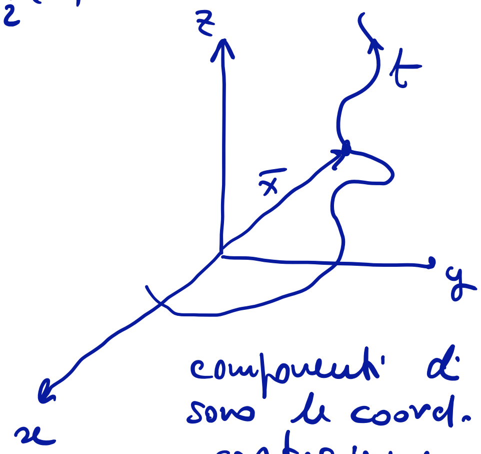
EQ. DIFFERENZIALI ORDINARIE

Eq. di Newton $\quad \bar{F} = m\bar{a} = m \frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2}$



$\bar{x}(t)$: $\quad \bar{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

componenti di $\bar{x}$ sono le coord. cartesiane

L'eq. di Newton è un'eq. differenziale

$$m \frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2} = \bar{F}\left(\bar{x}(t), \frac{d\bar{x}}{dt}(t), t\right)$$

→ è un'eq. la cui incognita è una FUNZIONE ($\bar{x}(t)$)

Ci mettiamo nel caso 1 dimensionale

il pto materiale si muove su una retta

Il moto lungo la retta è descritto da una funz.

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto x(t)$$

Eq. di Newton:

$$m \frac{d^2x}{dt} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

eq. la cui incognita è la funz. $x(t)$

funzioni : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto \dots$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \equiv f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

è un'uguaglianza fra due funz. in t

questa funzione è una funzione a tre variabili

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, v, t) \mapsto f(x, v, t)$$

è una funzione

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(x(t), \dot{x}(t), t)$$

2ª legge di Newton in sist. 1d:

$$\underbrace{\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)}_{\text{"forma normale"}}$$

se f è INDIPEND da t, l'eq. si dice AUTONOMA

(Forma generica sarebbe $g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0$)

Se f è LINEARE in x e $\dot{x}$, l'eq. si dice LINEARE

$f(x, \dot{x}, t) = a\dot{x} + bx + c$

ES 1) PARTICELLA LIBERA

$$\ddot{x} = 0$$

$$\to \quad x(t) = at + b$$

← "SOLUZIONE GENERALE"

a, b parametri liberi

⇝ per ogni scelta di (a, b) abbiamo una diversa soluzione PARTICOLARE

ES. $(a, b) = (1, 0) \leadsto x(t) = t$

ES 2) OSCILLATORE ARMONICO

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\to x(t) = \underline{\underline{a}} \cos(\omega t) + \underline{\underline{b}} \,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$= \underline{\underline{A}} \cos(\omega t + \underline{\underline{\varphi}})$$

$$= \underline{\underline{C}}\, e^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}$$

$$\llcorner\, C = \mathrm{Re}\,C + i\,\mathrm{Im}\,C$$

2 parametri (reali) liberi

ES 3) REPULSORE ARMONICO

$$\ddot{x} = \omega^2 x$$

$$\to x(t) = \underline{a} \cosh\omega t + \underline{b}\, \mathrm{senh}\,\omega t$$

$$= \underline{\underline{A}}\, e^{\omega t} + \underline{B}\, e^{-\omega t}$$

ES 1,2,3 hanno caratteristica in comune:

$f = 0 \;, -\omega^2 x \;, \omega^2 x \quad \to f$ è una funz. lineare in $x, \dot{x}$

Per le eq. diff. lineari OMOGENEE* vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZ. che dice che la SOLUZ. GEN. è combinazione lineare di 2 (se eq. è del 2° ord.) soluz. particolari indip.

$$* \; f(x,\dot{x},t) = a\dot{x} + bx \quad (c=0)$$

Se a f lin. omogenea, si aggiunge un termine non-omogeneo, allora la soluz. GENERALE è la somma di una soluz. particolare e della soluz. gen. dell'eq. omogenea associata.

ES 4

$f = -g$ è lineare, ma non è omogenea.

$\ddot{x} = -g$ ⤳ eq. omogenea associata è $\ddot{x} = 0$

solut. particolare: $-\frac{1}{2}gt^2$

solut. gen. dell'omogenea $x_{om.}(t) = at + b$

Solut. gen. dell'eq. di partenza è

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$$

ES 5 PENDOLO

$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x$ ← non-lineare

(solut. richiede funzioni ellittiche)

ES 6 CADUTA FRENATA

$\ddot{x} = -\beta\dot{x} - g$ ⤳ eq. omogenea associata $\ddot{x} = -\beta\dot{x}$

$v(t) \equiv \dot{x}(t)$

$\dot{v} = -\beta v$

$v(t) = \alpha e^{-\beta t}$

$x_{om.}(t) = b - \frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta t}$

$= \underline{b} + \underline{a}e^{-\beta t}$

solut. part.

$x(t) = -\frac{g}{\beta}t \equiv v_\infty t$

$-\frac{g}{\beta} \equiv v_\infty$

$$x(t) = v_\infty t + ae^{-\beta t} + b$$

$$\left(\dot{x}(t) = v_\infty - a\beta e^{-\beta t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} v_\infty\right)$$

ES 7 | OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

$\mu, \omega > 0$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu \dot{x} \quad (*)$$ eq. lin. omogenea che dip. da due parametri μ, ω

Cerchiamo soluz. particolari della forma $x(t) = e^{\lambda t}$;
qte sono soluz. se soddisfano l'eq. $(*)$:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega^2 e^{\lambda t} - 2\mu\lambda e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} = -(\omega^2 + 2\mu\lambda)\cancel{e^{\lambda t}}$$

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0$$ eq. di 2° grado in λ

$$\frac{\Delta}{4} = \mu^2 - \omega^2$$

$\mu > \omega$: GRANDE SMORZAMENTO

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} < 0 \Rightarrow$$ 2 soluz. partic. della forma $e^{\lambda t}$

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$$

$\mu < \omega$ PICCOLO SMORZAMENTO

$$x(t) = e^{-\mu t}(a \cos \sigma t + b \sin \sigma t)$$

dove $\sigma \equiv \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$

$\mu = \omega$ SMORZAMENTO CRITICO

$$x(t) = (a + bt)e^{-\mu t}$$

ES 8 | CICLO LIMITE

Eq. di Van der Pol

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \qquad \beta > 0$$

- attrito positivo per $|x| > 1$
- " negativo per $|x| < 1$

→ per moti di grande ampiezza prevale attrito positivo
⇒ ampiezza tende a ridursi

→ per moti di piccola ampiezza prevale attrito negativo
⇒ ampiezza tende ad aumentare

→ per un solo moto CRITICO i due effetti si compensano ($|x|=1$) ⇒ moto periodico

↳ CICLO LIMITE.