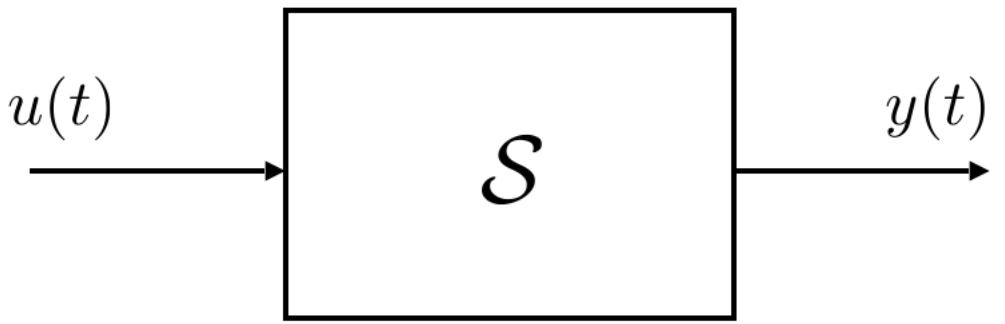
Elementi di Teoria dei Sistemi

Definizione di sistema dinamico

Sistema dinamico a tempo continuo

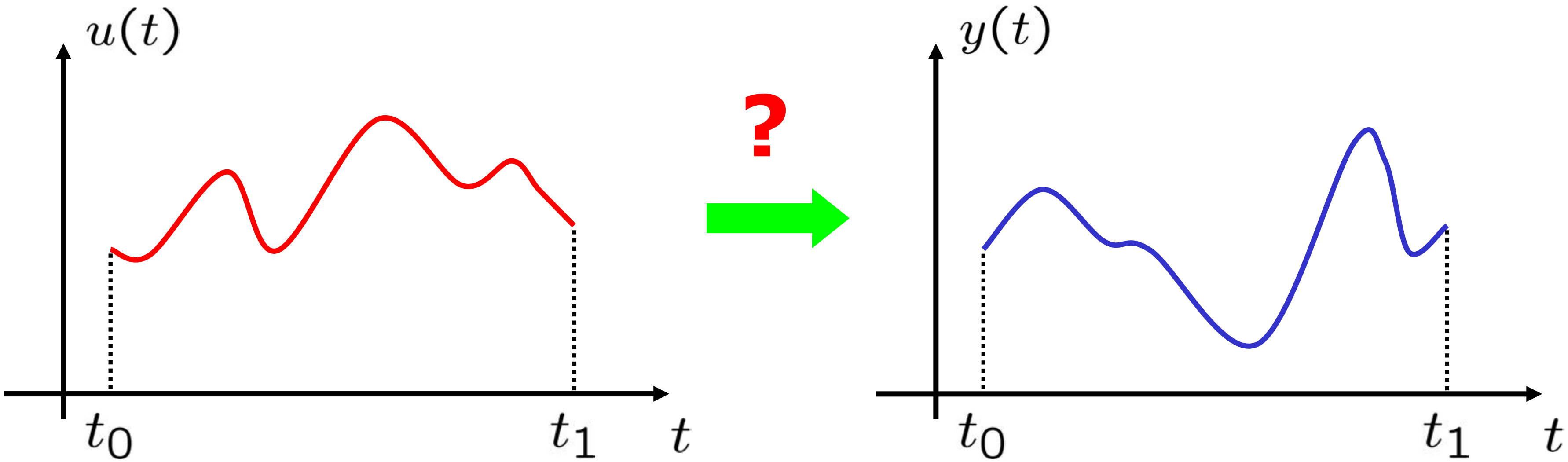


$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Ingresso

Uscita

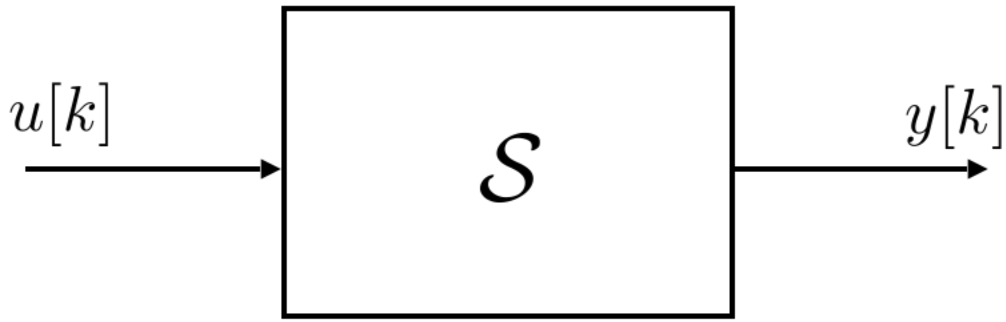
Cosa significa "Dinamico"?



$y(t)$ **e` univocamente determinata?**

Se la risposta e` no → Sistema dinamico

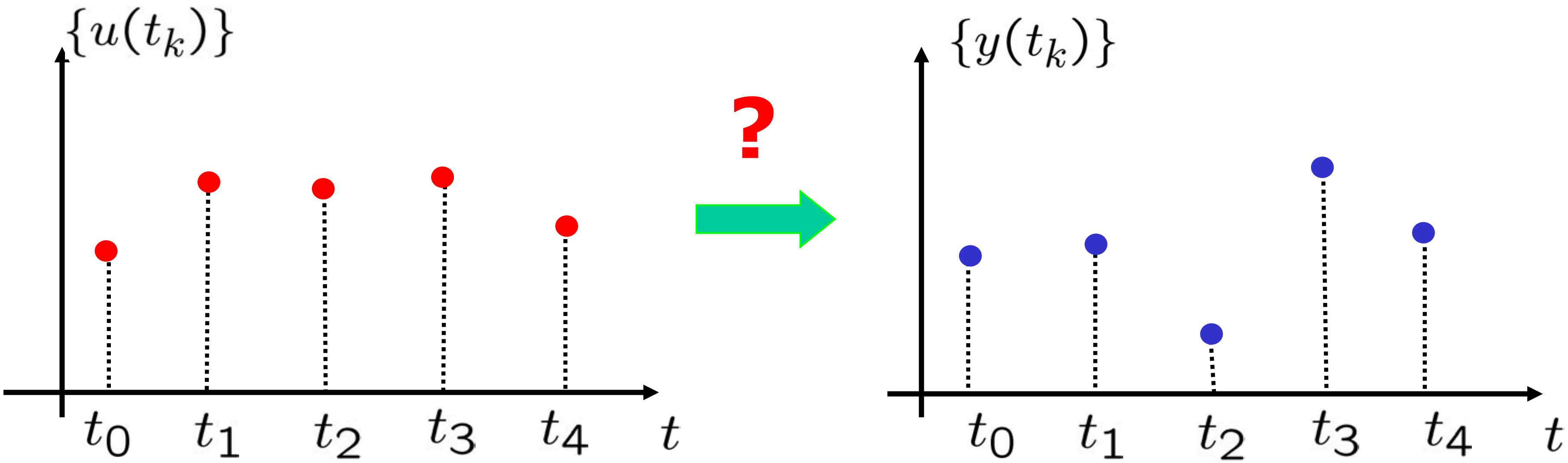
Sistema dinamico a tempo discreto



$$u[k] = \begin{bmatrix} u_1[k] \\ \vdots \\ u_m[k] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad\qquad y[k] = \begin{bmatrix} y_1[k] \\ \vdots \\ y_p[k] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

Ingresso | Uscita

Cosa significa "Dinamico"?

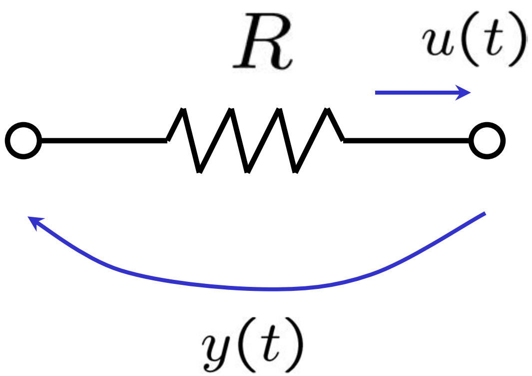


$\{y(t_k)\}$ **è univocamente determinata?**

Se la risposta è no → Sistema dinamico

La medesima definizione applicata ai sistemi dinamici a tempo continuo

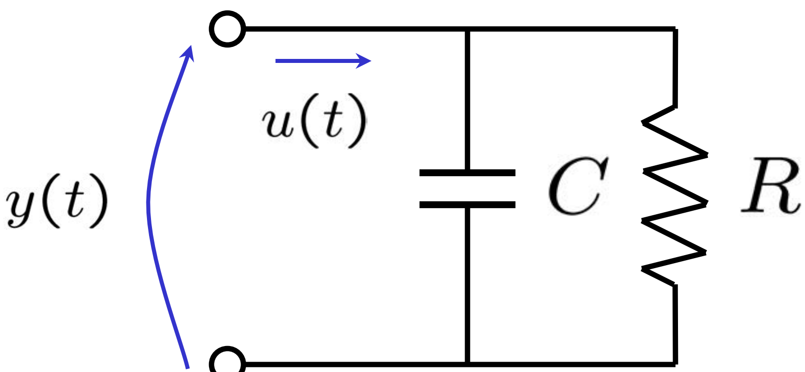
Esempio 1)



$$y(t) = R \cdot u(t)$$

Non dinamico

Esempio 2)

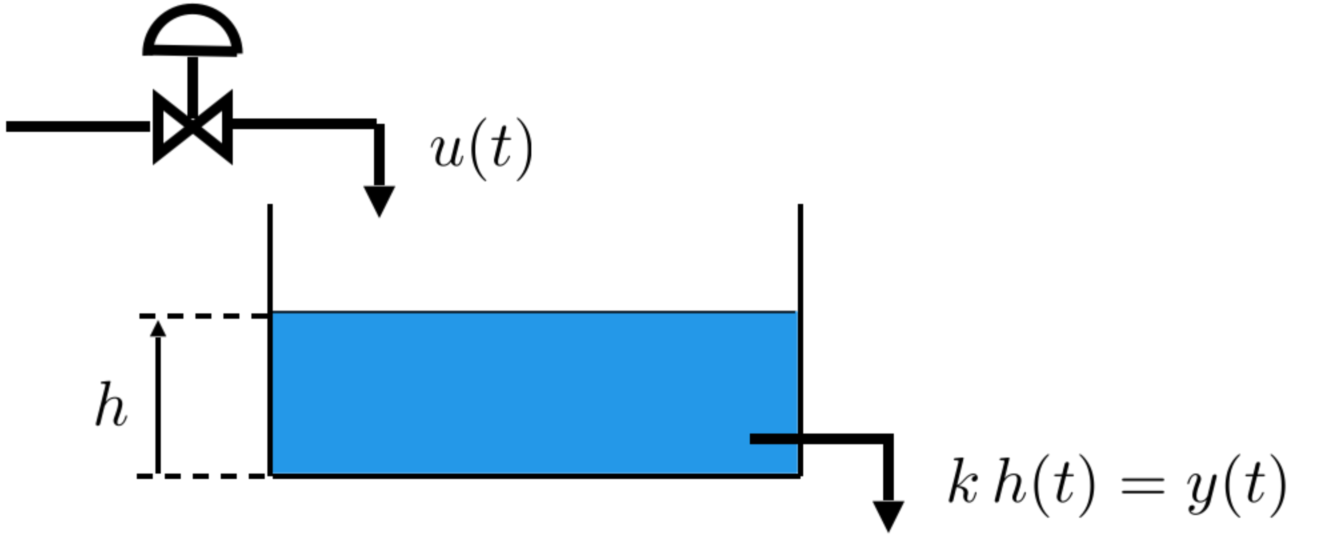


$$\left.\begin{array}{c} u(t), t \in [t_0, t_1] \\ y(t_0) \end{array}\right\}$$

$$y(t), t \in [t_0, t_1]$$

Dinamico

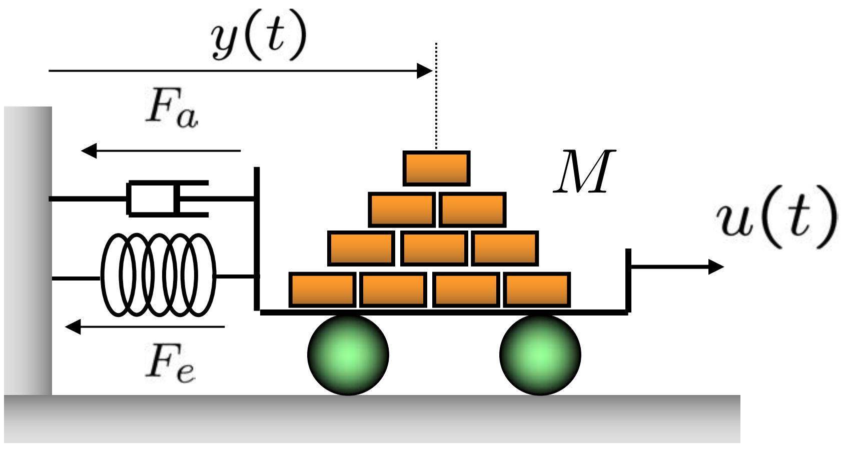
Esempio 3)



$$\left.\begin{array}{c} u(t), t \in [t_0, t_1] \\ h(t_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow y(t), t \in [t_0, t_1]$$

Dinamico

Esempio 4)



$$\left.\begin{array}{c} u(t), t \in [t_0, t_1] \\ y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y(t), t \in [t_0, t_1]$$

Dinamico

Esempio 5)

"Le spese nell'anno k sono proporzionali al reddito nell'anno k"

$$y[k] = \alpha\, u[k]$$

Non dinamico

Esempio 6)

"Le scorte di magazzino del prossimo mese sono proporzionali alle scorte attuali, alla quantità prodotta e venduta nel mese attuale"

$$\begin{cases} u[k]\,, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots p \\ y[0] \end{cases}$$

$$y[k]\,, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots p$$

Dinamico

Sistemi dinamici a tempo continuo

Analisi e proprietà

Variabili di stato

Variabili da conoscere in t_0 per determinare $y(t), t \geq t_0$

a partire da $u(t), t \geq t_0$

Ordine del sistema

$$x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(variabili di stato)

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

(vettore di stato)

Attenzione!

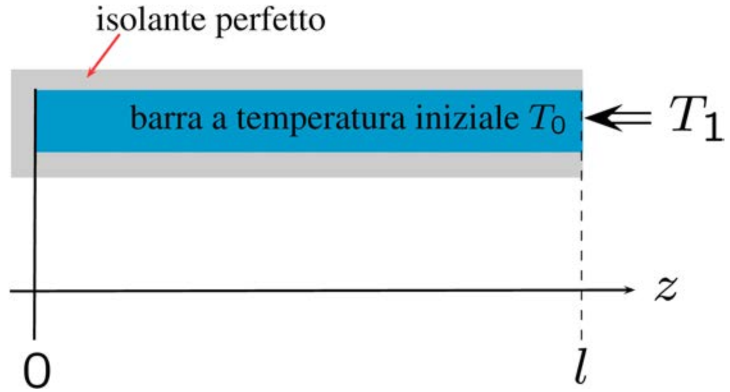
- Non tutti i sistemi dinamici a tempo continuo ammettono una rappresentazione in equazioni di stato!

- Quelli che la ammettono si dicono **sistemi a dimensione finita**, oppure **sistemi a parametri concentrati**.

- Esistono casi in cui lo stato al tempo t è costituito da una funzione di una o più variabili [non da un numero finito n di scalari!]. In tal caso si parla di sistemi a dimensione infinita, oppure a parametri distribuiti.

Esempio di sistema a parametri distribuiti

- **Diffusione del calore lungo un corpo omogeneo**: consideriamo una barra di materiale omogeneo, di lunghezza *l*, posta inizialmente a temperatura costante T_0 ed isolata come in figura



- Supponiamo poi che all'istante iniziale l'estremo della barra sia portato e mantenuto a temperatura costante T_1 ($\neq T_0$)

$$T(l,t) = T_1 \quad \forall t \geq 0$$

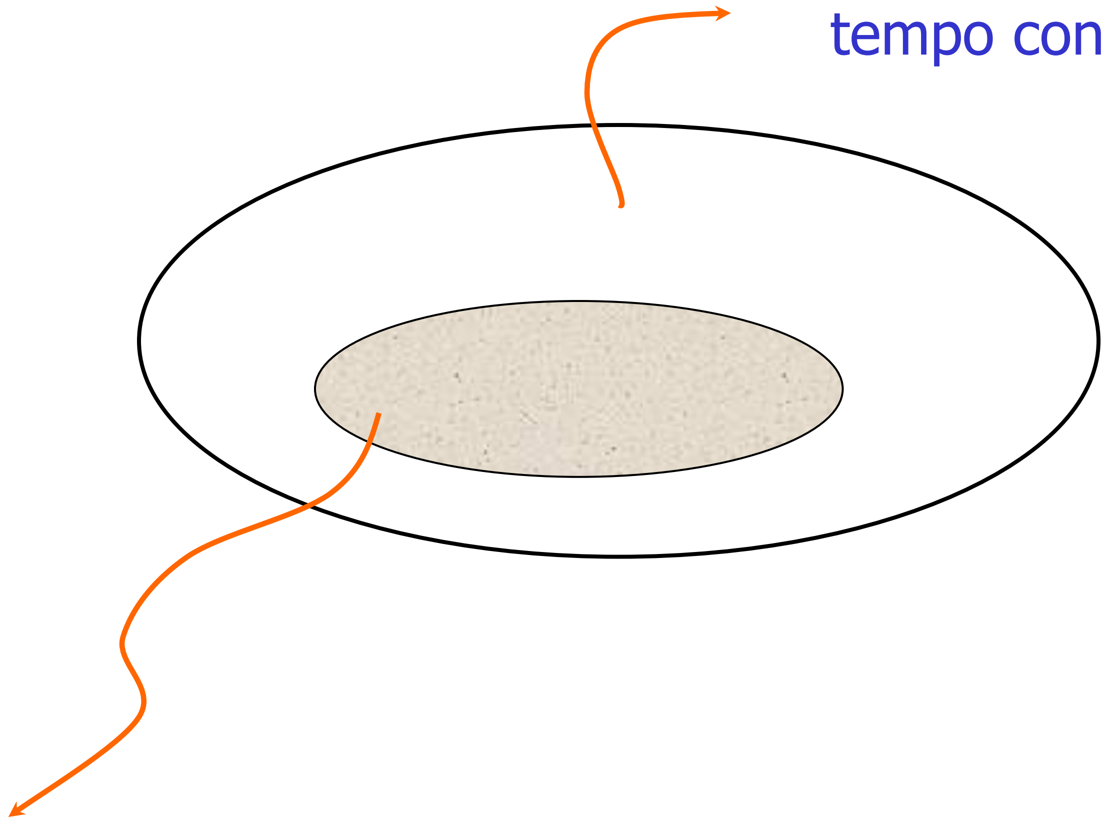
- L'equazione *a una dimensione* che descrive l'evoluzione della temperatura T(z, t) della barra, lungo la coordinata longitudinale della barra *z* all'istante *t* è del tipo:

$$\frac{\partial T(z,\,t)}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 T(z,\,t)}{\partial\, z^2} \qquad k = \frac{K}{c\,\rho}$$

dove k è la diffusività, c è il calore specifico, ρ è la massa volumica, K è la conduttività termica (equazione di Fourier o di trasmissione del calore nel caso monodimensionale).

- Se si considera T(z,t) come un vettore di cui la variabile z è l'indice, risulta evidente che **lo spazio degli stati ha dimensione infinita** non numerabile: questa è una tipica caratteristica dei sistemi descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali.

Sistemi dinamici a tempo continuo



$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f_i[x(t), u(t), t], \; i = 1, \ldots, n \\ y(t) = g[x(t), u(t), t] \end{cases}$$

Eq. di stato
Trasf. d'uscita

Usando la notazione vettoriale:

$$f[x(t),u(t),t] := \begin{bmatrix} f_1[x(t),u(t),t] \\ \vdots \\ f_n[x(t),u(t),t] \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t),u(t),t] \\ y(t) = g[x(t),u(t),t] \end{cases}$$

e per brevita` notazionale scriveremo spesso

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

Alcune importanti definizioni:

- Sistema strettamente proprio

se $g(\cdot)$ non dipende da u

- Sistema tempo-invariante (o stazionario)

se $f(\cdot), g(\cdot)$ non dipendono da t

- Sistema lineare

se $f(\cdot), g(\cdot)$ sono funzioni lineari in x, u

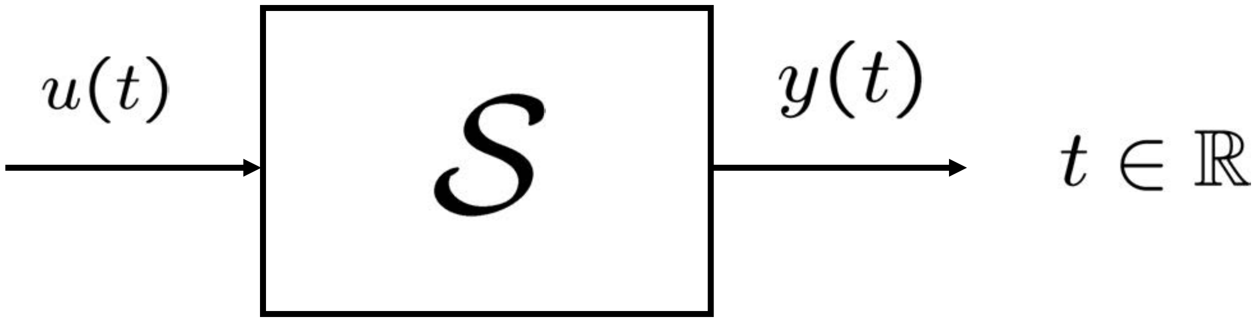
- Sistema monovariabile (SISO)

se $m = p = 1$ (1 ingresso, 1 uscita)

- Sistema multivariabile (MIMO)

se $m \neq 1$ e/o $p \neq 1$ (piu\` ingressi e/o piu\`uscite)

Sistemi dinamici a tempo continuo



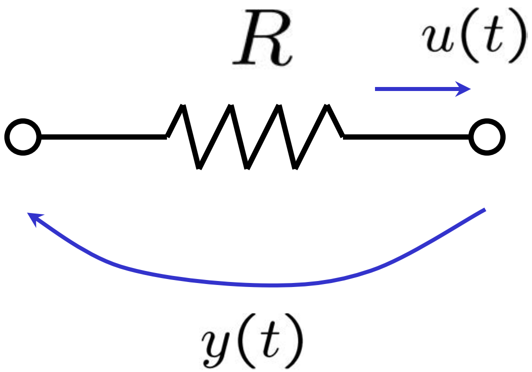
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \\ y(t) = g[x(t), u(t), t] \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato

$u(t) \in \mathbb{R}^m$ ingresso

$y(t) \in \mathbb{R}^p$ uscita

Esempio 1)



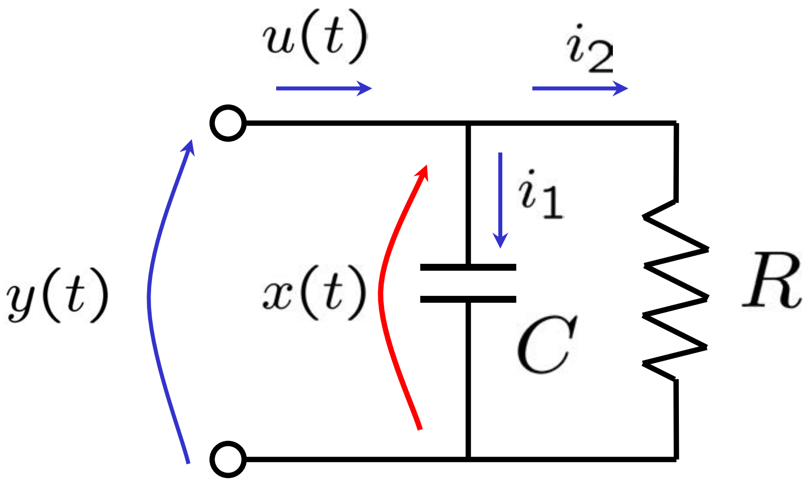
$$y(t) = R \cdot u(t)$$

Non dinamico

Non e` necessaria l'introduzione di variabili di stato

Esempio 2)

... dall'elettrotecnica



$$\begin{cases} C\dot{x} = i_1 \\ y = x = R\,i_2 \\ u = i_1 + i_2 \end{cases}$$

$$x = R\,i_2 = R\,(u - i_1)$$

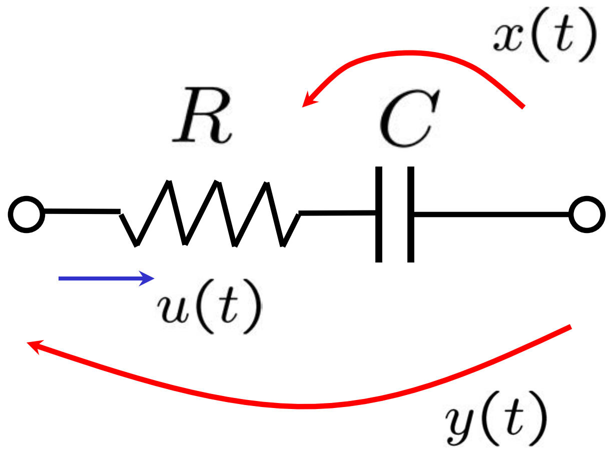
$$i_1 = u - \frac{1}{R}x$$

$$\dot{x} = \frac{1}{C}i_1 = \frac{1}{C}\left(u - \frac{1}{R}x\right)$$

- Primo ordine
- SISO
- Stazionario
- Str. proprio
- Lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{C}u = f(x,u) \\ y = x = g(x) \end{cases}$$

Esempio 2bis)



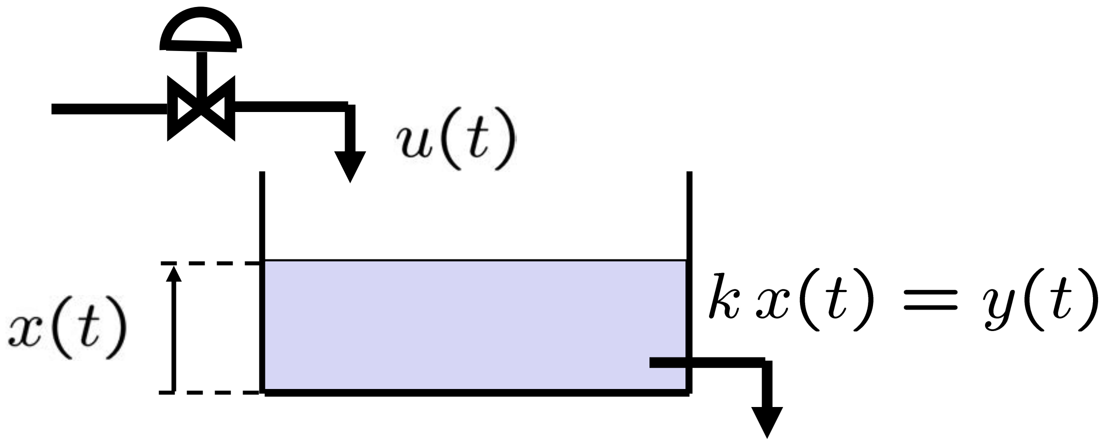
... dall'elettrotecnica

$$\begin{cases} C\dot{x} = u \\ y = x + R\,u \end{cases}$$

- Primo ordine
- SISO
- Stazionario
- Non str. proprio
- Lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{1}{C}u = f(x,u) \\ y = x + R\,u = g(x,u) \end{cases}$$

Esempio 3)



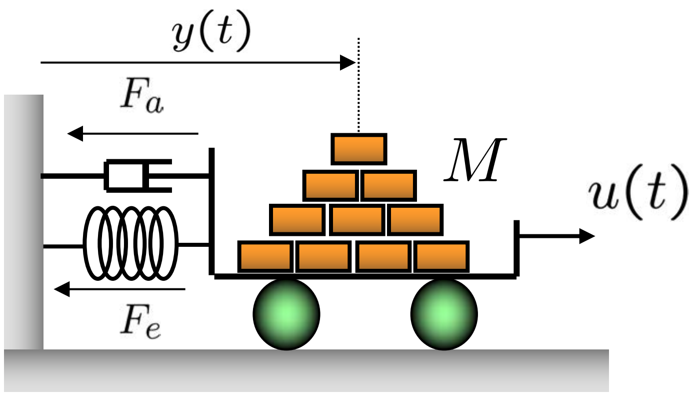
... dalla fisica

$$\begin{cases} A\,\dot{x} = u - k\,x \\ y = kx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\dfrac{k}{A}x + \dfrac{1}{A}u = f(x,u) \\ y = kx = g(x) \end{cases}$$

- Primo ordine
- SISO
- Stazionario
- Str. proprio
- Lineare

Esempio 4)



... dalla fisica

$$F_e = ky$$
$$F_a = h\dot{y}$$
$$M\ddot{y} = u - k\,y - h\dot{y}$$

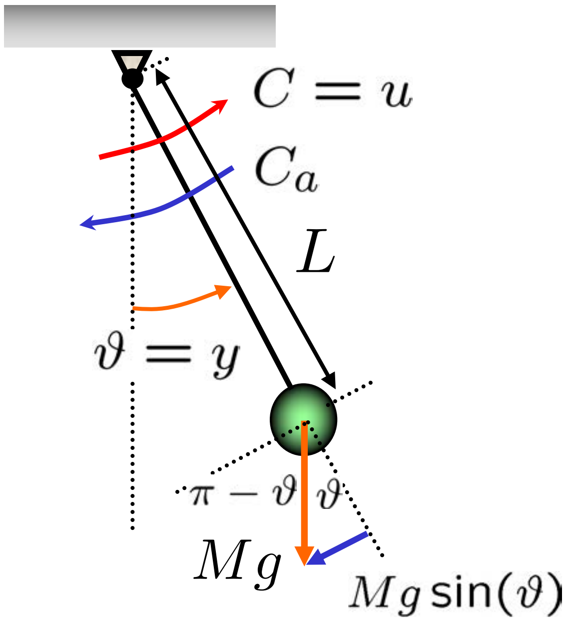
Ponendo poi

$$\begin{cases} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = -\dfrac{k}{M} x_1 - \dfrac{h}{M} x_2 + \dfrac{1}{M} u = f_2(x,u) \\ y = x_1 = g(x) \end{cases}$$

- Secondo ordine
- SISO
- Stazionario
- Str. proprio
- Lineare

Esempio 5)



… dalla fisica

$$C_a = h\dot{\vartheta}$$
$$J\ddot{\vartheta} = u - h\dot{\vartheta} - MgL\sin(\vartheta)$$
$$J = ML^2$$

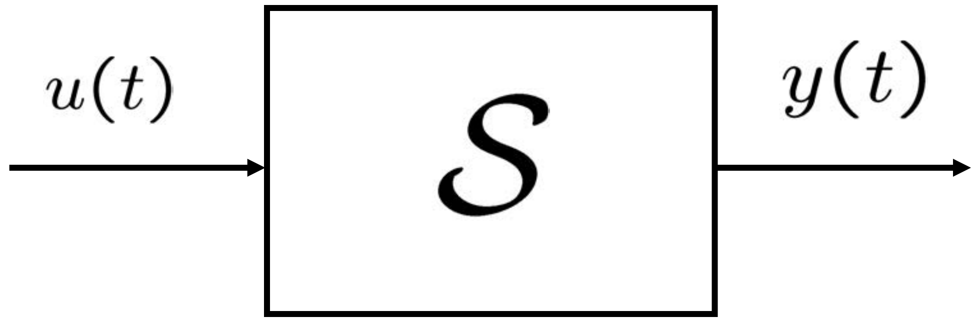
Ponendo poi

$$\begin{cases} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{\vartheta} = x_2 = f_1(x,u) \\ \dot{x}_2 = \ddot{\vartheta} = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) - \dfrac{h}{J}x_2 + \dfrac{1}{J}u = f_2(x,u) \\ y = x_1 = g(x) \end{cases}$$

- Secondo ordine
- SISO
- Stazionario
- Str. proprio
- Non lineare

Rappresentazione di stato



$t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$	stato
$u \in \mathbb{R}^m$	ingresso
$y \in \mathbb{R}^p$	uscita

Scelta delle variabili di stato

- Criteri?

- La scelta e` univoca?

- L'ordine e` fissato?

Un criterio "ingegneristico"

Variabili di stato $\Longleftrightarrow$ Grandezze associate ad accumuli di energie, massa, ecc….

- Elettrotecnica

  Tensioni sui condensatori

  Correnti negli induttori

- Meccanica

  Posizione

  Velocita`

- Termodinamica

  Temperatura

  Entalpia

Un criterio “matematico”

Supponiamo di aver ricavato dalla fisica o dall’elettrotecnica, o … un’eq. Differenziale di ordine n

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, \ldots, \frac{dy}{dt}, y, u\right)$$

Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := y \\ x_2 := \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ x_n := \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{cases}$$ e $$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi(x, u) \\ y = x_1 \end{cases}$$

Esempio

Si abbia l'eq. differenziale di ordine 3

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - y = 6u$$

Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := y \\ x_2 := \frac{dy}{dt} \\ x_3 := \frac{d^2y}{dt^2} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 3x_3 - 2x_2 + x_1 + 6u \\ y = x_1 \end{cases}$$

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = g(x, u, t) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

$$\widehat{x} = Tx, \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ \mathrm{det}(T) \neq 0$$

$$\dot{\widehat{x}} = T\dot{x} = Tf(T^{-1}\widehat{x}, u, t) =: \widehat{f}(\widehat{x}, u, t)$$

$$y = g(T^{-1}\widehat{x}, u, t) =: \widehat{g}(\widehat{x}, u, t)$$

Movimento dello stato e dell'uscita

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} t_0 \\ u(t), t \geq t_0 \\ x(t_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \overbrace{x(t), t \geq t_0}^{\text{Movimento dello stato}} \\ \underbrace{y(t), t \geq t_0}_{\text{Movimento dell'uscita}} \end{array}$$

Calcolo del Movimento

Due passi:

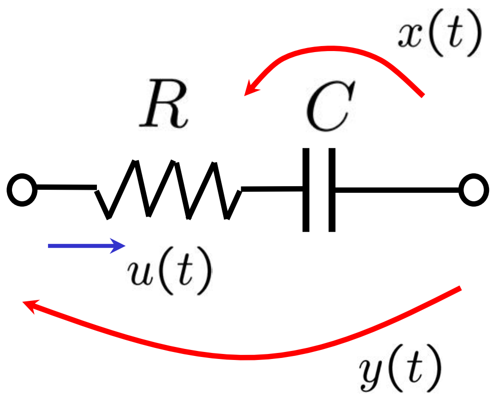
a) Integrazione eq. di stato → $x(t), t \geq t_0$

b) Sostituzione di x, u nella trasformazione d'uscita → $y(t), t \geq t_0$

Osservazione importante:

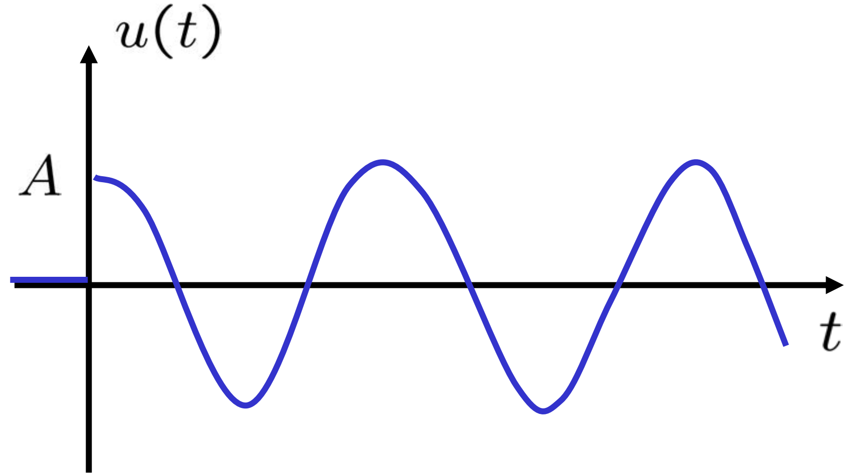
Per sistemi stazionari e` lecito assumere $t_0 = 0$ senza ledere la generalita`

Esempio



$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{C}u \\ y = x + R\,u \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$
$$u(t) = A\cos(\omega t) \cdot 1(t)$$



a) Integrazione eq. di stato:

$$x(t) = x_0 + \frac{A}{C}\int_0^t \cos(\omega\tau)d\tau =$$

$$= x_0 + \frac{A}{C}\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\Bigg|_0^t =$$

$$= x_0 + \frac{A}{C\omega}\sin(\omega t), t \geq 0$$

b) Sostituzione di x, u nella trasformazione d'uscita:

$$y(t) = x_0 + \frac{A}{C\omega}\sin(\omega t) + RA\cos(\omega t), t \geq 0$$

… con le trasf. di Laplace:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{C}u\right\} \Rightarrow sX(s) - x_0 = \frac{1}{C}U(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = x_0\frac{1}{s} + \frac{1}{sC}U(s)$$

$$= x_0\frac{1}{s} + \frac{1}{\cancel{s}C}\frac{A\cancel{s}}{s^2+\omega^2} = x_0\frac{1}{s} + \frac{A}{C}\frac{1}{s^2+\omega^2}$$

$$= x_0\frac{1}{s} + \frac{A}{\omega C}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{A}{C\omega}\sin(\omega t), t \geq 0$$

Equilibrio (sistemi stazionari)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \qquad u(t) = \bar{u}, t \geq 0$$

- Stato di equilibrio $\bar{x}$

  movimento costante di $x(t)$ con $u(t) = \bar{u}$

- Gli stati di equilibrio si trovano tutti al variare di $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

- Uscita di equilibrio $\bar{y}$

  movimento costante di $y(t)$ con $u(t) = \bar{u}$

Calcolo dell'equilibrio

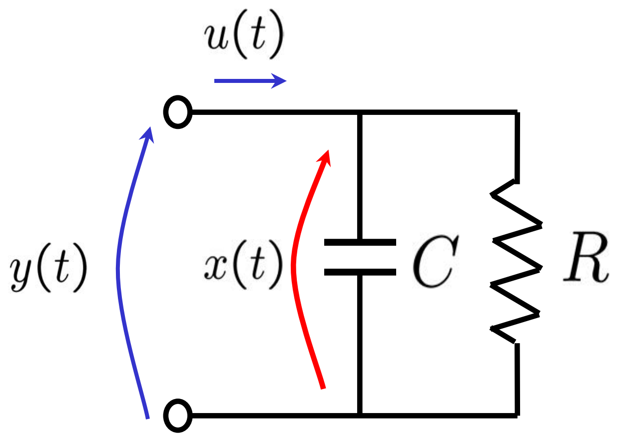
- Risolvere l'equazione algebrica

$$0 = f(x, \bar{u}) \quad \Longrightarrow \quad \bar{x}$$

- Sostituire $\bar{x}, \bar{u}$ nella trasformazione d'uscita

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

Esempio 1)



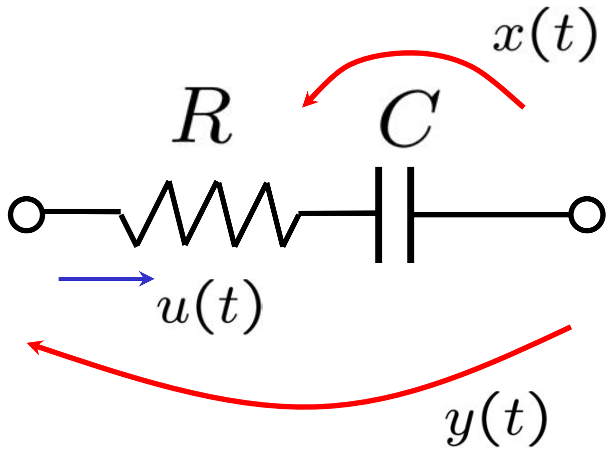
$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{1}{RC}x + \dfrac{1}{C}u \\ y = x \end{cases}$$

$$u(t) = \bar{u} \quad \Longrightarrow \quad 0 = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{C}\bar{u}$$

$$\bar{x} = R\bar{u}$$

$$\bar{y} = R\bar{u}$$

Esempio 2)



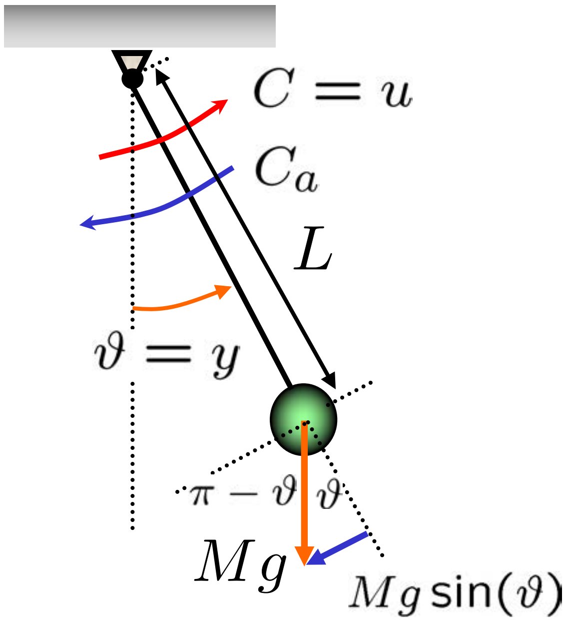
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{C}\,u \\ y = x + R\,u \end{cases}$$

$$u(t) = \bar{u} \;\Rightarrow\; 0 = \frac{1}{C}\,\bar{u}$$

se $\bar{u} = 0$ $\Rightarrow$ $\exists\ \infty\ \bar{x}$, $\exists\ \infty\ \bar{y} = \bar{x}$

se $\bar{u} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\nexists\ \bar{x}$, $\nexists\ \bar{y}$

Esempio 3)



Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

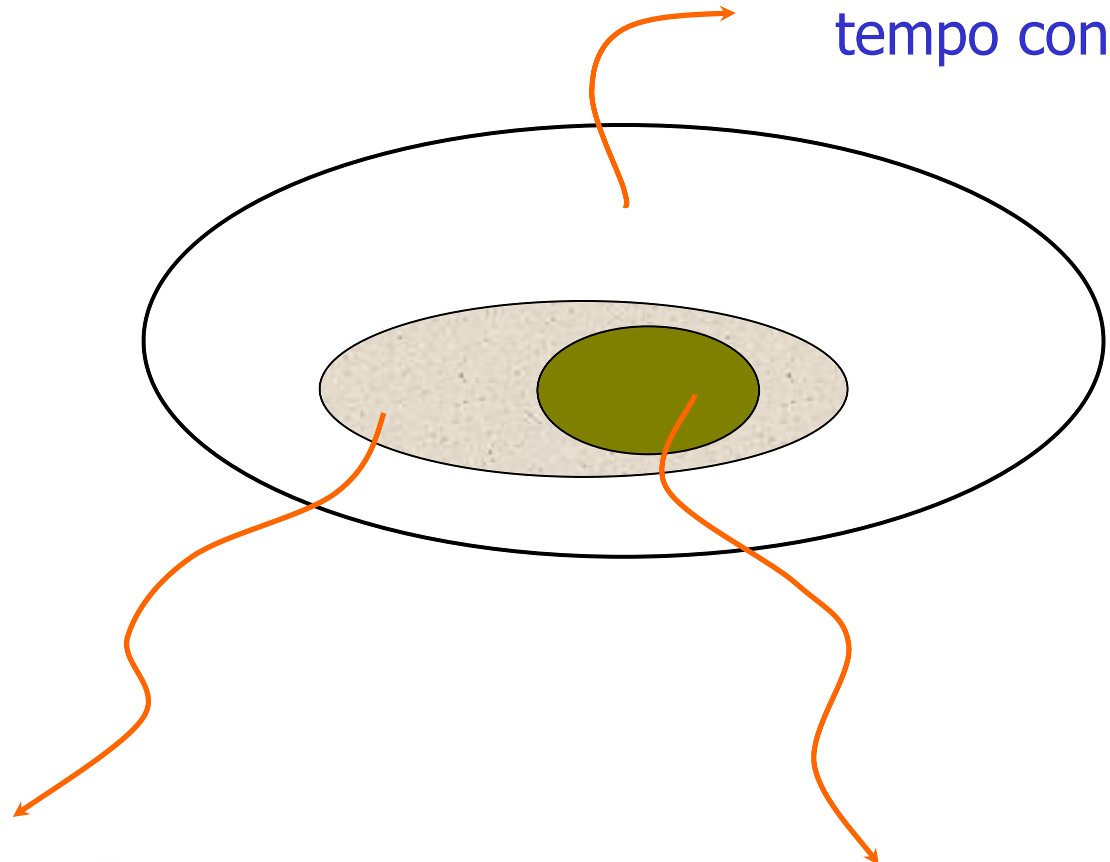
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) - \dfrac{h}{J}x_2 + \dfrac{1}{J}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$u(t) = \bar{u} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) - \dfrac{h}{J}x_2 + \dfrac{1}{J}\bar{u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \sin(\bar{x}_1) = \dfrac{1}{MgL}\bar{u} \end{cases} \xrightarrow{|\bar{u}| \leq MgL} \begin{cases} \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_1 = \arcsin\left(\dfrac{\bar{u}}{MgL}\right) \end{cases}$$

$$\exists\, \infty\ \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

Sistemi dinamici a tempo continuo



$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ y = g(x,u,t) \end{cases}$$

Sistemi dinamici
- lineari
- stazionari

Sistemi lineari stazionari SISO

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \underbrace{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u}_{} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u \\ y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n + du \end{array}\right.$$

Combinazioni lineari di variabili di stato e del controllo

Sistemi lineari stazionari SISO

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\} n \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{1} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} b \\ \vdots \\ b \end{bmatrix}}\right\} n$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} c \end{bmatrix}}\right\} 1 \qquad D = d \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad (A, B, C, D)$$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad u(t) = \bar{u}, t \geq 0$$

$$0 = Ax + B\bar{u}$$

$$Ax = -B\bar{u}$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$\det(A) = 0$$

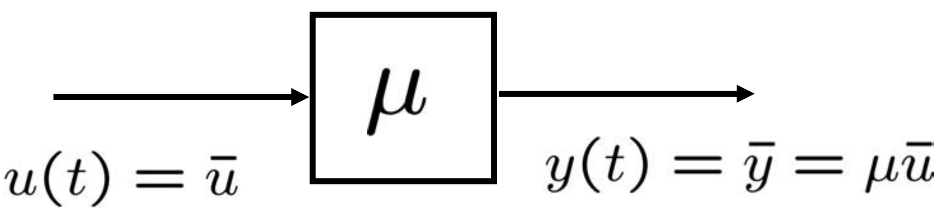
Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} \quad \Rightarrow \quad \exists\, \bar{x} \text{ unico}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = -CA^{-1}B\bar{u} + D\bar{u}$$

$$= \underbrace{\left(-CA^{-1}B + D\right)}_{\mu}\bar{u}$$

Guadagno statico



Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\exists \infty \, \bar{x} \quad \exists \infty \, \bar{y}$$

$$\det(A) = 0$$

$$\nexists \, \bar{x} \quad \nexists \, \bar{y}$$

Movimento (caso scalare - $n = 1$)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

$$x(0) = x_0$$
$$u(t), t \geq 0$$

$$\boxed{x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau}$$

Cenno di dimostrazione:

Si segue la procedura seguente: si verifica che l'espressione soddisfa l'equazione differenziale. In caso affermativo, il teo. di esist. ed unicita` ci permette di concludere la dimostrazione.

$$x(0) = x_0$$ OK!

Ricordiamo: $$\frac{d}{dt}\int_0^{r(t)} f(\tau)d\tau = \dot{r}(t)f[r(t)] + \int_0^{r(t)} \frac{d}{dt}f(\tau)d\tau$$

Quindi:

$$\dot{x}(t) = ae^{at}x_0 + bu(t) + \int_0^t ae^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$= a\underbrace{\left(e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau\right)}_{x(t)} + bu(t)$$

$$= ax(t) + bu(t)$$ OK!

… con le trasf. di Laplace:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = \mathcal{L}\{ax + bu\} \Rightarrow sX(s) - x_0 = aX(s) + bU(s)$$

$$\Rightarrow (s-a)X(s) = x_0 + bU(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s-a}x_0 + \frac{b}{s-a}U(s)$$

usando la proprieta` $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$

e la trasformata notevole $\mathcal{L}[e^{kt}1(t)] = \dfrac{1}{s-k}$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau, t \geq 0$$

Movimento (caso generale - $n > 1$)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ u(t), t \geq 0 \end{array}$$

$$\underbrace{x(t)}_{n \times 1} = \underbrace{e^{At}}_{n \times n} \underbrace{x_0}_{n \times 1} + \int_0^t \underbrace{e^{A(t-\tau)}}_{n \times n} \underbrace{B}_{n \times 1} \underbrace{u(\tau)}_{1 \times 1} d\tau$$

dove si definisce l'esponenziale di matrice

$$\underbrace{e^{At}}_{n \times n} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \cdots$$

Formule di Lagrange

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{x_l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{x_f(t)},\ t \geq 0$$

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t)$$

Movimento libero: dipende da linearmente x_0

Movimento forzato: dipende da linearmente $u(t)$

Formule di Lagrange

$$\underbrace{y(t) = Ce^{At}x_0}_{y_l(t)} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{y_f(t)},\ t \geq 0$$

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

Movimento libero: dipende da x_0 linearmente

Movimento forzato: dipende da $u(t)$ linearmente

Principio di sovrapp. degli effetti

$$\left.\begin{array}{l} x'_0 \\ u'(t), t \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x'(t), y'(t),\ t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x''_0 \\ u''(t), t \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x''(t), y''(t),\ t \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \alpha x'_0 + \beta x''_0 \\ u(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t), t \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t) = \alpha x'(t) + \beta x''(t) \\ y(t) = \alpha y'(t) + \beta y''(t) \end{array}$$

Nota: la proprieta` vale anche per sistemi non stazionari purche` lineari

Sistemi lineari stazionari MIMO

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{m} \Big\} n$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} p \qquad D = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}}_{m} \Big\} p$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{matrix} \qquad (A, B, C, D)$$

Le formule valide nel caso SISO si applicano con ovvi cambiamenti

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(T) \neq 0$

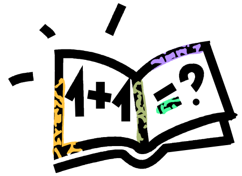
$$x = T\hat{x}, \quad \hat{x} = T^{-1}x$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = T^{-1}(Ax + Bu) = \underbrace{T^{-1}AT}_{\hat{A}}\hat{x} + \underbrace{T^{-1}B}_{\hat{B}}u \\ y = \underbrace{CT}_{\hat{C}}\hat{x} + \underbrace{D}_{\hat{D}}u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y = \hat{C}\hat{x} + Du \end{cases}$$

Notazione: $(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$

Esercizio a casa



Dati: $$(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

Mostrare che:

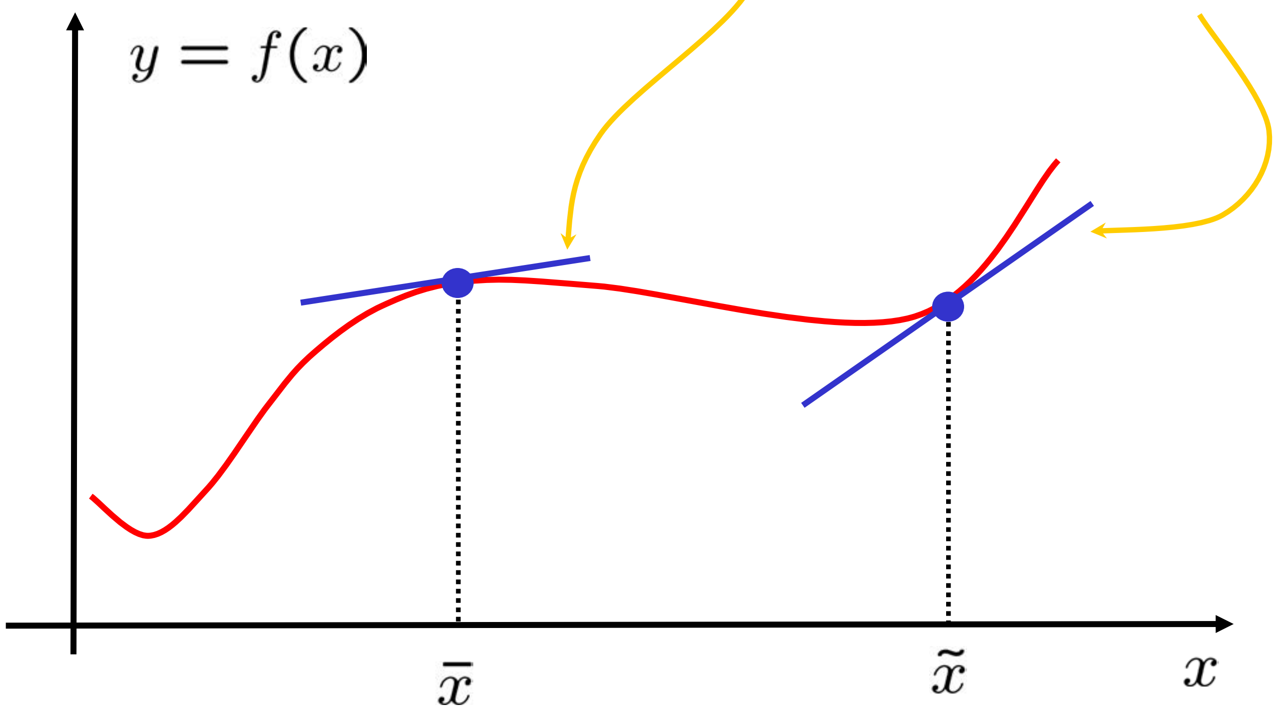
- se $\det(A) \neq 0$ il guadagno statico μ non cambia
- se $\hat{x}_0 = T x_0$ il movimento $y(t)$ non cambia

Linearizzazione

Idea di base:

Pendenza retta tangente = $f_x(\bar{x})$

Pendenza retta tangente = $f_x(\tilde{x})$



$$y(x) \simeq y(\bar{x}) + f_x(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Definiamo gli scostamenti rispetto all'equilibrio:

$$\begin{aligned} \delta u(t) &:= u(t) - \bar{u} \\ \delta x(t) &:= x(t) - \bar{x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u(t) &= \delta u(t) + \bar{u} \\ x(t) &= \delta x(t) + \bar{x} \end{aligned}$$

$$\dot{x} = \delta\dot{x} = f(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u)$$

$$\simeq \underbrace{\cancel{f(\bar{x}, \bar{u})}}_{= 0 \text{ (equilibrio)}} + f_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x + f_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u$$

$$\delta\dot{x} \simeq \underbrace{f_x(\bar{x}, \bar{u})}_{n \times n}\delta x + \underbrace{f_u(\bar{x}, \bar{u})}_{n \times m}\delta u$$

$$A \qquad\qquad B$$

dove evidentemente:

$$
f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \left. \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}}}_{n} \right\rbrace n
$$

$$
f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \left. \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\bar{x}, \bar{u}}}_{m} \right\rbrace n
$$

Vediamo la trasformazione d'uscita:

$$\delta y(t) := y(t) - \bar{y} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \delta y(t) + \bar{y}$$

$$y(t) = \cancel{\bar{y}} + \delta y = g(\bar{x} + \delta x, \bar{u} + \delta u)$$

$$\simeq \cancel{g(\bar{x}, \bar{u})} + g_x(\bar{x}, \bar{u})\delta x + g_u(\bar{x}, \bar{u})\delta u$$

$$\delta y \simeq \underbrace{g_x(\bar{x}, \bar{u})}_{\substack{p \times n \\ C}}\delta x + \underbrace{g_u(\bar{x}, \bar{u})}_{\substack{p \times m \\ D}}\delta u$$

dove:

$$g_x(\bar{x},\bar{u}) = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{n}\right\} p$$

$$g_u(\bar{x},\bar{u}) = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}}_{m}\right\} p$$

Sistema linearizzato:

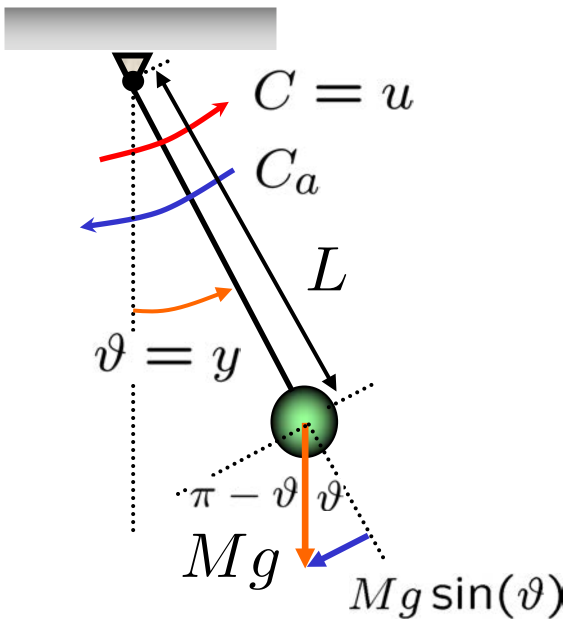
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases} \qquad 0 = f(x,\bar{u}) \longrightarrow \bar{x}$$

$$\delta\dot{x} = \underbrace{f_x(\bar{x},\bar{u})}_{A}\delta x + \underbrace{f_u(\bar{x},\bar{u})}_{B}\delta u$$

$$\delta y = \underbrace{g_x(\bar{x},\bar{u})}_{C}\delta x + \underbrace{g_u(\bar{x},\bar{u})}_{D}\delta u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

Esempio



Ponendo

$$\begin{cases} x_1 := \vartheta \\ x_2 := \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \text{e} \quad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) - \dfrac{h}{J}x_2 + \dfrac{1}{J}u \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$u(t) = \bar{u} = 0$$

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\dfrac{MgL}{J}\sin(x_1) \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J}\cos(x_1) & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} = \bar{A}$$

$$f_x(\tilde{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{MgL}{J}\cos(x_1) & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\frac{MgL}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

Poi (tutte queste quantita` non dipendono dallo stato di eq.):

$$f_u(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \bar{B}$$

$$f_u(\tilde{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} = \tilde{B}$$

$$g_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \bar{C}$$

$$g_x(\tilde{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}_{\tilde{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{C}$$

$$g_u(\bar{x},\bar{u}) = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = 0_{\bar{x},\bar{u}} = 0$$

$$g_u(\tilde{x},\bar{u}) = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\tilde{x},\bar{u}} = 0_{\tilde{x},\bar{u}} = 0$$

Sistemi dinamici a tempo discreto

Analisi e proprietà

Variabili di stato

Variabili da conoscere in k_0 per determinare $\{y[k]\},\ k \geq k_0$

a partire da $\{u[k]\},\ k \geq k_0$

Ordine del sistema

$$x_i[k],\ i = 1, 2, \ldots, n$$

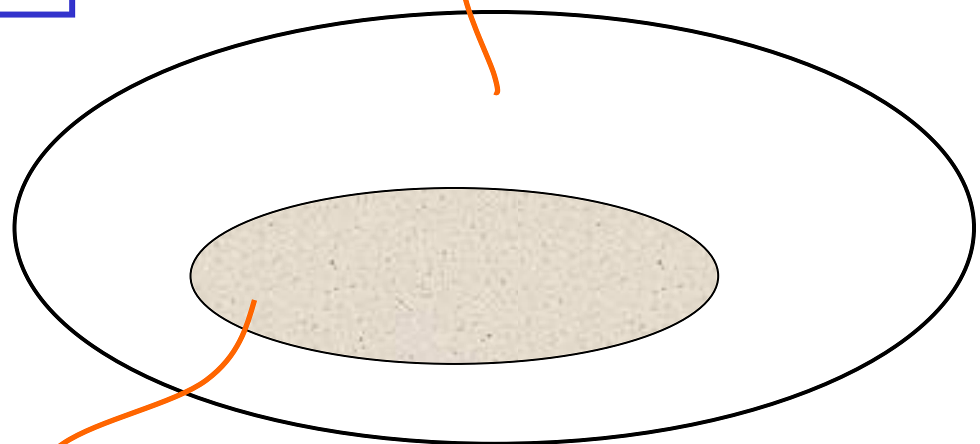
(variabili di stato)

$$x[k] = \begin{bmatrix} x_1[k] \\ \vdots \\ x_n[k] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

(vettore di stato)

Analogamente al caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

Sistemi dinamici a tempo discreto



Equazioni di stato

$$\begin{cases} x_i\,[k+1] & = & f_i\,[x[k],\, u[k],\, k]\,, i = 1,\,\ldots,\, n \\ y[k] & = & g\,[x[k],\, u[k],\, k] \end{cases}$$

Trasformazione d'uscita

Usando la notazione vettoriale:

$$f\left[x\left[k\right],\, u\left[k\right],\, k\right] := \begin{bmatrix} f_1\left[x\left[k\right],\, u\left[k\right],\, k\right] \\ \vdots \\ f_n\left[x\left[k\right],\, u\left[k\right],\, k\right] \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x\left[k+1\right] & = & f\left[x[k],\, u[k],\, k\right] \\ y[k] & = & g\left[x[k],\, u[k],\, k\right] \end{array} \right.$$

e per brevità di notazione scriveremo a volte

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & f\left[x_k,\, u_k,\, k\right] \\ y_k & = & g\left[x_k,\, u_k,\, k\right] \end{array} \right.$$

Definizioni:

Analogamente al caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

- Sistema strettamente proprio

  se $g(\cdot)$ non dipende da $u[k]$

- Sistema tempo-invariante (o stazionario)

  se $f(\cdot), g(\cdot)$ non dipendono da k

- Sistema lineare

  se $f(\cdot), g(\cdot)$ sono funzioni lineari in $x[k],\ u[k]$

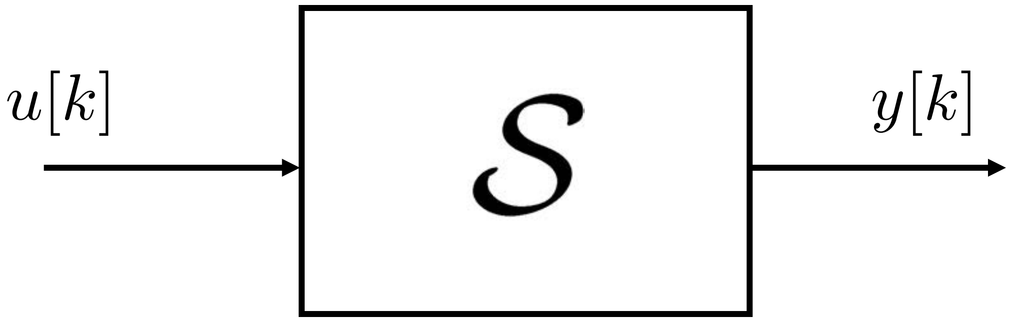
- Sistema monovariabile (SISO)

  se $m = p = 1$ (1 ingresso, 1 uscita)

- Sistema multivariabile (MIMO)

  se $m \neq 1$ e/o $p \neq 1$ (più ingressi e/o più uscite)

Sistemi dinamici a tempo discreto



$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x\left[k+1\right] & = & f\left[x[k],\, u[k],\, k\right] \\ y[k] & = & g\left[x[k],\, u[k],\, k\right] \end{array} \right.$$

$x[k] \in \mathbb{R}^n$ stato

$u[k] \in \mathbb{R}^m$ ingresso

$y[k] \in \mathbb{R}^p$ uscita

Esempio 5)

"Le spese nell'anno k sono proporzionali al reddito nell'anno k"

$$y[k] = \alpha \cdot u[k]$$

Non dinamico

Non è necessaria l'introduzione di variabili di stato

Esempio 6)

"Le scorte di magazzino del prossimo mese sono proporzionali alle scorte attuali, alla quantità prodotta e venduta nel mese attuale"

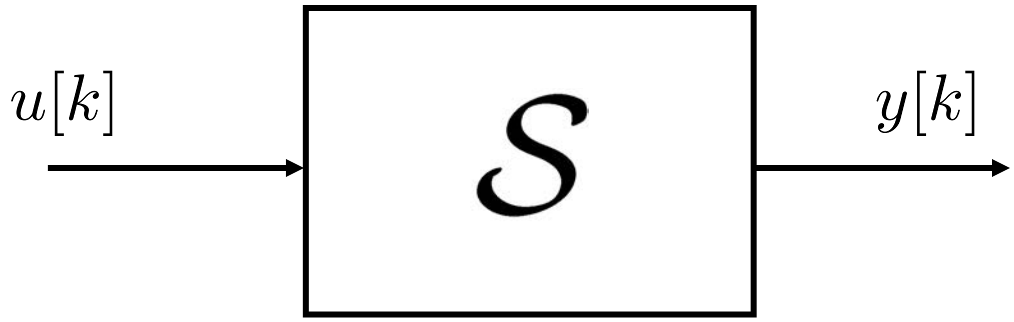
$$s[k+1] = s[k] + q[k] - v[k]$$

$$\begin{cases} x[k] &= s[k] \\ u_1[k] &= q[k] \\ u_2[k] &= v[k] \\ y[k] &= x[k] \end{cases}$$

- Primo ordine
- MIMO
- Stazionario
- Str. proprio
- Lineare

$$\begin{cases} x[k+1] &= x[k] + u_1[k] - u_2[k] = f\left(x[k],\, u[k]\right) \\ y[k] &= x[k] = g\left(x[k]\right) \end{cases}$$

Rappresentazione di stato



$k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x[k+1] = f\left[x[k],\, u[k],\, k\right] \\ y[k] = g\left[x[k],\, u[k],\, k\right] \end{cases}$$

$x[k] \in \mathbb{R}^n$ stato

$u[k] \in \mathbb{R}^m$ ingresso

$y[k] \in \mathbb{R}^p$ uscita

Scelta delle variabili di stato

- Criteri?

- La scelta è univoca?

- L’ordine è fissato?

Cfr. le considerazioni fatte per le variabili di stato dei sistemi dinamici a tempo continuo

Un criterio “ingegneristico”

Variabili di stato $\Longleftrightarrow$ Grandezze associate ad accumuli di …

Cfr. le considerazioni fatte per le variabili di stato dei sistemi dinamici a tempo continuo

Un criterio "matematico"

Supponiamo di aver ricavato un'eq. alle differenze di ordine n

$$y[k] = f\left(u[k],\, y[k-1],\, y[k-2],\, \dots,\, y[k-n]\right)$$

Associamo ai **valori passati** della successione incognita $\{y[k]\}$ le variabili di stato (*n* per la precisione) nel modo seguente

$$\begin{cases} x_1[k] & = & y[k-n] \\ x_2[k] & = & y[k-n+1] \\ x_3[k] & = & y[k-n+2] \\ & \cdots & \\ x_n[k] & = & y[k-1] \end{cases}$$

Utilizzando le variabili di stato appena definite è possibile scrivere

$$\begin{cases} x_1[k+1] &= x_2[k] \\ x_2[k+1] &= x_3[k] \\ x_3[k+1] &= x_4[k] \\ & \cdots \\ x_{n-1}[k+1] &= x_n[k] \\ x_n[k+1] &= f\left(x_1[k],\, x_2[k],\, \ldots,\, x_n[k],\, u[k]\right) \\ y[k] &= f\left(x_1[k],\, x_2[k],\, \ldots,\, x_n[k],\, u[k]\right) \end{cases}$$

Esempio

Si abbia l'eq. alle differenze di ordine 3

$$w[k] - 3w[k-1] + 2w[k-2] - w[k-3] = 6u[k]$$

Ponendo

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{cases} x_1[k] & := & w[k-3] \\ x_2[k] & := & w[k-2] \\ x_3[k] & := & w[k-1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1[k+1] & = & x_2[k] \\ x_2[k+1] & = & x_3[k] \\ x_3[k+1] & = & 3x_3[k] - 2x_2[k] + x_1[k] + 6u[k] \\ y[k] & = & 3x_3[k] - 2x_2[k] + x_1[k] + 6u[k] \end{cases}$$

Proviamo a risolvere l'eq. alle differenze a partire dall'istante k=0, con condizioni iniziali

$$w[-1] = w[-2] = w[-3] = 0$$

e come segnale {u[k]} utilizziamo un gradino unitario (sempre applicato a partire dall'istante k=0).

La sequenza {w[k]} allora è

$$\Big\{w[k]\Big\} = \Big\{6,\ 24,\ 66,\ 162,\ \ldots\Big\}$$

Proviamo a risolvere in modo ricorsivo l'eq. alle differenze utilizzando le equazioni di stato con condizioni iniziali

$$x[0] := \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_2[0] \\ x_3[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per come abbiamo definito le variabili di stato, i valori all'istante k=0 di x_1, x_2 e x_3 coincidono con i valori w[-1], w[-2], w[-3] della sequenza {w[k]}.

$$\begin{cases} x_1[k+1] &= x_2[k] \\ x_2[k+1] &= x_3[k] \\ x_3[k+1] &= 3x_3[k] - 2x_2[k] + x_1[k] + 6u[k] \\ y[k] &= 3x_3[k] - 2x_2[k] + x_1[k] + 6u[k] \end{cases}$$

$$k = 0 \implies \begin{cases} x_1[1] &= x_2[0] = 0 \\ x_2[1] &= x_3[0] = 0 \\ x_3[1] &= 3x_3[0] - 2x_2[0] + x_1[0] + 6u[0] = 6 \\ y[0] &= 3x_3[0] - 2x_2[0] + x_1[0] + 6u[0] = 6 \end{cases}$$

$$k = 1 \implies \begin{cases} x_1[2] &= x_2[1] = 0 \\ x_2[2] &= x_3[1] = 6 \\ x_3[2] &= 3x_3[1] - 2x_2[1] + x_1[1] + 6u[1] = 24 \\ y[1] &= 3x_3[1] - 2x_2[1] + x_1[1] + 6u[1] = 24 \end{cases}$$

$$k = 2 \implies \begin{cases} x_1[3] &= x_2[2] = 6 \\ x_2[3] &= x_3[2] = 24 \\ x_3[3] &= 3x_3[2] - 2x_2[2] + x_1[2] + 6u[2] = 66 \\ y[2] &= 3x_3[2] - 2x_2[2] + x_1[2] + 6u[2] = 66 \end{cases}$$

$$k = 3 \implies \begin{cases} x_1[4] &= x_2[3] = 24 \\ x_2[4] &= x_3[3] = 66 \\ x_3[4] &= 3x_3[3] - 2x_2[3] + x_1[3] + 6u[3] = 162 \\ y[3] &= 3x_3[3] - 2x_2[3] + x_1[3] + 6u[3] = 162 \end{cases}$$

$$k = 4 \implies \begin{cases} x_1[5] &= x_2[4] = 66 \\ x_2[5] &= x_3[4] = 162 \\ x_3[5] &= 3x_3[4] - 2x_2[4] + x_1[4] + 6u[4] = 414 \\ y[4] &= 3x_3[4] - 2x_2[4] + x_1[4] + 6u[4] = 414 \end{cases}$$

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\begin{cases} x[k+1] &= f\big(x[k],\, u[k],\, k\big) \\ y[k] &= g\big(x[k],\, u[k],\, k\big) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

$$\widehat{x} = Tx, \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^n, T \in \mathbb{R}^{n\times n}, \ \det(T) \neq 0$$

$$\hat{x}[k+1] = Tx[k+1] = Tf\big(T^{-1}\hat{x}[k],\, u[k],\, k\big)$$

$$\hat{x}[k+1] := \hat{f}\big(\hat{x}[k],\, u[k],\, k\big)$$

$$y[k] = g\big(T^{-1}\hat{x}[k],\, u[k], k\big) =: \hat{g}\big(\hat{x}[k],\, u[k],\, k\big)$$

Movimento dello stato e dell'uscita

$$\begin{cases} x[k+1] = f\big(x[k],\, u[k],\, k\big) \\ y[k] = g\big(x[k],\, u[k],\, k\big) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} k_0 \\ u[k],\ k \geq k_0 \\ x[k_0] \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \overbrace{x[k],\ k \geq k_0}^{\text{Movimento dello stato}} \\ \\ \underbrace{y[k],\ k \geq k_0}_{\text{Movimento dell'uscita}} \end{array}$$

Calcolo del Movimento

Due passi:

a) soluzione eq. di stato $\Rightarrow$ $x[k],\ k \geq k_0$

b) Sostituzione di x, u nella trasformazione d'uscita $\Rightarrow$ $y[k],\ k \geq k_0$

Osservazione importante:

Per sistemi stazionari è lecito assumere

$$k_0 = 0$$

senza ledere la generalità

Esempio

Vogliamo determinare il movimento dello stato per il sistema

$$\begin{cases} x[k+1] &= x[k] + u_1[k] - u_2[k] \\ y[k] &= x[k] \end{cases}$$

supponendo che

$$u_1[k] = 5 \cdot 1[k] \qquad\qquad x[0] = 10$$

$$u_2[k] = 0.5^k \cdot 1[k]$$

Utilizzo la Z-Trasformata!

$$z\Big[X(z) - x[0]\Big] = X(z) + U_1(z) - U_2(z)$$

$$X(z) = \frac{10z(z-1)(z-0.5) + 5z(z-0.5) - z(z-1)}{(z-1)^2(z-0.5)}$$

$$\Downarrow$$

$$X(z) = \frac{z\left(20z^2 - 22z + 7\right)}{(z-1)^2(2z-1)}$$

$$\Downarrow \quad \mathcal{Z}^{-1}$$

$$x[k] = \left[8 + 5k + 2\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \cdot 1[k]$$

Il movimento dell'uscita coincide con quello dello stato.

Equilibrio (sistemi stazionari)

$$\begin{cases} x[k+1] = f\big(x[k],\, u[k]\big) \\ y[k] = g\big(x[k],\, u[k]\big) \end{cases} \qquad u[k] = \bar{u},\ k \geq 0$$

- Stato di equilibrio $\bar{x}$

  ↳ movimento costante di $x[k]$ con $u[k] = \bar{u}$

- Gli stati di equilibrio si trovano tutti al variare di $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$

- Uscita di equilibrio $\bar{y}$

  ↳ movimento costante di $y[k]$ con $u[k] = \bar{u}$

Calcolo dell'equilibrio

- Risolvere l'equazione algebrica

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$$

- Sostituire $\bar{x}, \bar{u}$ nella trasformazione d'uscita

$$\Rightarrow \quad \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

Esempio 6)

Consideriamo ancora il sistema lineare MIMO

$$\begin{cases} x[k+1] & = & x[k] + u_1[k] - u_2[k] \\ y[k] & = & x[k] \end{cases}$$

Se succede che: $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$

allora $\exists \infty \, \bar{x} \quad \exists \infty \, \bar{y}$

In particolare $\bar{x} = x[0]$

Esempio 7)

Consideriamo il sistema SISO non lineare

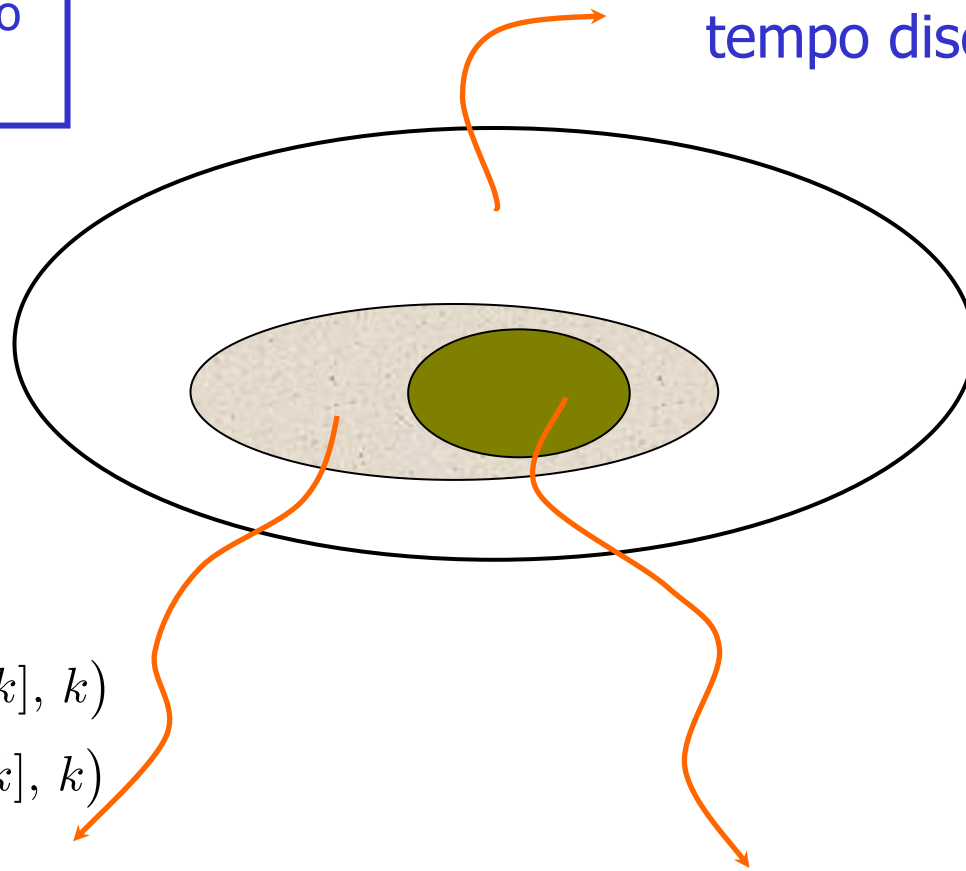
$$\begin{cases} x_1[k+1] &= x_1[k] + \alpha\left(1 - \beta x_1[k]\right) x_1[k] + \\ & \quad -\gamma x_1[k] x_2[k] + u[k] \\ x_2[k+1] &= x_2[k] - \delta x_2[k] + \eta x_1[k] x_2[k] \\ y[k] &= x_2[k] \end{cases}$$

$$\bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{\eta} \\ \dfrac{\alpha}{\gamma}\left(1 - \dfrac{\beta\,\delta}{\eta}\right) \end{bmatrix}$$

Analogamente al caso dei sistemi dinamici a tempo continuo

Sistemi dinamici a tempo discreto



$$\begin{cases} x[k+1] &= f\big(x[k],\, u[k],\, k\big) \\ y[k] &= g\big(x[k],\, u[k],\, k\big) \end{cases}$$

Sistemi dinamici a tempo discreto che ammettono equazioni di stato

Sistemi dinamici
- lineari
- stazionari

Sistemi lineari stazionari SISO

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1[k+1] & = & \underbrace{a_{1\,1}x_1[k] + a_{1\,2}x_2[k] + \cdots + a_{1\,n}x_n[k] + b_1u[k]} \\ & \vdots & \\ x_n[k+1] & = & a_{n\,1}x_1[k] + a_{n\,2}x_2[k] + \cdots + a_{n\,n}x_n[k] + b_nu[k] \\ y[k] & = & c_1x_1[k] + c_2x_2[k] + \cdots + c_nx_n[k] + du[k] \end{array}\right.$$

Combinazioni lineari di variabili di stato e del controllo

Sistemi lineari stazionari SISO

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}}\right\} n \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{1} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \end{bmatrix}}\right\} n$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix}}_{n} \Big\} 1 \qquad D = d \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \qquad (A, B, C, D)$$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases} \qquad u[k] = \bar{u}\,, \; k \geq 0$$

$$x = Ax + B\bar{u}$$

$$(I - A)x = B\bar{u}$$

$$\det(I - A) \neq 0$$

$$\det(I - A) = 0$$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$\det(I - A) \neq 0 \Rightarrow \bar{x} = (I - A)^{-1} B\bar{u} \Rightarrow \exists\, \bar{x}$ unico

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = C(I - A)^{-1} B\bar{u} + D\bar{u}$$

$$= \underbrace{\left[C\,(I - A)^{-1}\,B + D\right]}_{\mu}\,\bar{u}$$

Guadagno statico

$u[k] = \bar{u}$

$y[k] = \bar{y} = \mu\bar{u}$

Equilibrio (sistemi lineari stazionari)

$$\det(I - A) = 0$$

$$\exists\, \infty\, \bar{x} \quad \exists\, \infty\, \bar{y}$$

$$\nexists\, \bar{x} \quad \nexists\, \bar{y}$$

Movimento (caso scalare - $n = 1$)

$$\begin{cases} x[k+1] = ax[k] + bu[k] & x[0] = x_0 \\ y[k] = cx[k] + du[k] & u[k]\,,\ k \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x[k] = a^k x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} b\, u[i]}$$

Cenno di dimostrazione:

Per semplice sostituzione, partendo da $x[0] = x_0$

Ricordiamo: $x[k+1] = ax[k] + bu[k]$

Quindi:

$$x[1] = ax[0] + bu[0]$$

$$x[2] = ax[1] + bu[1] = a^2x[0] + abu[0] + bu[1]$$

$$x[3] = \cdots = a^3x[0] + a^2bu[0] + abu[1] + bu[2]$$

$$\cdots$$

$$x[k] = a^k x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} b\, u[i]$$

… con le Z-trasformate:

$$\mathcal{Z}\{x[k+1]\} = \mathcal{Z}\{ax[k] + bu[k]\}$$

$$zX(z) - zx[0] = aX(z) + bU(z)$$

$$(z-a)\,X(z) = zx[0] + bU(z)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-a}x[0] + \frac{b}{z-a}U(z)$$

usando la proprietà $\mathcal{Z}\left\{f[k] * g[k]\right\} = F(z) \cdot G(z)$

e la trasformata notevole $\mathcal{Z}\left\{a^k \cdot 1[k]\right\} = \dfrac{z}{z-a}$

$$\mathcal{Z}^{-1} \quad x[k] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = a^k x[0] + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu[i]\,,\ k \geq 0$$

Movimento (caso generale - $n > 1$)

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] & x[0] = x_0 \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] & u[k]\,,\ k \geq 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{x[k]}_{n\times 1} = \underbrace{A^k}_{n\times n}\underbrace{x_0}_{n\times 1} + \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{A^{k-i-1}}_{n\times n}\underbrace{B}_{n\times 1}\underbrace{u[i]}_{1\times 1}$$

Lo si confronti con l'analogo risultato per i sistemi dinamici lineari tempo-invarianti a tempo continuo

Movimento dello stato

$$x[k] = \underbrace{A^k x_0}_{x_l[k]} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u[i]}_{x_f[k]}$$

$$x[k] = x_l[k] + x_f[k]$$

Movimento libero: dipende da x_0 linearmente

Movimento forzato: dipende da $u[k]$ linearmente

Movimento dell’uscita

$$\underbrace{y[k] = CA^k x_0}_{y_l[k]} + \underbrace{C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu[i] + Du[k]}_{y_f[k]}$$

$$y[k] = y_l[k] + y_f[k]$$

Movimento libero: dipende da x_0 linearmente

Movimento forzato: dipende da $u[k]$ linearmente

Principio di sovrapp. degli effetti

$$\left.\begin{array}{l} x'_0 \\ u'[k]\,,\ k \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x'[k]\,,\ y'[k]\,, \quad k \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x''_0 \\ u''[k]\,,\ k \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x''[k]\,,\ y''[k]\,, \quad k \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \alpha x'_0 + \beta x''_0 \\ u[k] = \alpha u'[k] + \beta u''[k]\,,\ k \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x[k] = \alpha x'[k] + \beta x''[k] \\ y[k] = \alpha y'[k] + \beta y''[k] \end{array}$$

Nota: la proprietà vale anche per sistemi non stazionari purché lineari.

Sistemi lineari stazionari MIMO

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n \qquad B = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}}_{m} \Big\} n$$

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} p \qquad D = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}}_{n} \Big\} p$$

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array} \quad (A, B, C, D)$$

Le formule valide nel caso SISO si applicano con ovvi cambiamenti.

Rappresentazioni di stato equivalenti

$$\left\{\begin{array}{rcl} x[k+1] & = & Ax[k]+Bu[k] \\ y[k] & = & Cx[k]+Du[k] \end{array}\right.$$

$$T \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det(T) \neq 0$$

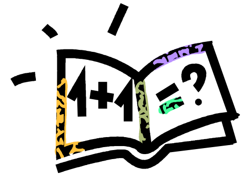
$$\hat{x} = Tx, \quad x = T^{-1}\hat{x}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \hat{x}[k+1] & = & T\Big(Ax[k]+Bu[k]\Big) = \underbrace{TAT^{-1}}_{\hat{A}}\hat{x}[k]+\underbrace{TB}_{\hat{B}}u[k] \\ y[k] & = & \underbrace{CT^{-1}}_{\hat{C}}\hat{x}[k]+\underbrace{D}_{\hat{D}}u[k] \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x[k+1] & = & Ax[k]+Bu[k] \\ y[k] & = & Cx[k]+Du[k] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \hat{x}[k+1] & = & \hat{A}\hat{x}[k]+\hat{B}u[k] \\ y[k] & = & \hat{C}\hat{x}[k]+\hat{D}u[k] \end{array}\right.$$

Notazione: $(A,B,C,D) \sim (\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$

Esercizio “per casa”



Considerare due descrizioni in equazioni di stato equivalenti per un sistema dinamico lineare a tempo discreto

$$(A, B, C, D) \sim (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

Mostrare che:

- se $\det(I - A) \neq 0$ il guadagno statico μ non cambia

- se $\hat{x}_0 = T x_0$ il movimento $y[k]$ non cambia

Linearizzazione

Idea di base: vogliamo studiare il comportamento di un sistema dinamico a tempo discreto, non lineare, nell'intorno di una condizione d'equilibrio, descritta da

$$\begin{cases} x[k+1] = f\big(x[k],\, u[k]\big) \\ y[k] = g\big(x[k],\, u[k]\big) \end{cases}$$

$$u[k] = \bar{u}\,, \;\; k \geq 0$$

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$$

$$y(x) \simeq y(\bar{x}) + f_x(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Definiamo gli scostamenti rispetto all'equilibrio:

$$\delta u[k] := u[k] - \bar{u} \qquad \Rightarrow \qquad u[k] = \delta u[k] + \bar{u}$$

$$\delta x[k] := x[k] - \bar{x} \qquad \Rightarrow \qquad x[k] = \delta x[k] + \bar{x}$$

$$x[k+1] = \delta x[k+1] + \bar{x} = f\Big(\bar{x} + \delta x[k]\,,\ \bar{u} + \delta u[k]\Big)$$

$$\delta x[k+1] + \cancel{\bar{x}} \simeq \underbrace{\cancel{f(\bar{x}\,,\ \bar{u})}}_{= \bar{x} \text{ (equilibrio)}} + f_x(\bar{x}\,,\ \bar{u}) \cdot \delta x[k] + f_u(\bar{x}\,,\ \bar{u}) \cdot \delta u[k]$$

$$\delta x[k+1] \simeq \underbrace{f_x(\bar{x}\,,\ \bar{u})}_{\substack{n \times n \\ A}} \cdot \delta x[k] + \underbrace{f_u(\bar{x}\,,\ \bar{u})}_{\substack{n \times m \\ B}} \cdot \delta u[k]$$

dove evidentemente:

$$f_x(\bar{x}, \bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}}_{n}{}_{\bar{x}, \bar{u}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \end{bmatrix}}\right\} n$$

$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}}_{m}{}_{\bar{x}, \bar{u}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} \end{bmatrix}}\right\} n$$

Vediamo la trasformazione d' uscita:

$$\delta y[k] := y[k] - \bar{y} \quad \Rightarrow \quad y[k] = \delta y[k] + \bar{y}$$

$$y[k] = \delta y[k] + \bar{y} = g\Big(\bar{x} + \delta x[k]\,,\ \bar{u} + \delta u[k]\Big)$$

$$\delta y[k] + \cancel{\bar{y}} \simeq \cancel{g(\bar{x}\,,\ \bar{u})} + g_x(\bar{x}\,,\ \bar{u}) \cdot \delta x[k] + g_u(\bar{x}\,,\ \bar{u}) \cdot \delta u[k]$$

$$\delta y[k] \simeq \underbrace{g_x(\bar{x}\,,\ \bar{u})}_{\substack{p \times n \\ C}} \cdot \delta x[k] + \underbrace{g_u(\bar{x}\,,\ \bar{u})}_{\substack{p \times m \\ D}} \cdot \delta u[k]$$

dove:

$$g_x(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{array}\right]_{\bar{x},\bar{u}}}_{n} \left.\vphantom{\begin{array}{c}\dfrac{a}{b}\\ \vdots \\ \dfrac{a}{b}\end{array}}\right\} p$$

$$g_u(\bar{x},\bar{u}) = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{array}\right]_{\bar{x},\bar{u}}}_{m} \left.\vphantom{\begin{array}{c}\dfrac{a}{b}\\ \vdots \\ \dfrac{a}{b}\end{array}}\right\} p$$

Sistema linearizzato:

$$\begin{cases} x[k+1] = f\big(x[k],\, u[k]\big) \\ y[k] = g\big(x[k],\, u[k]\big) \end{cases} \qquad x = f(x, \bar{u}) \;\Rightarrow\; \bar{x}$$

$$\delta x[k+1] \simeq \underbrace{f_x(\bar{x}\,,\; \bar{u})}_{A} \cdot \delta x[k] + \underbrace{f_u(\bar{x}\,,\; \bar{u})}_{B} \cdot \delta u[k]$$

$$\delta y[k] \simeq \underbrace{g_x(\bar{x}\,,\; \bar{u})}_{C} \cdot \delta x[k] + \underbrace{g_u(\bar{x}\,,\; \bar{u})}_{D} \cdot \delta u[k]$$

$$\begin{cases} \delta x[k+1] = A\,\delta x[k] + B\,\delta u[k] \\ \delta y[k] = C\,\delta x[k] + D\,\delta u[k] \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \delta x \in \mathbb{R}^n \\ \delta u \in \mathbb{R}^m \\ \delta y \in \mathbb{R}^p \end{array}$$

Esempio

Consideriamo ancora il sistema SISO non lineare

$$\begin{cases} x_1[k+1] &= x_1[k] + \alpha\left(1 - \beta x_1[k]\right) x_1[k] + \\ & \quad -\gamma x_1[k] x_2[k] + u[k] \\ x_2[k+1] &= x_2[k] - \delta x_2[k] + \eta x_1[k] x_2[k] \\ y[k] &= x_2[k] \end{cases}$$

$$\bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u} = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\eta} \\ \frac{\alpha}{\gamma}\left(1 - \frac{\beta\delta}{\eta}\right) \end{bmatrix}$$

Determiniamo le espressioni dei sistemi linearizzati in corrispondenza dell'ingresso e degli stato d'equilibrio considerati.

Quindi:

$$f_x(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1+\alpha-2\alpha\beta x_1-\gamma x_2) & -\gamma x_1 \\ \eta x_2 & 1-\delta+\eta x_1 \end{bmatrix}_{\bar{x},\bar{u}}$$

$$\bar{x}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A}_{(1)} = \begin{bmatrix} (1+\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\delta \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{A}_{(2)} = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & -\dfrac{\gamma}{\beta} \\ 0 & 1-\delta+\dfrac{\eta}{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_{(3)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{\eta} \\ \dfrac{\alpha}{\gamma}\left(1-\dfrac{\beta\delta}{\eta}\right) \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_{(3)} = \begin{bmatrix} \left(1-\dfrac{\alpha\beta\delta}{\eta}\right) & -\dfrac{\gamma\delta}{\eta} \\ \dfrac{\alpha\eta}{\gamma}\left(1-\dfrac{\beta\delta}{\eta}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Poi (tutte queste quantità non dipendono dallo stato di eq.):

$$f_u(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] = \bar{B}$$

$$g_x(\bar{x}, \bar{u}) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right]_{\bar{x}, \bar{u}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \right] = \bar{C}$$

$$g_u(\bar{x}, \bar{u}) = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} = 0_{\bar{x}, \bar{u}} = 0 = \bar{D}$$