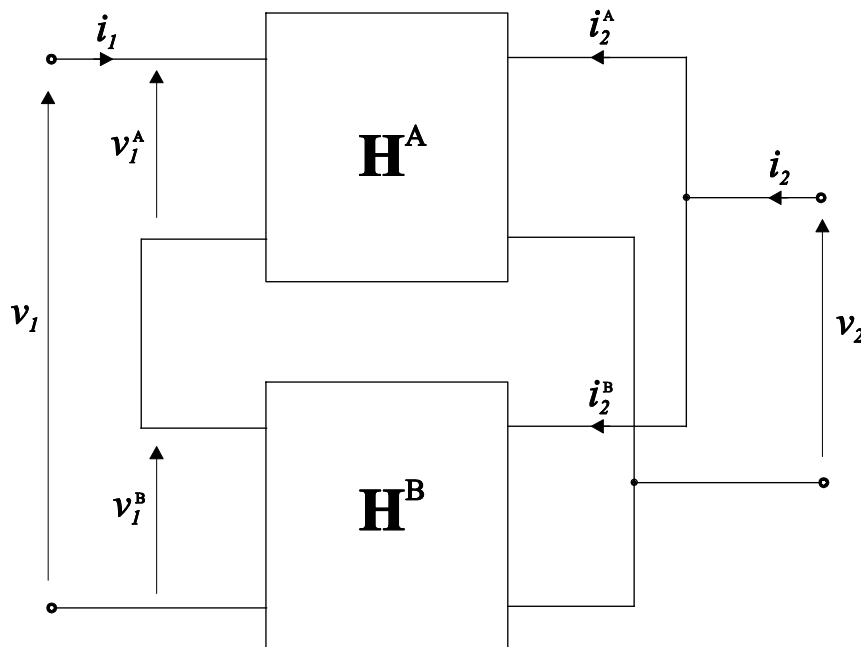


$$\begin{cases} v_1 = v_1^A = v_1^B \\ v_2 = v_2^A = v_2^B \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = i_1^A + i_1^B \\ i_2 = i_2^A + i_2^B \end{cases}$$

- Se esistono le matrici \mathbf{G}^A e \mathbf{G}^B , allora la connessione può essere risolta facendo la loro somma: $\mathbf{G} = \mathbf{G}^A + \mathbf{G}^B$

Connessione ibrida

- Due doppi-bipoli sono in connessione ibrida quando ho una connessione serie alla prima porta e una parallela alla seconda porta



$$\begin{cases} v_1 = v_1^A + v_1^B \\ v_2 = v_2^A = v_2^B \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 = i_1^A = i_1^B \\ i_2 = i_2^A + i_2^B \end{cases}$$

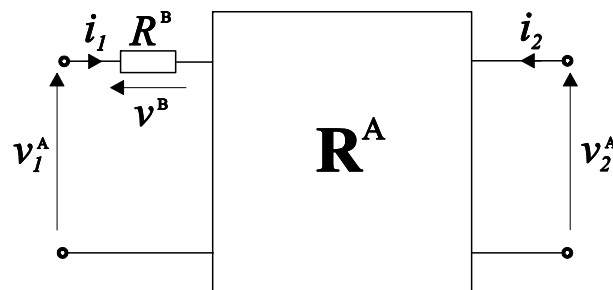
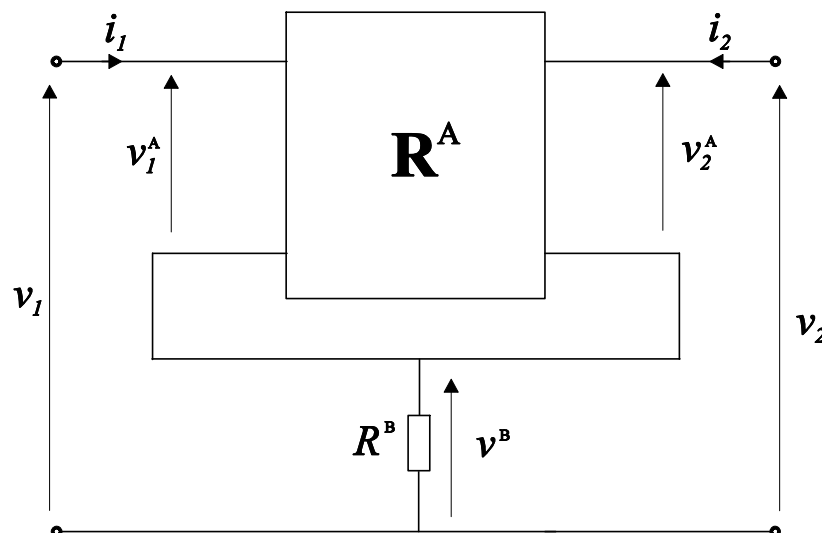
- Se esistono le matrici \mathbf{H}^A e \mathbf{H}^B , allora la connessione può essere risolta facendo la loro somma: $\mathbf{H} = \mathbf{H}^A + \mathbf{H}^B$

Connessione ibrida seconda

- Due doppi-bipoli sono in connessione ibrida seconda quando ho una connessione parallelo alla prima porta e una serie alla seconda porta
- Le matrici rappresentative di questa connessione sono le ibride seconde \mathbf{H}'' . Se esistono le matrici \mathbf{H}''^A e \mathbf{H}''^B , allora la connessione può essere risolta facendo la loro somma: $\mathbf{H}'' = \mathbf{H}''^A + \mathbf{H}''^B$

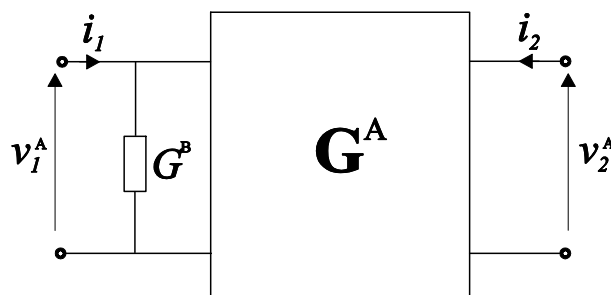
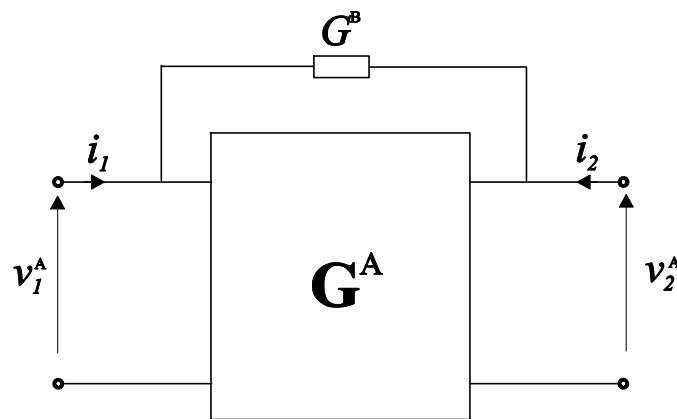
Connessioni con bipolo

- Connessione serie a una porta o sul terminale comune: in entrambi i casi si utilizza la matrice \mathbf{R}



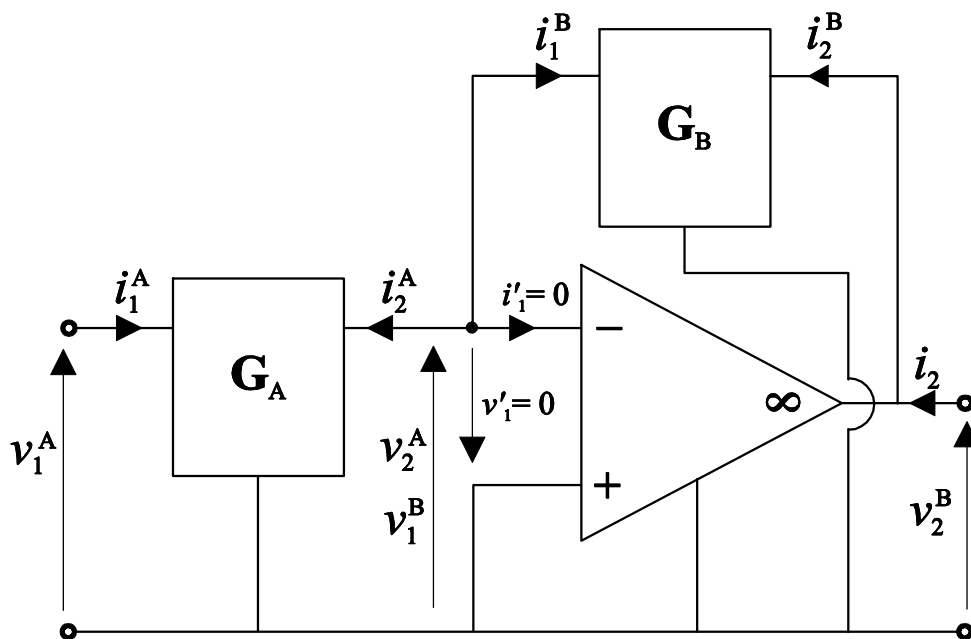
Connessioni con bipolo (2)

- Connessione parallelo a una porta o tra le porte: in entrambi i casi si utilizza la matrice \mathbf{G}



Connessione per l'operazionale

- Vediamo la connessione invertente generalizzata



- Si ha per la connessione

$$\begin{cases} i_2^A = -i_1^B \\ v_2^A = v_1^B = 0 \end{cases}$$

Connessione per l'operazionale (2)

- Supponendo che entrambi i tripoli abbiano la matrice \mathbf{G}

$$\begin{cases} i_1^A = G_{11}^A v_1^A \\ i_2^A = G_{21}^A v_1^A \end{cases} \quad \begin{cases} i_1^B = G_{12}^B v_2^B \\ i_2^B = G_{22}^B v_2^B \end{cases}$$

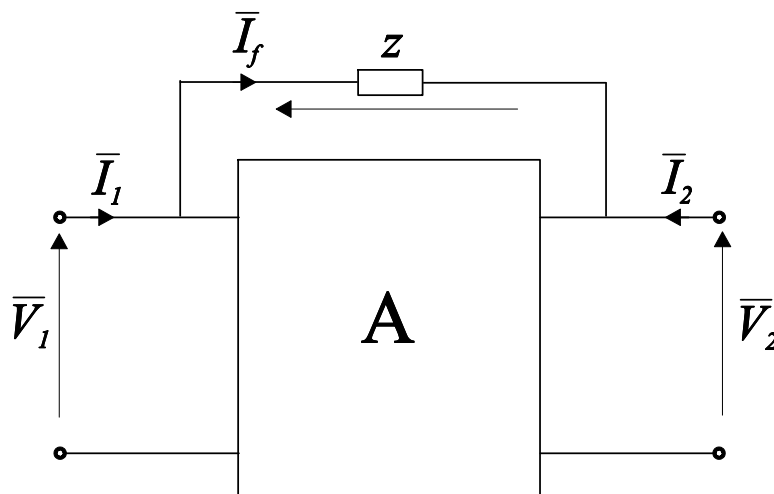
$$\rightarrow G_{21}^A v_1^A = -G_{12}^B v_2^B$$

$$\rightarrow \frac{v_2^B}{v_1^A} = -\frac{G_{21}^A}{G_{12}^B}$$

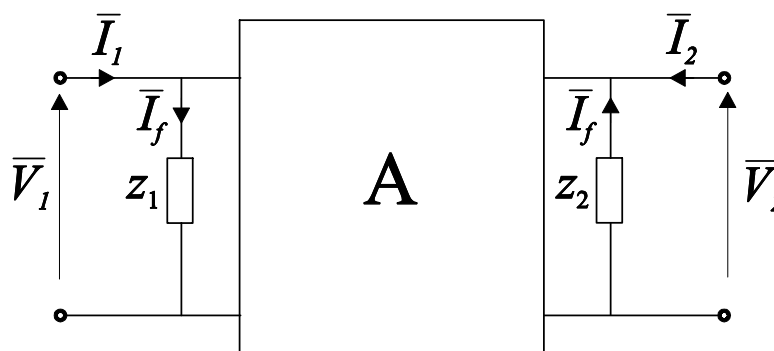
- Nel caso dell'amplificatore invertente si ritrova l'espressione $(-R_2/R_1)$

Teorema di Miller I

- Consideriamo il parallelo tra un doppio-bipolo che non ha la matrice \mathbf{G} , quindi $\mathbf{V}_2 = \alpha \mathbf{V}_1$, e un bipolo



- Vogliamo ottenere il seguente doppio-bipolo equivalente



Teorema di Miller I (2)

- Per stabilire l'equivalenza , si deve imporre che

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_f &= \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{z} = \frac{\bar{V}_1 - \alpha\bar{V}_1}{z} = \frac{\bar{V}_1(1 - \alpha)}{z} \\ \bar{I}_f &= \frac{\bar{V}_1}{z_1} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow z_1 = \frac{z}{1 - \alpha}$$

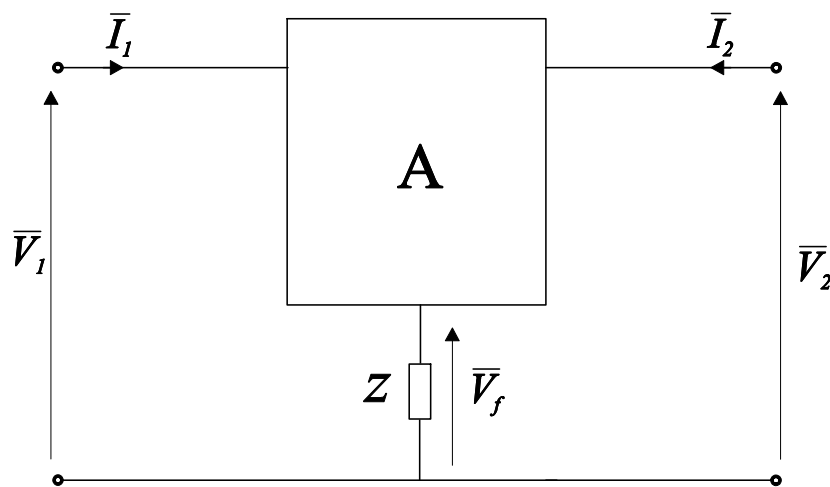
$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_f &= \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{z} = \frac{\bar{V}_2/\alpha - \bar{V}_2}{z} = \frac{\bar{V}_2(1/\alpha - 1)}{z} \\ \bar{I}_f &= -\frac{\bar{V}_2}{z_2} \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow z_2 = \frac{z}{1 - 1/\alpha}$$

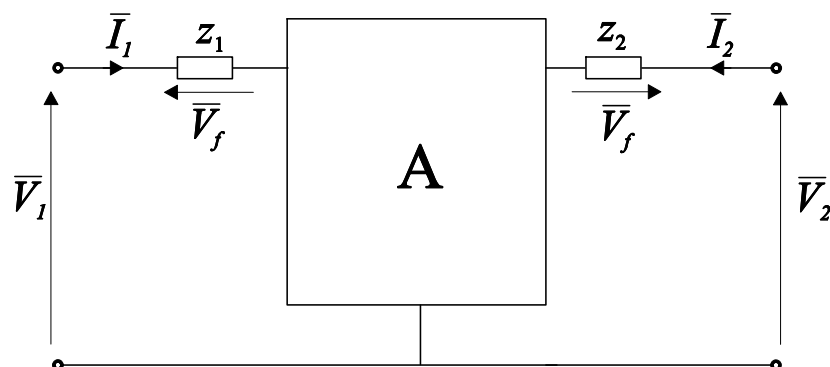
Teorema di Miller II

- Consideriamo la serie tra un doppio-bipolo che non ha la matrice \mathbf{R} , quindi

$\mathbf{I}_2 = \beta \mathbf{I}_1$, e un bipolo



- Vogliamo ottenere il seguente doppio-bipolo equivalente



Teorema di Miller II (2)

- Per stabilire l'equivalenza, si deve imporre che

$$\begin{aligned}\bar{V}_f &= z(\bar{I}_1 + \bar{I}_2) = \\ &= \begin{cases} z(\bar{I}_1 + \beta\bar{I}_1) = z\bar{I}_1(1 + \beta) = z_1\bar{I}_1 \\ z\left(\bar{I}_2 \frac{1}{\beta} + \bar{I}_2\right) = z\bar{I}_2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) = z_2\bar{I}_2 \end{cases} \\ \rightarrow z_1 &= z(1 + \beta), \quad z_2 = z\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\end{aligned}$$