

Modello Standard delle Interazioni Fondamentali

David Marzocca

2023

PREREQUISITI

- Fondamenti della teoria quantistica dei campi (Teoria dei Campi 1):
 - regole di Feynman, ampiezze di scattering
 - campi scalare, vettore, fermione (di Dirac)
 - QED a livello albero
- Simmetrie ed interazioni fondamentali
 - Basi di teoria dei gruppi di Lie, rappresentazioni
 - gruppi $U(1)$, $SO(3)$, $SU(2)$, $SU(3)$
 - gruppo di Poincaré e algebra di Lorentz
 - fermioni di Weyl.

TESTI DI RIFERIMENTO

- [DGH] Donoghue - Golowich - Holstein "Dynamics of the Standard Model"
- [PS] Peskin - Schroeder "An introduction to Quantum Field Theory"
- [S] Schwartz "Quantum Field Theory and the Standard Model"

INTRODUZIONE

Il Modello Standard è una teoria quantistica di campo Lorentz-invariante che descrive le interazioni delle particelle elementari.

È basato su una simmetria di gauge chirale con gruppo $G_{SM} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, rotta spontaneamente al sottogruppo $U(1)_{em}$ dal bosone di Higgs.

Dato il contenuto di campi, la Lagrangiana del Modello Standard è la più generale sotto le condizioni di rinormalizzabilità ed invarianza sotto G_{SM} .

In questo corso, dopo una introduzione ai concetti evidenziati in alto, costruiremo il Modello Standard (SM) e studieremo alcuni degli aspetti fenomenologici più importanti.

Per costruire lo SM seguiremo un approccio bottom-up, partendo dalla teoria di bassa energia basata su $QED + QCD$, aggiungendo le interazioni deboli come interazioni di Fermi, e da qui costruendo lo SM come completamente ultravioletto.

Questo NON riflette l'evoluzione storica, che è molto più caotica, ma preferisce un approccio più moderno e logico.

Studieremo quindi gli aspetti più importanti della fenomenologia dello SM.

RICHIAMI SUL GRUPPO DI POINCARÉ E RAPPRESENTAZIONI DELL'ALGEBRA DI LORENTZ

La teoria deve essere invariante sotto:

- traslazioni : $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+a)$, $\forall a^{\nu} = \text{const}$
- rotazioni + boost : invarianza di Lorentz $x_{\mu} \rightarrow \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu}$

\Rightarrow traslazioni \oplus Lorentz = GRUPPO DI POINCARÉ $ISO(1,3)$
(isometrie di Minkowski)

Diverse particelle hanno massa, momento, indici di spin,
ma anche altri numeri quantici.

Una trasformazione di Poincaré manda una particella
in se stessa:

DEFINIZIONE DI UNA PARTICELLA:

PARTICELLE trasformano sotto RAPPRESENTAZIONI
IRRIDUCIBILI e UNITARIE del gruppo di Poincaré

La rappresentazione è NECESSARIAMENTE
INFINITO-DIMENSIONALE : un campo ha un
numero di gradi di libertà infinito

$\varphi(x)$, $A_{\mu}(x)$, $\psi_{\alpha}(x)$, ...

CLASSIFICATE
da MASSA e SPIN
(Wigner '39)

RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO DI LORENTZ $SO(1,3)$ [5.10.1]

Il gruppo di Lorentz è l'insieme di rotazioni e boost che lasciano invariata la metrica di Minkowski:

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Nella rappresentazione dei 4-vettori $V_\mu \rightarrow \Lambda_{\mu\nu} V_\nu$

Estraiamo l'algebra di Lie del gruppo a partire da questa rapp. Studiamo trasformazioni infinitesime: $V_\mu \rightarrow V_\mu + \delta V_\mu$

$$\delta V_0 = \beta_i V_i \quad \delta V_i = \beta_i V_0 - \epsilon_{ijk} \partial_j V_k \quad \begin{array}{l} \beta_i: \text{boost} \\ \partial_i: \text{rotazioni} \end{array}$$

Ovvero:

$$\delta V_\mu = i \sum_{i=1}^3 (\partial_i (S_i)_{\mu\nu} + \beta_i (K_i)_{\mu\nu}) V_\nu$$

↑
generatori dell'algebra di Lorentz Hermitiani

$$J_1 = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.14)$$

$$K_1 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, K_2 = i \begin{pmatrix} 0 & & -1 & \\ & 0 & & \\ -1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, K_3 = i \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Soddisfanno:

$$\left\{ \begin{array}{l} [S_i, S_j] = i \epsilon_{ijk} S_k \\ [S_i, K_j] = i \epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] = -i \epsilon_{ijk} S_k \end{array} \right\} \text{ algebra delle rotazioni } SO(3)$$

Lorentz algebra
 $so(1,3)$

Per costruire irrep del gruppo di Lorentz possiamo usare quello che già sappiamo sulle irrep di $SU(2)$.

Definiamo:
$$J_i^+ = \frac{1}{2} (J_i + iK_i) ; \quad J_i^- = \frac{1}{2} (J_i - iK_i)$$

Soddisfanno l'algebra
$$\left\{ \begin{array}{l} [J_i^+, J_j^+] = i \epsilon_{ijk} J_k^+ \\ [J_i^-, J_j^-] = i \epsilon_{ijk} J_k^- \\ [J_i^+, J_j^-] = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{due sub-algebre che} \\ \text{commutano fra loro} \end{array} \right\}$$

↓

$$so(1,3) = su(2)_L \oplus su(2)_R$$

→ Le irrep del gruppo di Lorentz si possono determinare dalle rappresentazioni di $su(2) = so(3)$ [Rotazioni in 3D]

⇒ specificate da un numero semi-intero

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

⇒ agisce su uno spazio vettoriale di $dim = (2j+1)$

Irrep. del gruppo di Lorentz e' descritta da due numeri → (A, B) $A, B = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

$(2A+1) \cdot (2B+1)$ degrees of freedom

Il generatore delle rotazioni è $\vec{J} = \vec{J}^+ + \vec{J}^-$
(sommati vettorialmente: Clebsch-Gordan)

$su(2) \oplus su(2)$	$(0,0)$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
<u>SPIN</u> : $SO(3)$ ROTAZIONI	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1 \oplus 0$	1	1	$2 \oplus 1 \oplus 0$
	↑	↑	↑	↑			
	SCALARE	SPINORI L,R		VETTORI A_μ + SCALARE			

SPINORI

[S.10.2, P.5.3.2]

Le irrep $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ descrivono oggetti di spin $j = \frac{1}{2}$ e con $(2j+1) = 2$ gradi di libertà.

$$(\frac{1}{2}, 0) \sim \Psi_L$$

e

$$(0, \frac{1}{2}) \sim \Psi_R$$

Spinori di Weyl

left e right-handed

I generatori di Lorentz in queste irrep devono essere

matrici 2×2 con queste regole di commutazione: $[\mathcal{J}_i^+, \mathcal{J}_j^+] = i \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k^+$

$$[\mathcal{J}_i^-, \mathcal{J}_j^-] = i \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k^-$$

$$[\mathcal{J}_i^+, \mathcal{J}_k^-] = 0$$

Matrici di Pauli: $[\frac{\vec{v}_i}{2}, \frac{\vec{v}_j}{2}] = i \epsilon_{ijk} \frac{\vec{v}_k}{2}$

$$\Psi_L \sim (\frac{1}{2}, 0) : \vec{J}^- = \frac{1}{2} \vec{v}, \quad \vec{J}^+ = 0 \quad \vec{J} = \frac{1}{2} \vec{v} \quad \vec{K} = \frac{i}{2} \vec{v}$$

$$\Psi_R \sim (0, \frac{1}{2}) : \vec{J}^- = 0, \quad \vec{J}^+ = \frac{1}{2} \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{J} = \frac{1}{2} \vec{v} \quad \vec{K} = -\frac{i}{2} \vec{v}$$

Dato che $\vec{v}^+ = \vec{v}$, i generatori tra le due irrep son uni gli aggiunti degli altri. Ψ_L e Ψ_R sono irrep **CONIUGATE**.

$$\Rightarrow \text{Sotto Lorentz} \quad \Psi_{R,L} \rightarrow e^{\frac{1}{2}(i\partial_j \vec{v}_j \pm \beta_j \vec{v}_j)} \Psi_{R,L}$$

$$\mathcal{D} \Psi_{R,L} = \frac{1}{2} (i\partial_j \pm \beta_j) \vec{v}_j \Psi_{R,L}, \quad \mathcal{D} \Psi_{R,L}^\dagger = \frac{1}{2} (-i\partial_j \pm \beta_j) \Psi_{R,L}^\dagger \vec{v}_j \quad (*)$$

NOTA: Prendiamo una rotazione di 2π , $\partial_z = 2\pi$.

$$\text{Si ha: } \Psi_{R,L} \rightarrow e^{\frac{1}{2} i 2\pi \vec{v}_3} \Psi_{R,L} = -\Psi_{R,L} !$$

Gli spinori CAMBIANO SEGNO sotto rotazioni di 2π .

\Rightarrow questa proprietà è all'origine del teorema di spin-statistica

Per approfondire vedi, e.g. [S.10.5]

Lagrangiana per SPINORI DI WEYL

$$\mathcal{L}_{\text{Weyl}} = i \psi_R^\dagger \bar{v}_r d_r \psi_R + i \psi_L^\dagger \bar{v}_r d_r \psi_L - m (\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R)$$

$$v^r = (1, \vec{v}) \quad \bar{v}^r = (1, -\vec{v})$$

⇒ La massa mescola (e accoppia) ψ_L e ψ_R .

Lo spinore di Dirac ψ è dato da

$$\psi = \psi_L \oplus \psi_R = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger = (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger)$$

Definiamo $\gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & v^r \\ \bar{v}^r & 0 \end{pmatrix}$ Matrici di Dirac (o matrici γ)

$$\bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger)$$

$$\{\gamma^r, \gamma^s\} = 2g^{rs}$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

La Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i \gamma^r d_r - m) \psi \quad \xrightarrow{\text{e.o.m}}$$

$$(i \not{D} - m) \psi = 0 \quad \text{Equazione di Dirac}$$

Esercizio

Controlla che $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \mathcal{L}_{\text{Weyl}}$

[S.11.1, eq.(11.10)]

Definiamo

$$\gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

CHIRALITA'

$$\left. \begin{aligned} \gamma_5 \psi_L &= -\psi_L \\ \gamma_5 \psi_R &= +\psi_R \end{aligned} \right\} \text{autostati}$$

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5^2 = \mathbb{1}$$

$$P_R^2 = P_R$$

$$P_L^2 = P_L$$

$$P_L P_R = 0$$

$$P_R \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

$$P_L \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eq. di Dirac:

$$\int \bar{\psi}^T P_R \psi = (\bar{c} - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_R = m \psi_L$$

$$\int \bar{\psi}^T P_L \psi = (\bar{c} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_L = m \psi_R$$

1. la massa m mescola ψ_L e ψ_R

2. Per $m=0$, gli spinori sono autovettori di CHIRALITA'

$$\hat{h} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{c}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{h} \psi_R \Big|_{m=0} &= +\frac{1}{2} \psi_R \\ \hat{h} \psi_L \Big|_{m=0} &= -\frac{1}{2} \psi_L \end{aligned} \right\}$$

SOLUTIONS OF THE DIRAC EQUATION (richiami) [S.11.2]

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$$

[P.S.3.3]

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p^s u_s(p) e^{-ipx} + b_p^{s*} v_s(p) e^{+ipx} \right)$$

Con $\begin{pmatrix} -m & p \cdot \vec{\sigma} \\ p \cdot \vec{\sigma} & -m \end{pmatrix} u_s(p) = 0$ & $\begin{pmatrix} -m & -p \cdot \vec{\sigma} \\ -p \cdot \vec{\sigma} & -m \end{pmatrix} v_s(p) = 0$

La soluzione

$$\Rightarrow u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi_s \end{pmatrix} \quad v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \eta_s \\ -\sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \xi_1 = \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \xi_2 = \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Normalizzati come:

$$\bar{u}_s(p) u_{s'}(p) = -\bar{v}_s(p) v_{s'}(p) = 2m \delta_{ss'}$$

Prodotto esterno:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \not{p} + m \quad \sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) = \not{p} - m$$