

# Trasformate di Laplace

**Utilizzo nello studio dei sistemi dinamici**

# Trasformate di Laplace

Importanza dei modelli dinamici

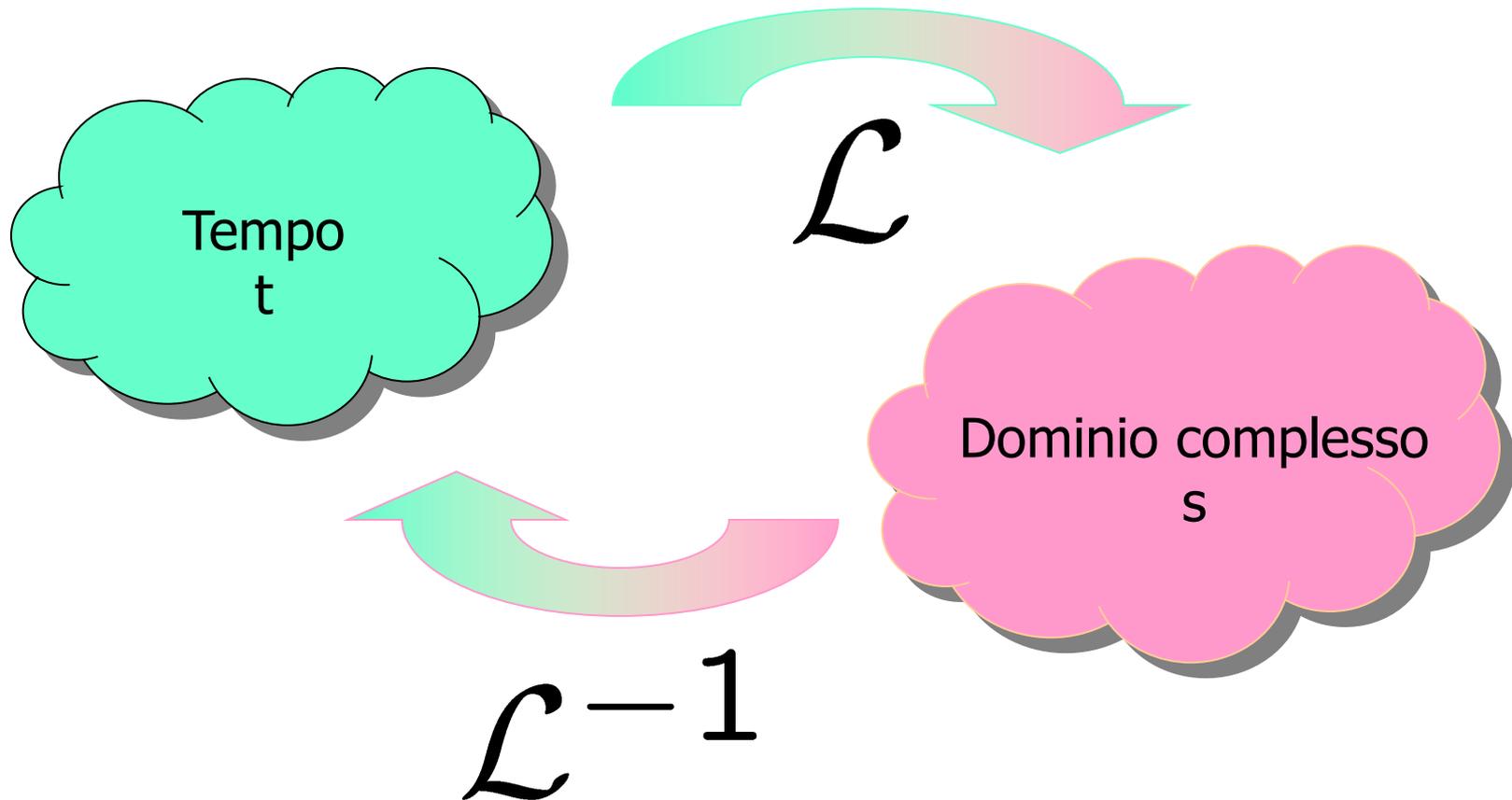


Risolvere equazioni differenziali (lineari a coefficienti costanti)



Metodi per risolverle ???

# La trasformata di Laplace è un OPERATORE funzionale



## Definizione: segnale causale

Si definisce **segnale causale** una **funzione** dipendente dal tempo (tempo continuo) che ha la proprietà

$$f(t) \equiv 0 \implies \forall t < 0$$

cioè una **funzione** che sia **identicamente nulla** per ogni istante di tempo che precede l'istante iniziale  $t = 0$

Esempi:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \implies \forall t < 0 \\ 3.25 \sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right) & \implies \forall t \geq 0 \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \implies \forall t < 0 \\ 1 & \implies \forall t \geq 0 \end{cases}$$

## Definizione: trasformata di Laplace

Si considerano **funzioni causali** (non id. nulle solo per  $t \geq 0$ )  
**continue a tratti**, senza comportamento impulsivo per  $t = 0$   
 Si definisce trasformata di Laplace

$$\mathcal{L} [f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

$$s = \sigma + j\omega \quad \text{Re}(s) > \bar{\sigma}$$

Funzioni del  
tempo



Funzioni  
complesse

## Perchè queste trasformate sono utili?



- 1. Hanno molte proprietà che aiutano a risolvere le equazioni differenziali ed integro/differenziali**
- 2. Le trasformate si calcolano facilmente con delle trasformate di funzioni "notevoli"**

# Proprietà

1. Linearità :

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)]$$

2. Trasformata dell'integrale:  $f(t) \longrightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} F(s)$$

# Proprietà

3. Trasformata della derivata:  $f(t)$ ,  $f'(t)$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s F(s) - f(0)$$



Derivate di ordine "n"

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^k(0)$$

# Proprietà

4. Traslazione in frequenza: se  $k \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[e^{kt} f(t)] = F(s - k)$$

5. Traslazione nel tempo:

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s)$$

# Proprietà

## 6. Cambiamento di scala nei tempi

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+$$

## 7. Moltiplicazione per $t^n$ :

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

# Proprietà

Def: integrale di convoluzione con  $f, g$  non nulle per  $t \geq 0$

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

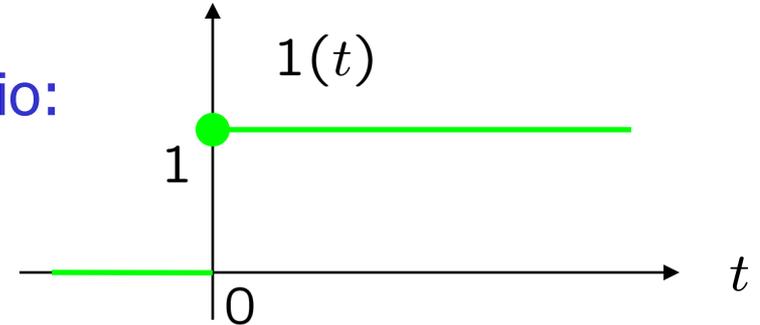
8. Si dimostra che:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$$

# Trasformate notevoli

1. Trasformata del gradino unitario:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \forall t < 0 \\ 1 & \Rightarrow \forall t \geq 0 \end{cases}$$

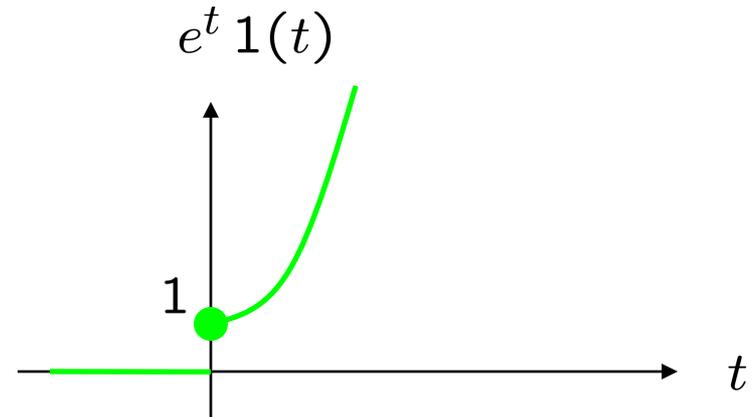


$$\mathcal{L}[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1(t) e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

# Trasformate notevoli

2. Trasformata  
dell'esponenziale  $e^t 1(t)$  :

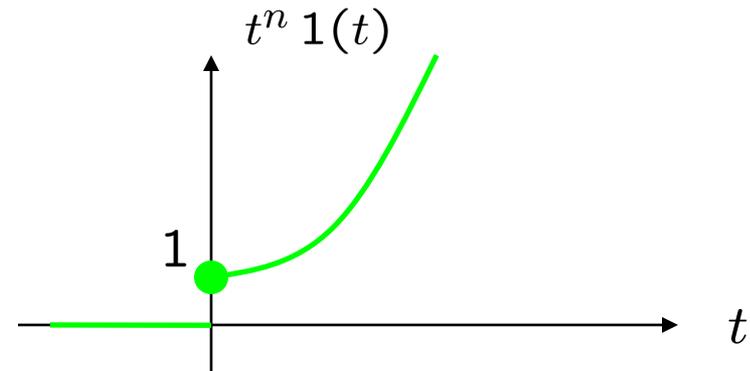


$$\mathcal{L}[e^{kt} 1(t)] = \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} dt$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(k-s)t} dt = \frac{1}{k-s} [e^{(k-s)t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{s-k}$$

# Trasformate notevoli

3. Trasformata di  $t^n 1(t)$ :

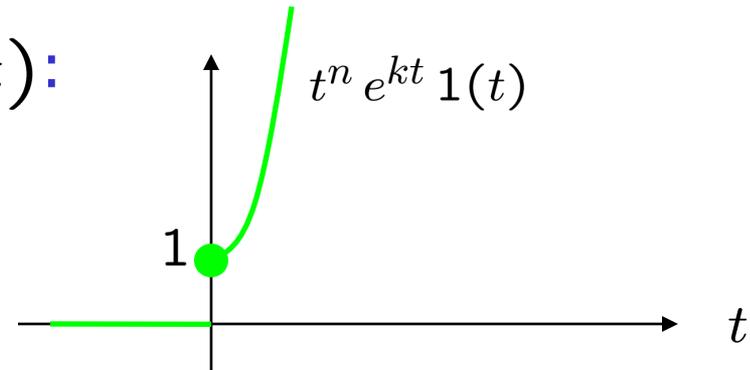


$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n 1(t)] &= (-1)^n \left\{ (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

...basta applicare la proprieta' di moltiplicazione per  $t^n$  ...

# Trasformate notevoli

4. Trasformata di  $t^n e^{kt} \mathbf{1}(t)$ :



$$\mathcal{L}[t^n e^{kt} \mathbf{1}(t)] = \frac{n!}{(s - k)^{n+1}}$$

...basta ricordare le proprietà di moltiplicazione per  $t^n$  e di traslazione in frequenza...

# Trasformate notevoli

Trasformata di  $\sin(\omega t)$  e di  $\cos(\omega t)$

...ricordiamo le formule di Eulero...

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$

$$e^{-j\phi} = \cos \phi - j \sin \phi$$

# Trasformate notevoli

5. Trasformata di  $\sin(\omega t) 1(t)$  :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[ \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \cdot 1(t) \right] &= \frac{1}{2j} \left\{ \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

# Trasformate notevoli

6. Trasformata di  $\cos(\omega t) 1(t)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \cdot 1(t)\right] &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

# Applicazione:

Vogliamo risolvere l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{dt} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y(t) = (1 + 3t) \cdot 1(t)$$

Con condizioni iniziali:

$$y(0) = 1 \quad \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

Applichiamo le proprietà viste:

$$\{s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)\} + \{3 [s Y(s) - y(0)]\} + \dots$$

$$\dots + 2 Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$\{s^2 Y(s) - s\} + \{3 [s Y(s) - 1]\} + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - s - 3 = \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2}$$

Si e' ottenuta un'equazione algebrica da cui esplicitare  $Y(s)$  :

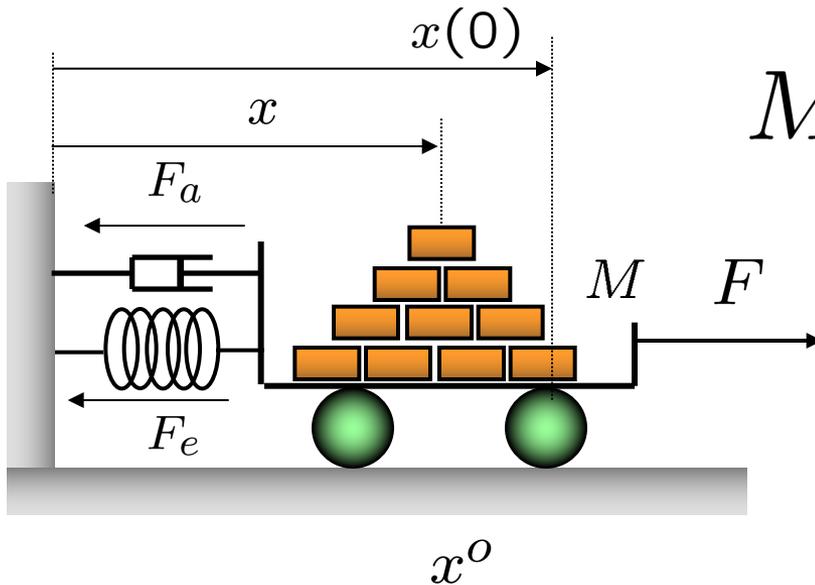
$$Y(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} + \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left( \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

Da questa equazione si puo' tornare nel dominio del tempo,

**ANTITRASFORMANDO**

# Applicazione:

**sistema massa-molla (parte1, #40)**



$$M\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F$$

$$x(0) = r_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$



$$M\{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + \dots$$

$$\dots + h\{sX(s) - \dot{x}(0)\} + kX(s) = F(s)$$



$$X(s)\{Ms^2 + hs + k\} - \{Msr_0 + hr_0 + Mv_0\} = F(s)$$

$$X(s) = \frac{Msr_0 + hr_0 + Mv_0}{Ms^2 + hs + k} + \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k}$$

“Risposta” libera

dipende dalle condizioni  
iniziali



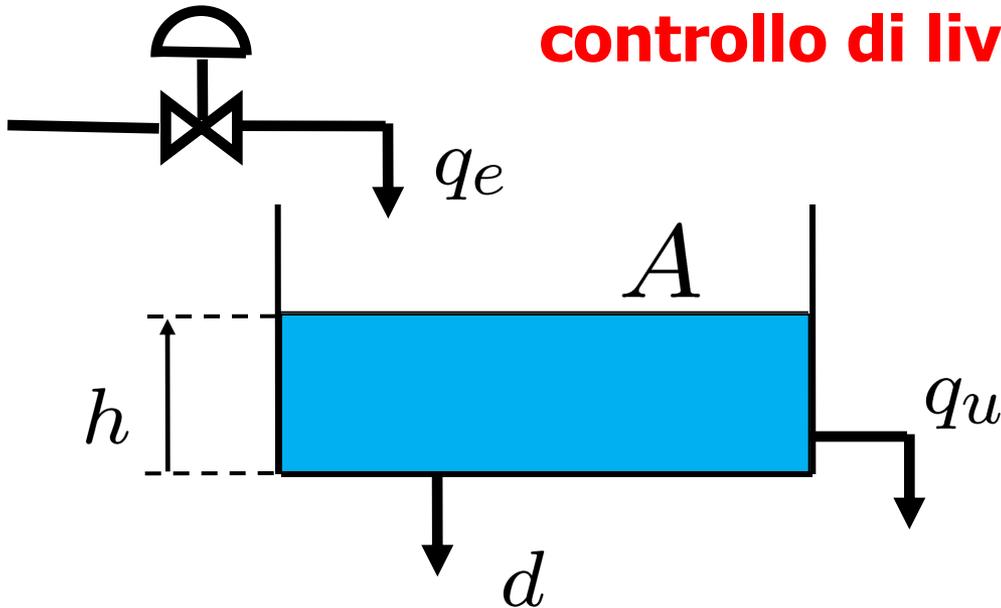
$x(t)$

“Risposta” forzata

dipende dall'ingresso

# Applicazione:

## controllo di livello (parte 1, #49)



### Ipotesi:

- serbatoio infinito
- no disturbo
- controllore proporzionale

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{h} = -\frac{1}{A} (k + \mu) h + \frac{\mu}{A} h^0 \\ h(0) = 0 \end{array} \right.$$

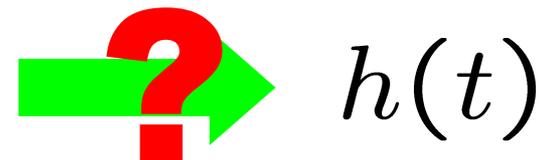
## controllo di livello

Trasformiamo con Laplace, con C.I. nulle (  $h_0$  e' il RIFERIMENTO !):

$$s H(s) = -\frac{1}{A} (k + \mu) H(s) + \frac{\mu}{A} \mathcal{L} \{ h^0(t) \}$$



$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k + \mu)} \cdot \mathcal{L} \{ h^0(t) \}$$



# Antitrasformate

A partire da  $F(s)$  si risale - sotto opportune ipotesi - ad  $f(t)$  calcolando :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\bar{\sigma}-j\infty}^{\bar{\sigma}+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Che vale per  $f(t)$  CAUSALE, cioè non nulla solo per  $t \geq 0$

$\bar{\sigma} > \alpha$ , l'ascissa di convergenza. Tutte le singolarità di  $F(s)$  sono a sinistra della retta individuata da  $\bar{\sigma}$ . **... non ne faremo uso ...**

# Antitrasformate

Ci interessa  
antitrasformare  
funzioni razionali  
fratte



$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\deg(D) = n, \deg(N) = m$$

$$n > m$$

Non applicheremo mai la  
definizione di  
antitrasformata!



# Antitrasformate

Deve essere  $n > m$



Se  $F(s)$  e' causale,  
questa condizione e'  
sempre verificata.



Altrimenti la teoria delle  
trasformate ricorre alle  
funzioni generalizzate...che  
non vedremo

# Espansione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)^{m_1} (s - z_2)^{m_2} \dots (s - z_r)^{m_r}}{(s - p_1)^{n_1} (s - p_2)^{n_2} \dots (s - p_q)^{n_q}}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = m \quad n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$$

- avremo  $r$  zeri:  $z_1, z_2, \dots, z_r \in \mathcal{C}$

di molteplicita'  $m_j \quad j = 1, \dots, r$

- avremo  $q$  poli:  $p_1, p_2, \dots, p_q \in \mathcal{C}$

di molteplicita'  $n_i \quad i = 1, \dots, q$

# Espansione in fratti semplici

Vogliamo scrivere  $F(s)$  come:

$$\begin{aligned} F(s) = & \frac{C_{1,1}}{(s - p_1)} + \dots + \frac{C_{1,n_1}}{(s - p_1)^{n_1}} + \dots \\ & \dots + \frac{C_{2,1}}{(s - p_2)} + \dots + \frac{C_{2,n_2}}{(s - p_2)^{n_2}} + \dots \\ & \dots + \frac{C_{q,1}}{(s - p_q)} + \dots + \frac{C_{q,n_q}}{(s - p_q)^{n_q}} \end{aligned}$$

# Espansione in fratti semplici

Per la proprietà di linearità la sua antitrasformata si potrà calcolare così:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{C_{i,j}}{(s - p_i)^j} \right]$$

Risulta facile antitrasformare il singolo termine di questa sommatoria.

# Espansione in fratti semplici

Infatti si ha che:

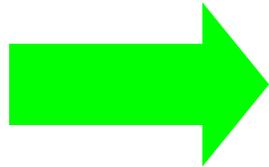
$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{C_{i,j}}{(s - p_i)^j} \right] = \frac{C_{i,j}}{(j - 1)!} t^{(j-1)} e^{p_i t} \mathbf{1}(t)$$

Ancora per le proprietà di linearità, traslazione in frequenza e moltiplicazione per  $t^n$ .



$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{i,j}}{(j - 1)!} t^{(j-1)} e^{p_i t} \mathbf{1}(t)$$

# Espansione in fratti semplici



Se sappiamo **calcolare** i coefficienti  $C_{i,j}$   
abbiamo automaticamente la  $f(t)$

- Metodo 1: basato sul principio di **identita'** dei polinomi  $\rightarrow$  va bene per poli a molteplicita' unitaria
- Metodo 2: basato sul **calcolo dei residui**  $\rightarrow$  va bene per poli multipli

# Espansione in fratti semplici

Risolviamo l'esercizio (parte 1L, #21) lasciato in sospeso, con entrambi i metodi

a. "Risposta" libera

$$Y_l(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Per analogia col caso massa-molla!

b. "Risposta" forzata

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left( \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

a. Metodo 1 - qui conviene perche' ci sono poli a molteplicita' unitaria

$$\begin{array}{l} p_1 = -1 \\ p_2 = -2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad Y_l(s) = \frac{C_1}{(s + 1)} + \frac{C_2}{(s + 2)}$$

# Espansione in fratti semplici

$$Y_l = \frac{s(C_1 + C_2) + 2C_1 + C_2}{(s^2 + 3s + 2)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$$Y_l(s) = \frac{2}{(s + 1)} - \frac{1}{(s + 2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \{Y_l(s)\} = y_l(t) = [2e^{-t} - e^{-2t}] \cdot 1(t)$$

$$t \geq 0$$

# Espansione in fratti semplici

## b. Metodo 2

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \left( \frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = -1, n_1 = 1 \\ p_2 = -2, n_2 = 1 \\ p_3 = 0, n_3 = 2 \end{array} \right.$$



$$Y_f(s) = \frac{C_{1,1}}{(s+1)} + \frac{C_{2,1}}{(s+2)} + \frac{C_{3,1}}{s} + \frac{C_{3,2}}{s^2}$$

# Espansione in fratti semplici

Per calcolare i coefficienti  $C_{i,j}$  si applica questa formula:

$$C_{i,j} = \frac{1}{(n_i - j)!} \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{d^{(n_i - j)}}{d s^{(n_i - j)}} [F(s) (s - p_i)^{n_i}] \right\}$$

Per poli di molteplicita' unitaria:

$$C_i = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

Detta formula di **Heaviside**

Derivata prima del denominatore!

# Espansione in fratti semplici

Dunque finiamo l'esercizio:

$$C_{1,1} = \frac{(s+3)}{(s^2)(s+2)} \Big|_{s=-1} = 2 \quad \rightarrow \quad p_1$$

$$C_{2,1} = \frac{(s+3)}{(s^2)(s+1)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad p_2$$

$$C_{3,1} = \frac{d \frac{(s+3)}{ds}}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = -\frac{7}{4}$$

$$C_{3,2} = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2}$$

}  $p_3$

# Espansione in fratti semplici

Espressione finale di  $Y_f(s)$  :

$$Y_f = \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)} - \frac{7}{4s} + \frac{3}{2s^2}$$

Antitrasformando:

$$y_f(t) = \left[ \frac{3}{2}t - \frac{7}{4} + 2e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-2t} \right] \cdot 1(t) \quad t \geq 0$$

Soluzione dell'equazione differenziale:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t)$$

# Applicazione: sistema massa-molla

$$\left\{ \begin{array}{l} X(s) = \frac{Mr_0s + hr_0 + Mv_0}{Ms^2 + hs + k} + \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k} \\ r_0 = 0, \quad v_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$X(s) = \frac{F(s)}{Ms^2 + hs + k}$$

Se  $F(t)$  e' un gradino

$$X(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$

Espandendo in fratti semplici:

$$\Delta = h^2 - 4kM$$

$$X(s) = \frac{C_1}{s + \frac{h}{2M} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_2}{s + \frac{h}{2M} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2M}} + \frac{C_3}{s}$$

$$x(t) = \left[ C_1 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_2 \cdot e^{-\frac{h}{2M}t} \cdot e^{+\frac{\sqrt{\Delta}}{2M}t} + C_3 \right] \cdot 1(t)$$

$$t \geq 0$$

Vedi (parte 1, #41-42)   $x(t) = [C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + C_3] \cdot 1(t)$

Si e' gia' visto l'andamento della  $x(t)$  a seconda che le radici siano reali o complesse.

 segno di  $\sqrt{\Delta}$ !

# Applicazione:

## controllo di livello

$$H(s) = \frac{\mu}{As + (k + \mu)} \cdot \mathcal{L} \{h^0(t)\}$$

$$H(s) = \left[ \frac{C_1}{s + \frac{(k + \mu)}{A}} + \frac{C_2}{s} \right]$$



$$h^0(t) = h^0 1(t)$$

$$h^0(s) = h^0 \frac{1}{s}$$

dopo qualche passaggio ...

$$h(t) = \frac{\mu h^0}{k + \mu} \left( 1 - e^{-\frac{(k + \mu)}{A} t} \right) \cdot 1(t)$$

vedi (parte 1, #51)

# Proprieta'

Vediamo ancora due proprieta' molto importanti:

## Teorema del valore iniziale

IPOSTESI:  $F(s)$  strettamente propria, cioe'  $n > m$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

# Proprieta'

## Teorema del valor finale

IPOTESI: Tutti i poli sono nel semipiano sinistro, con al piu' un polo di molteplicita' unitaria nell'origine.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

TESI: se le ipotesi sono soddisfatte ALLORA i due limiti esistono entrambi finiti ed assumono valori UGUALI.

E' un teorema molto utile: si trova subito il valore regime della  $f(t)$  direttamente dalla sua trasformata di Laplace!

## Teorema del valor finale: esempi

Applicazione corretta:

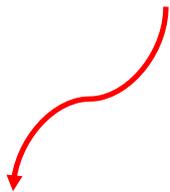
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \cdot 1(t) = 0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s+1}$$

**C'e' un solo polo a parte reale negativa**



Applicazione scorretta:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(\omega t) \cdot 1(t) \quad ? \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = 0$$



**Ci sono due poli immaginari puri!**



$$\nexists \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin(\omega t) \cdot 1(t)$$

# Esercizi

1. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)^2} \longrightarrow \frac{C_1}{(s + 1)} + \frac{C_{2,1}}{(s + 2)} + \frac{C_{2,2}}{(s + 2)^2}$$

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow (-1)} \left\{ \frac{5s + 3}{\cancel{(s + 1)}(s + 2)^2} \cancel{(s + 1)} = -2 \right\}$$

$$C_{2,1} = \lim_{s \rightarrow (-2)} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{5s + 3}{(s + 1)\cancel{(s + 2)^2}} \cancel{(s + 2)^2} \right\} = 2$$

$$C_{2,2} = \lim_{s \rightarrow (-2)} \left\{ \frac{5s + 3}{(s + 1)\cancel{(s + 2)^2}} \cancel{(s + 2)^2} \right\} = 7$$

Antitrasformiamo :

$$F(s) = \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} + \frac{7}{(s+2)^2}$$



$$f(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t} + 7te^{-2t}$$



fine!

## 2. Carica e scarica di un circuito RC parallelo:

### Equazioni di stato

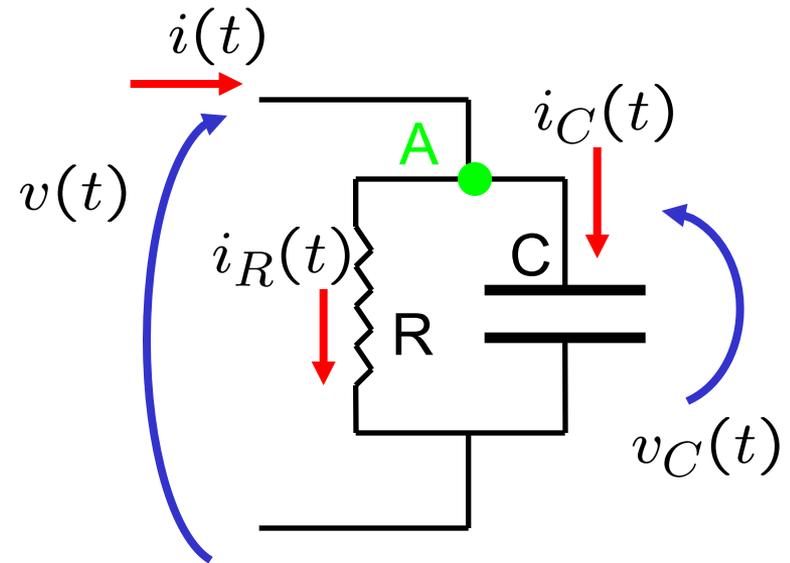
Per il secondo principio di Kirchhoff (al nodo A):

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$$

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} + C \frac{d}{dt} v_C(t)$$

$$v_R(t) = v_C(t) = v(t)$$

$$\frac{y(t)}{R} + C \frac{d}{dt} y(t) = u(t)$$



$$\begin{cases} i(t) = u(t) \\ v_C(t) = y(t) \end{cases}$$

a) Ingresso nullo, ma con condizioni iniziali diverse da zero : il circuito si scarica.

$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt}y(t) = 0$$

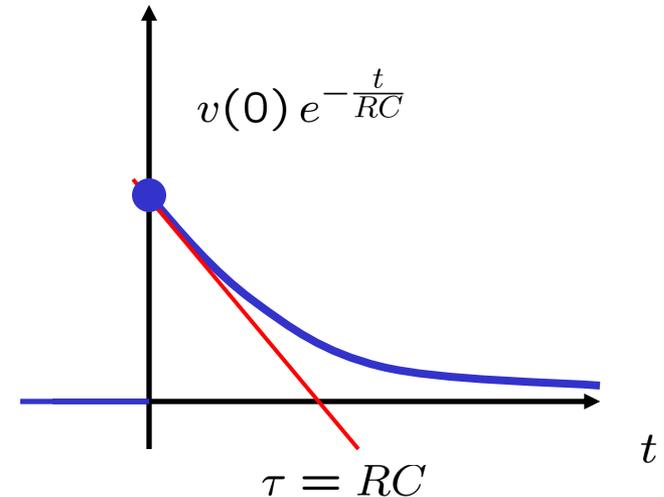
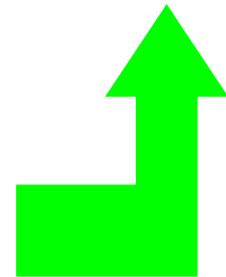
Applichiamo la trasformata di Laplace:

$$\frac{Y(s)}{RC} + sY(s) - y(0) = 0$$

$$Y(s) = y(0) \frac{RC}{sRC + 1} = y(0) \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$



$$v(t) = v(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$



b) Soluzione ad ingresso diverso da zero, ma condizioni iniziali nulle : il circuito si carica.

$$\frac{y(t)}{RC} + \frac{d}{dt}y(t) = \frac{u(t)}{C}$$

$$Y(s) = \frac{U(s)}{C} \frac{RC}{sRC + 1} = \frac{U(s)}{C} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Se l'ingresso e' un gradino in corrente:

$$Y(s) = \left( \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) \frac{1}{sC}$$

Allora espandiamo in fratti semplici...

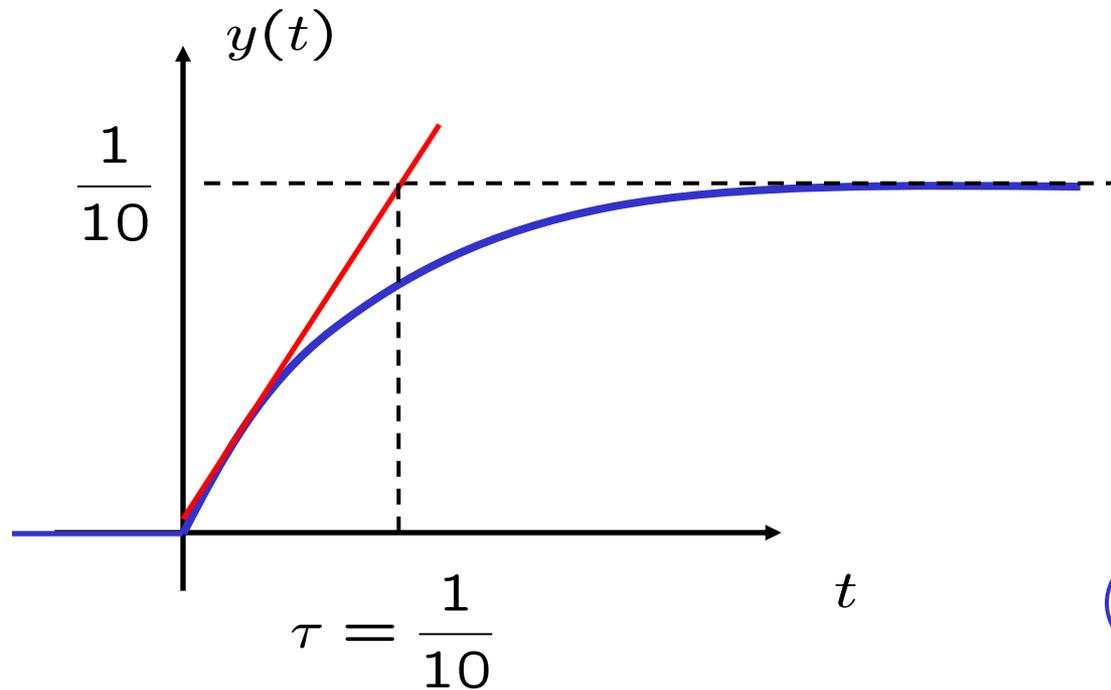


Se  $R=10$ ,  $C=1$  si ha  $RC=10$  e dunque:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+10)} \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A}{s+10} + \frac{B}{s} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{s(s+10)} \cancel{(s+10)} \Big|_{s=-10} = -\frac{1}{10} \\ B = \frac{1}{\cancel{s}(s+10)} \cancel{(s)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

$$y(t) = \left\{ -\frac{1}{10}e^{-10t} + \frac{1}{10} \right\} 1(t) = \frac{1}{10}(1 - e^{-10t}) 1(t)$$



fine!

### 3. Antitrasformare la funzione:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Innanzitutto troviamo i poli:

$$F(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s(s + (1 - j2))(s + (1 + j2))}$$

Poi espandiamo in fratti semplici:

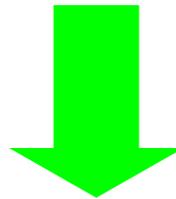
$$F(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{(s + (1 - j2))} + \frac{C_2^*}{(s + (1 + j2))}$$

Applichiamo la formula dei residui :

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) s = 1$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow (-1+j2)} F(s) (s + (1 - j2)) = 3 + j4$$

$$C_2^* = \lim_{s \rightarrow (-1-j2)} F(s) (s + (1 + j2)) = 3 - j4$$



$$f(t) = 1(t) + (3 + j4)e^{-(1-j2)t} + (3 - j4)e^{-(1+j2)t}$$

Che non e' molto agevole perche' presenta coefficienti complessi...

Semplifichiamola sfruttando le formule di Eulero:

$$f(t) = 1(t) + 10e^{-t}(\cos(2t + \phi)) \quad \phi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

Ma si poteva anche operare diversamente, accoppiando i poli complessi e coniugati:

$$\begin{aligned} \frac{3 + j4}{(s + 1 - j2)} + \frac{3 - j4}{(s + 1 + j2)} &= \dots = \frac{6(s + 1) - 16}{(s + 1)^2 + (2)^2} \\ \dots &= 6 \frac{(s + 1)}{(s + 1)^2 + (2)^2} - 8 \frac{2}{(s + 1)^2 + (2)^2} \end{aligned}$$

Antitrasformando  $\rightarrow$  ricordare la proprieta' di traslazione in frequenza:

$$f(t) = 1(t) + 6e^{-t} \cos 2t - 8e^{-t} \sin 2t$$



fine!

Quello appena visto si dice metodo del **COMPLETAMENTO DEI QUADRATI**:

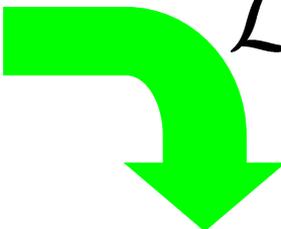
a. Si accoppiano i poli complessi e coniugati:

$$\frac{C_2}{(s + p)} + \frac{C_2^*}{(s + p^*)} \Rightarrow \frac{a s + b}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$$

$\swarrow \text{Re}\{p\}$                        $\nwarrow \text{Im}\{p\}$

b. Si "aggiustano" le costanti al numeratore per avere:

$$\frac{K_1(s + \sigma) + K_2\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$$


 $\mathcal{L}^{-1}$

$$\left( K_1 e^{-\sigma t} \cos(\omega t) + K_2 e^{-\sigma t} \sin(\omega t) \right) 1(t)$$

## 4. Antitrasformare la funzione :

$$F(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 6s + 8}{(s - 1)^3(s + 2)^2}$$

Abbiamo già i poli...stavolta facciamo attenzione agli **zeri!!**

Infatti ci sono delle **semplificazioni** fra numeratore e denominatore: un fattore  $(s + 2)$  si elimina... Magari non ce ne siamo accorti... 😞  
Ma facendo i calcoli nell'espansione in fratti semplici il coefficiente  $C_{2,2}$  legato ad  $(s + 2)^2$  risulterà nullo!

$$C_{2,2} = \lim_{s \rightarrow (-2)} F(s)(s + 2)^2 = \dots = 0$$



**Se nell'espansione un coefficiente risulta NULLO** significa che ci sono delle semplificazioni di cui non ci si è accorti.



fine!