

QED

Consideriamo una teoria di gauge con gruppo abeliano $U(1)$ e trasformazioni $U(x) = e^{iq\alpha(x)}$.

∃ 1 generatore delle trasformazioni: q

↔ 1 vettore a massa nulla: $A_\mu(x)$

2 gradi di libertà fisici: polarizzazione $+$ $-$.

NOTA: A_μ : $\mu=0,1,2,3$: 4 gradi di libertà.

Irrep. di Lorentz: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \mathbf{1} + \mathbf{0}$ di spin

Utilizzando come termine cinetico $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$,
con $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, il grado di libertà scalare diventa non dinamico: si disaccoppia. (constraint $\partial^\mu A_\mu = 0$)

Ne rimangono 3. Quello extra rappresenta una ridondanza nella nostra descrizione di un vettore a massa nulla, che si riflette nella libertà di gauge $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$ che lascia $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$.

Si rimuove tramite la procedura di "gauge fixing".

Consideriamo un fermione di Dirac $\psi(x)$

con carica Q sotto $U(1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) \rightarrow e^{iQ\alpha(x)} \psi(x) \\ A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \end{array} \right.$$

Il termine cinetico gauge-invariante è

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \Delta_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad \text{dove}$$

$\Delta_\mu \equiv \partial_\mu + i e Q A_\mu$ è la derivata covariante

e : costante di accoppiamento.

La Lagrangiana di QED è quindi data da:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\psi} \not{D} \psi - m \bar{\psi} \psi$$

$$\not{D} \equiv \gamma^\mu \Delta_\mu$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Il termine di gauge-fixing è $\mathcal{L}_{\text{g.f.}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2$,
ma verrà approfondito nel corso di Campi II.

ESERCIZIO

★ Verificare che sotto una trasformazione di gauge $\alpha(x)$:

- $\Delta_\mu \psi \rightarrow e^{iQ\alpha} (\Delta_\mu \psi)$

- $\mathcal{L}_{\text{QED}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{QED}}$

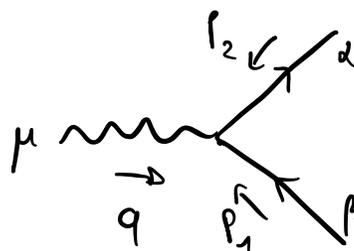
★ Verificare la relazione: $[\Delta_\mu, \Delta_\nu] \psi(x) = i e Q F_{\mu\nu} \psi(x)$

INTERAZIONI E REGOLE DI FEYNMAN DI QED

L'unica interazione è nella derivata covariante:

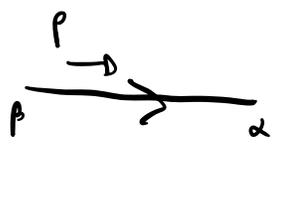
$$\begin{aligned}
 S_{QED} &= \int d^4x \left(-eQ \bar{\Psi}_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} A_\mu \Psi_\beta \right) \quad \rightarrow \text{trasformata di Fourier} \\
 &= \int d^4x \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \underbrace{(-eQ) \tilde{\Psi}_\alpha(p_2) \gamma^\mu_{\alpha\beta} \tilde{A}_\mu(q) \Psi_\beta(p_1)}_{\tilde{\mathcal{L}}} e^{ix(q+p_1+p_2)} \\
 &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{L}} (2\pi)^4 \delta^4(q+p_1+p_2) \quad \alpha, \beta: \text{indici spinoriali}
 \end{aligned}$$

• Regola di Feynman:

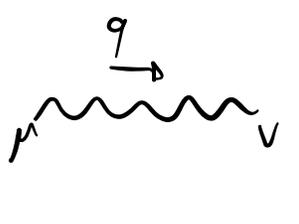


$$= i \frac{\delta}{\delta \tilde{A}_\mu(q)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\Psi}_\beta(p_1)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\Psi}_\alpha(p_2)} \tilde{\mathcal{L}} = \boxed{-ieQ \gamma^\mu_{\alpha\beta}}$$

Propagatori:



$$= \left(\frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)_{\alpha\beta} = i \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



$$= -i \frac{g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2 + i\epsilon} \quad \begin{array}{l} \text{Gauge di} \\ \text{Feynman} \\ \xi=1 \end{array} \quad \frac{-i g_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon}$$

FENOMENOLOGIA DI QED

Vediamo alcune conseguenze della QED per l'elettrone.

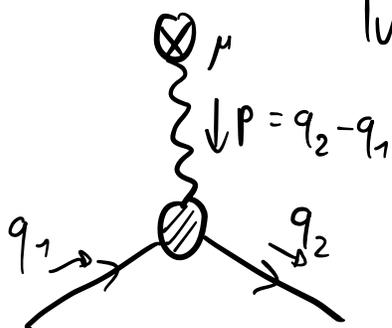
$$Q = -1, \quad m \approx 511 \text{ keV}.$$

• MOMENTO MAGNETICO

[PS.6.2-3, S.17]

Consideriamo l'interazione fra un elettrone ed un campo em classico esterno A_α^μ .

In generale possiamo parametrizzarla come:



$$iM = ie \bar{u}(q_2) \Gamma^\mu(q_1, q_2) u(q_1) \tilde{A}_\alpha^\mu(p)$$

Dove in generale $\Gamma^\mu = f_1(p^2) \gamma^\mu + f_2(p^2) q_1^\mu + f_3(p^2) q_2^\mu$.

• Dato che $q_1^2 = q_2^2 = m^2$ le f_i possono solo dipendere da p^2

• L'identità di Ward (conservazione della corrente e.m.) implica

$$\partial_\mu \Sigma^\mu = 0 \xrightarrow{\text{Fourier}} p_\mu \Sigma^\mu(p) = 0, \quad \text{ovvero nel nostro caso:}$$

$$p_\mu \bar{u} \Gamma^\mu u = 0 \rightarrow f_1 \bar{u} \not{p} u + f_2(p \cdot q_1) \bar{u} u + f_3(p \cdot q_2) \bar{u} u = 0$$

$$\bar{u}(q_2 - q_1) u = \bar{u}(m - m) u = 0 \quad -q_1 \cdot q_2 + m^2 = -(p \cdot q_1)$$

$$\Rightarrow f_3 = f_2$$

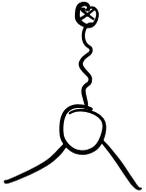
• Posso usare l'identità di Gordon:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\bar{u}(q_2) \gamma^\mu u(q_1) = \bar{u}(q_2) \left[\frac{q_1^\mu + q_2^\mu}{2m} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} p_\nu}{2m} \right] u(q_1)$$

⇒ Paramettrizziamo quindi il vertice come:

$$iM = ie \bar{u}(q_2) \left[F_1\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \gamma^\mu + \frac{i \sigma^{\mu\nu}}{2m} p_\nu F_2\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right] u(q_1) A_{cl}^\mu(p)$$

In QED  =  + $\mathcal{O}(\alpha)$ ← correzioni perturbative
 $\alpha = 1$ o più loop.

$$\rightarrow F_1 = 1 + \mathcal{O}(\alpha), \quad F_2 = \mathcal{O}(\alpha)$$

Vediamo il caso di un campo magnetico

$$\tilde{B}^k(p) = -i \epsilon^{ijk} p^i \tilde{A}_{cl}^j(p)$$

$$u(q) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \vec{v}} \xi \\ \sqrt{p \cdot \vec{v}} \eta \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{limite} \\ \text{non rel.} \\ \approx \end{matrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} (1 - \vec{q} \cdot \vec{v} / 2m) \xi \\ (1 + \vec{q} \cdot \vec{v} / 2m) \eta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u}(q_2) \gamma^i u(q_1) = 2m \xi_2^\dagger \left(\frac{\vec{q}_2 \cdot \vec{v}}{2m} \sigma^i + \sigma^i \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{v}}{2m} \right) \xi_1$$

Usando $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i \epsilon^{ijk} \sigma^k$ $p^j = q_2^j - q_1^j$

$$\bar{u}(q_2) \gamma^i u(q_1) \approx \xi_2^\dagger \xi_1 (q_1 + q_2)^i + 2m \xi_2^\dagger \left(\frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} p^j \sigma^k \right) \xi_1$$

$$\bar{u}(q_2) \frac{i}{2m} \sigma^{\mu\nu} p_\nu u(q_1) \approx 2m \xi_2^\dagger \left(\frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} p^j \sigma^k \right) \xi_1$$

Il termine $(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2) \cdot \vec{A}$ descrive la forza di Lorentz.

Il resto da, nel limite $\vec{p} \rightarrow 0$,

$$\Rightarrow iM = -i(2m) e \xi_2^+ \left(\frac{-1}{2m} \Gamma^k [F_1(0) + F_2(0)] \right) \xi_1 \tilde{B}^k(p)$$

Descrive l'approssimazione di Born dello scattering di un elettrone con **momento magnetico** $\langle \vec{\mu} \rangle$ con potenziale:

$$V(\vec{x}) = - \langle \vec{\mu} \rangle \cdot \vec{B}(x).$$

con

$$\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \xi_2^+ \frac{\sqrt{}}{2} \xi_1 = \xi_2^+ \left(g \frac{e}{2m} \vec{S} \right) \xi_1$$

con $g = 2 [F_1(0) + F_2(0)]$

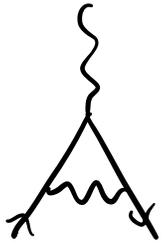
fattore g di Landé

L'espansione perturbativa ci dà $F_1(0) = 1 + O(\alpha)$, $F_2 = O(\alpha)$

$$\Rightarrow g = 2 + O(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} 2(1 + \underbrace{a_e})$$

**MOMENTO MAGNETICO ANOMALO
DELL'ELETTRONE**

La correzione ad 1 loop mi da (vedi corso di campi II)



$$\rightarrow F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad F_2(0) \equiv 1 \rightarrow \text{(condizione di rinormalizzazione)}$$

$$\Rightarrow g = 2 + 2\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) + \mathcal{O}(\alpha^2) = 2.00232\dots$$

Presentato per la prima volta da Schwinger, Feynman e Tomonaga nel 1948.

Adesso abbiamo:

$$a_e^{\text{th}} = 0.001159625181643(764)$$
$$a_e^{\text{exp}} = 0.00115962518073(28)$$

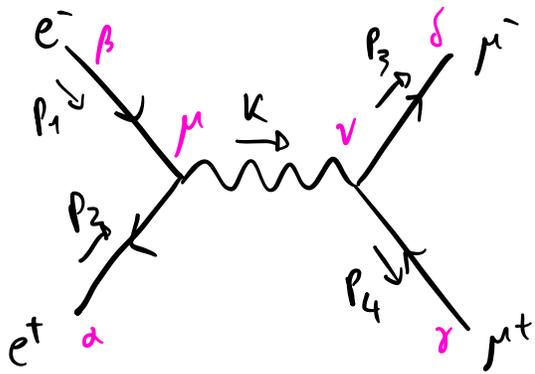
a_e è noto a 1 parte su 10^9 .

Per ottenere ciò, g è stato misurato con precisione di 10^{-12} .

Scattering $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ [5.12.3]

Il muone e^- è una copia dell'elettrone ma con una massa ~ 200 volte maggiore: $m_\mu \approx 105,66 \text{ MeV}$.

Cominciamo con il calcolare l'ampiezza di scattering a livello albero (no loop):



$$= iM$$

$$k^\mu = (p_1 + p_2)^\mu = (p_3 + p_4)^\mu$$

s_i : spin di ciascun fermione esterno

$$iM = (ie)^2 \bar{v}_{\alpha}^{s_2}(p_2) \gamma_{\alpha\beta}^{\mu} u_{\beta}^{s_1}(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \bar{u}_{\delta}^{s_3}(p_3) \gamma_{\delta\gamma}^{\nu} v_{\gamma}^{s_4}(p_4)$$

$$iM = i \frac{e^2}{s} (\bar{v}(p_2) \gamma^{\mu} u(p_1)) (\bar{u}(p_3) \gamma_{\mu} v(p_4)) \quad \leftarrow s = k^2 = (p_1 + p_2)^2$$

Ora calcoliamo $|M|^2 = M^{\dagger} M$

Ricordiamo che:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_1 \gamma^{\mu} \psi_2)^{\dagger} &= (\psi_1^{\dagger} \gamma_0 \gamma^{\mu} \psi_2)^{\dagger} = \psi_2^{\dagger} \gamma^{\mu\dagger} \gamma_0^{\dagger} \psi_1 = \psi_2^{\dagger} \gamma_0 \gamma^{\mu} \gamma_0 \gamma_0^{\dagger} \psi_1 = \\ &= \psi_2^{\dagger} \gamma_0 \gamma^{\mu} \psi_1 = \bar{\psi}_2 \gamma^{\mu} \psi_1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \gamma_0^{\dagger} = \gamma_0 \\ \gamma_0 \gamma_0 = \mathbb{1} \end{array}$$

$$M^{\dagger} = \frac{e^2}{s} (\bar{u}(p_1) \gamma^{\nu} v(p_2)) (\bar{v}(p_4) \gamma_{\nu} u(p_3))$$

$$\begin{aligned}
 |M|^2 &= \frac{e^4}{s^2} (\bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2)) (\bar{v}(p_4) \gamma_\nu u(p_3)) (\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)) (\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)) \\
 &= \frac{e^4}{s^2} (\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)) (\bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2)) (\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)) (\bar{v}(p_4) \gamma_\nu u(p_3))
 \end{aligned}$$

Scattering non polarizzato

Supponiamo che i fasci e^+ , e^- iniziali non siano polarizzati e che non misuriamo la polarizzazione di μ^\pm .

Dobbiamo quindi **MEDIANE** sugli spin iniziali e **SOMMARE** su quelli finali: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |M|^2$

Usiamo che:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sum_s v_\alpha^s(p) \bar{v}_\beta^s(p) &= \sum_s \bar{v}_\beta^s(p) v_\alpha^s(p) = (\not{p} - m \mathbb{1})_{\alpha\beta} \\
 \sum_s u_\alpha^s(p) \bar{u}_\beta^s(p) &= \sum_s \bar{u}_\beta^s(p) u_\alpha^s(p) = (\not{p} + m \mathbb{1})_{\alpha\beta}
 \end{aligned} \right.$$

$$\sum_{s_3, s_4} (\bar{u}_{\alpha}^{s_3}(p_3) \gamma_{\mu\alpha\beta}^{s_4}(p_4)) (\bar{v}_{\delta}^{s_4}(p_4) \gamma_{\nu\delta\gamma}^{s_3}(p_3)) = \leftarrow \text{Somma implicita su indici ripetuti}$$

$$= \sum_{s_3, s_4} \underbrace{u_{\gamma}^{s_3}(p_3) \bar{u}_{\alpha}^{s_3}(p_3) \gamma_{\mu\alpha\beta}^{s_4}(p_4) \bar{v}_{\delta}^{s_4}(p_4) \gamma_{\nu\delta\gamma}^{s_3}(p_3)} = \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_e) \gamma_\nu]$$

E analogamente per gli elettroni:

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr}[(\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu] \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_e) \gamma_\nu]$$

Per le tracce sfruttiamo:

$$\text{Tr}[\gamma_\mu] = 0, \quad \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu] = 0$$

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4 g_{\mu\nu},$$

$$\text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta] = 4 (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4 \text{spin}} \sum |\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{s^2} \left(p_1^\nu p_2^\mu + p_1^\mu p_2^\nu - ((p_1 \cdot p_2) + m_e^2) g^{\mu\nu} \right) \times \\ &\quad \times \left(p_{3\mu} p_{4\nu} + p_{3\nu} p_{4\mu} - ((p_3 \cdot p_4) + m_\mu^2) g_{\mu\nu} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{8e^4}{s^2} \left(p_{14} p_{23} + p_{13} p_{24} + m_\mu^2 p_{12} + m_e^2 p_{34} + 2 m_e^2 m_\mu^2 \right)$$

$$p_{ij} \equiv p_i \cdot p_j$$

In termini delle **variabili di Mandelstam**

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 = 2 p_{12} + m_e^2 = 2 p_{34} + m_\mu^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2 p_{13} = m_e^2 + m_\mu^2 - 2 p_{24}$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 = m_e^2 + m_\mu^2 - 2 p_{14} = m_e^2 + m_\mu^2 - 2 p_{23}$$

$$\frac{1}{4 \text{spin}} \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{2e^4}{s^2} \left(t^2 + u^2 + 4s(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2 \right)$$

Calcoliamo ora la sezione d'urto per questo processo.

Per uno scattering $2 \rightarrow n$ la sezione d'urto è data da:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\tilde{c}_1)(2\tilde{c}_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |M|^2 d\tilde{\Pi}_{LIPS} \quad [\text{vedi note in fondo per approfondire}]$$

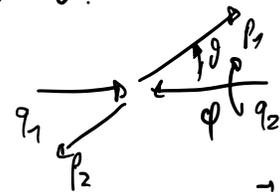
$$d\tilde{\Pi}_{LIPS} = (2\pi)^4 \int^4(\Sigma P) \prod_{\text{final state } j} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\tilde{c}_j}$$

↳ Lorentz-invariant phase space

SPAZIO DELLE FASI IN DUE PARTICELLE $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

- Nel sistema del centro di massa l'ampiezza può dipendere solamente da $s = (p_1 + p_2)^2 = (q_1 + q_2)^2 = \tilde{c}_{cm}^2$ e l'angolo θ .

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$



$$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$$

$$q_1^0 + q_2^0 = \tilde{c}_{cm}$$

$$\int d\tilde{\Pi}_{LIPS} = \int (2\pi)^4 \int^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 \tilde{c}_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 \tilde{c}_2}$$

$$= \frac{1}{4(2\pi)^2} \int S(\tilde{c}_{cm} - E_1 - E_2) \frac{p_f^2 dp_f d\Omega}{\tilde{c}_1 \tilde{c}_2} \delta(\tilde{c}_{cm} - m_1 - m_2)$$

$$S(\tilde{c}_{cm} - \sqrt{p_f^2 + m_1^2} - \sqrt{p_f^2 + m_2^2}) \rightarrow p_f = \frac{\tilde{c}_{cm}}{2} \bar{\beta}, \quad \bar{\beta} \equiv \sqrt{1 - \frac{2(m_1^2 + m_2^2)}{\tilde{c}_{cm}^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{\tilde{c}_{cm}^4}}$$

$$G = \frac{1}{p_f \tilde{c}_1 + p_f \tilde{c}_2} S(p_f - \frac{\tilde{c}_{cm}}{2} \bar{\beta})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4(2\pi)^2} \frac{p_f^2}{\tilde{c}_1 \tilde{c}_2} \frac{1}{p_f \tilde{c}_1 + p_f \tilde{c}_2} d\Omega = \frac{d\Omega}{4(2\pi)^2} \frac{p_f}{\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2} = \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2 p_f}{\tilde{c}_{cm}} \right) \equiv \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \bar{\beta}$$

Quindi per un processo $2 \rightarrow 2$ si ha:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{(2\tilde{c}_1)(2\tilde{c}_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |M|^2 \frac{p_f}{\tilde{c}_{cm}}$$

Nel nostro caso:

$$|M|^2 \rightarrow \frac{1}{4} \sum_{\text{Spin}} |M|^2$$

Audiamo nel sistema del centro di massa:

$$P_1 = (\bar{E}, \vec{k}) \quad P_2 = (\bar{E}, -\vec{k})$$

$$P_3 = (\bar{E}, \vec{p}) \quad P_4 = (\bar{E}, -\vec{p})$$

$$|\vec{k}| = \sqrt{\bar{E}^2 - m_e^2}, \quad |\vec{p}| = \sqrt{\bar{E}^2 - m_\mu^2}$$

$$S = (P_1 + P_2)^2 = (\bar{E}_1 + \bar{E}_2)^2 = 4\bar{E}^2 = \bar{E}_{CM}^2$$

$$t = m_e^2 + m_\mu^2 - 2\bar{E}^2 + 2\vec{k} \cdot \vec{p}$$

$$u = m_e^2 + m_\mu^2 - 2\bar{E}^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{p}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{\bar{E}_{CM}^2} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} \left(\frac{1}{4} \sum_{\text{spin}} |M|^2 \right)$$

$$|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \left| \frac{|\vec{p}_1|}{\bar{E}_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{\bar{E}_2} \right| = |\vec{k}| \frac{\bar{E}_{CM}}{\bar{E}_1 \bar{E}_2}$$

$$= \frac{e^4}{32\pi^2 \bar{E}_{CM}^2 S^2} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} \left(t^2 + u^2 + 4S(m_e^2 + m_\mu^2) - 2(m_e^2 + m_\mu^2)^2 \right)$$

$$= \frac{d^2}{16 \bar{E}^6} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} \left(\bar{E}^4 + (\vec{k} \cdot \vec{p})^2 + \bar{E}^2 (m_e^2 + m_\mu^2) \right) \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$$

$$= \frac{d^2}{16 \bar{E}^6} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{k}|} \left(\bar{E}^4 + |\vec{k}|^2 |\vec{p}|^2 \cos^2 \theta + \bar{E}^2 (m_e^2 + m_\mu^2) \right)$$

Nel limite $\bar{E} \gg m_\mu \gg m_e$ mandiamo $m_{e,\mu} \rightarrow 0$: $|\vec{k}| = |\vec{p}| = \bar{E} = \frac{\bar{E}_{CM}}{2}$

$$m_e = m_\mu = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}{d\Omega} = \frac{d^2}{4\bar{E}_{CM}^2} (1 + \cos^2 \theta)$$

Per ottenere la sezione d'urto totale integriamo in

$$d\Omega = d\varphi d\cos\theta$$

$$\sigma_0(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi d^2}{3 \bar{E}_{CM}^2}$$

SEZIONE D'URTO

[5.5]

In esperimenti di scattering le osservabili principali sono SEZIONI D'URTO differenziali

$$d\sigma = \frac{1}{T} \frac{1}{\Phi} dP \quad [d\sigma] = \text{L}^2$$

T : durata dell'esperimento
 Φ : flusso normalizzato ad una sola particella

↓
numero di eventi

$$dN = L d\sigma \quad [L] = \text{L}^{-2}$$

↳ luminosità integrata

$$\Phi = \frac{|D\vec{v}|}{V} \quad \leftarrow \text{volume}$$

dP : probabilità quantistica: $dP = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} d\tilde{\Pi}$ spazio delle fasi
Elemento di **MATRICE S**

Nella teoria libera $S = \mathbb{1}$, definiamo quindi

$$S = \mathbb{1} + iT \quad T: \text{matrice di trasmissione}$$

Fattorizzando la conservazione del momento:

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i^\mu - \sum_f p_f^\mu) \mathcal{M} \quad \leftarrow \text{ELEMENTO DI MATRICE } \mathcal{M}$$

$$\langle f | S - \mathbb{1} | i \rangle = i (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i^\mu - \sum_f p_f^\mu) \mathcal{M}$$

In un intervallo di dimensione L i momenti sono discretizzati:

$$p_n = \frac{2\pi}{L} n \quad \rightarrow \text{il numero di stati disponibili è } N = \int \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p$$

$$\rightarrow d\tilde{\Pi} = \prod_{\text{stati finali } j} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_j \quad \text{regione dello spazio dei momenti che ci interessa}$$

Dalla normalizzazione $a_k^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} |k\rangle$

per gli operatori di creazione / distruzione

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(p-q)$$

$$(2\pi)^3 \delta^3(p) = \int d^3x e^{i p x}$$

$$\hookrightarrow \langle p|q\rangle = (2\pi)^3 (2\omega_p) \delta^3(p-q)$$

$$\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}$$

$$\langle p|p\rangle = 2\omega_p V = 2E_p V$$

↓

$$|i\rangle = |p_1\rangle |p_2\rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle i|i\rangle = (2E_1 V)(2E_2 V) \\ \langle f|f\rangle = \prod_j (2E_j V) \end{array} \right.$$

$$|f\rangle = \prod_j |p_j\rangle$$

$$\delta^4(0) = \frac{TV}{(2\pi)^4}$$

per $|f\rangle \neq |i\rangle$

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = \delta^4(0) \delta^4(\Sigma p) (2\pi)^8 |M|^2 = TV (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) |M|^2$$

$$\Rightarrow dP = \frac{TV (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)}{(2E_1 V)(2E_2 V)} |M|^2 \prod_j \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{2E_j V} = \frac{T}{V} \frac{1}{(2E_1)(2E_2)} |M|^2 d\tilde{\Pi}_{LIPS}$$

Nel caso di scattering $2 \rightarrow n$ ($p_1 + p_2 \rightarrow \{p_i\}$)

$$d\sigma = \frac{V}{T} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} dP = \frac{1}{(2E_1)(2E_2)|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} |M|^2 d\tilde{\Pi}_{LIPS}$$

$$d\tilde{\Pi}_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \prod_{\text{final state } j} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}$$

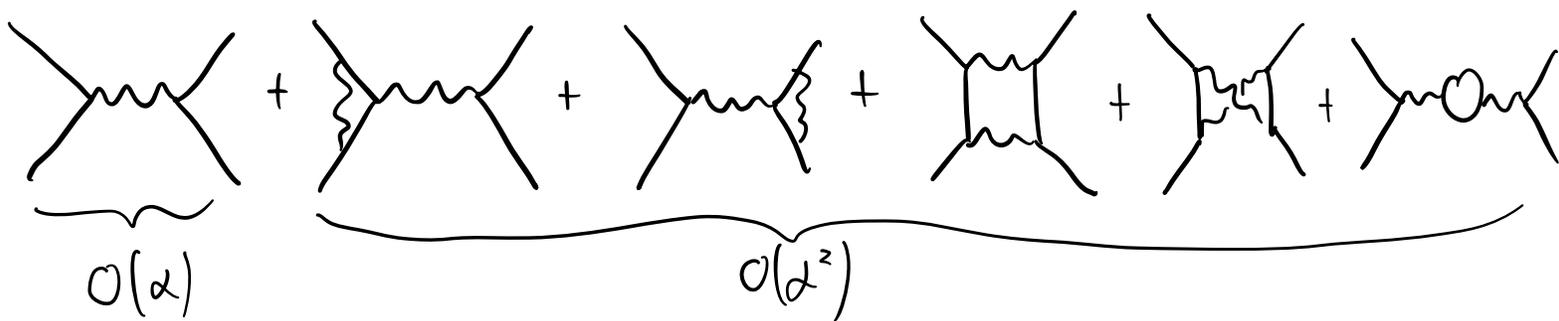
Lorentz-invariant phase space

• CORREZIONI RADIATIVE [DGH.2.1]

Supponiamo di volere calcolare il contributo al second'ordine in teoria delle perturbazioni a

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{cm}^2} \left(1 + \mathcal{O}(\alpha) \right)$$

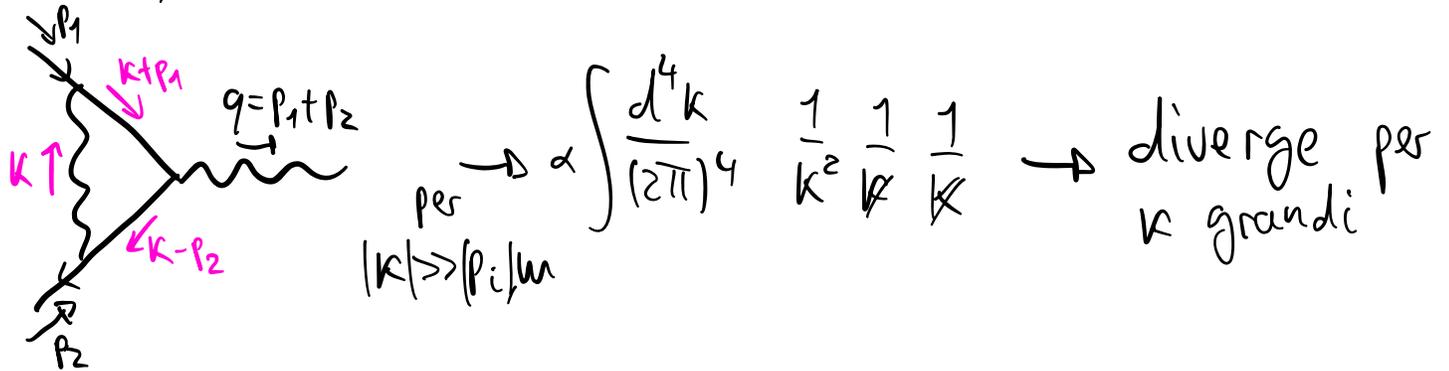
Nel calcolo di $M(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ dovremo includere diagrammi con loop chiusi:



In $\sigma \propto |M|^2$ il termine $\mathcal{O}(\alpha^3)$ sarò dato dalla interferenza tra il diagramma albero $\mathcal{O}(\alpha)$ e quelli ad 1-loop $\mathcal{O}(\alpha^2)$.

Il calcolo esplicito di questi diagrammi lo vedrete al corso di Campi II.

Ogni loop chiuso ha un momento che può circolare nel loop e può prendere valori arbitrari, va quindi integrato, ad esempio



RINORMALIZZAZIONE:

Le divergenze UV vengono assorbite dai parametri della teoria (accoppiamenti, masse, norma dei campi).

Se il numero di ampiezze divergenti è finito posso sempre fare questa procedura con un numero finito di parametri: **TEORIA RINORMALIZZABILE**.

• I diagrammi hanno anche **DIVERGENZE INFRAROSSE** per $k \rightarrow 0$, dovute al fatto che il fotone ha massa nulla.

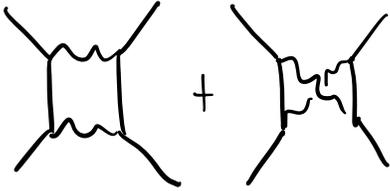
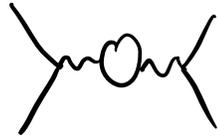
A livello sperimentale, però, quando misuro $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ devo escludere eventi con fotoni $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$. Però se i fotoni sono molto SOFFICI (bassa energia) σ COLLINEARI (paralleli ai muoni)

non potrò distinguerli. Ad ordine $\mathcal{O}(\alpha^3)$ devo quindi anche aggiungere i processi $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \gamma$ e $\gamma e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$:

$$\left| \text{diagramma} \right|^2 + \left| \text{diagramma} \right|^2 + \left| \text{diagramma} \right|^2 + \left| \text{diagramma} \right|^2 \sim \mathcal{O}(\alpha^3)$$

Anche queste sezioni d'urto hanno divergenze IR, che cancellano esattamente quelle dei loop.

⇒ TEOREMA DI KINOSHITA-LÉE-NAUENBERG (KLN).

- I diagrammi a box  sono finiti.
- Il diagramma con la self-energia del fotone  è divergente UV (non IR).

L'effetto è di **RINORMALIZZARE L'ACCOPPIAMENTO** elettrico, che diventa dipendente dalla scala: $e \rightarrow e_{\text{eff}}(\bar{E}^2)$

per $\omega_{\text{em}}=0 \Rightarrow$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \simeq \frac{e_{\text{eff}}(\bar{E}^2)^4}{12\pi^2 \bar{E}_{\text{cm}}^2} + \dots$$

dove

$$e_{\text{eff}}(\bar{E}^2) = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \log \frac{\bar{E}^2}{\Lambda^2}}$$

CARICA ELETTRICA
EFFETTIVA

$$A = e^{5/3}$$

La dipendenza dell'accoppiamento dalla scala di rinormalizzazione è descritta dalla

FUNZIONE - BETA

$$\mu \frac{de(\mu)}{d\mu} = \beta(e)$$

← Equazione del gruppo di rinormalizzazione

Per la QCD: $\beta_{QCD}(e) = \frac{e^3(\mu)}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^5)$
(per $\mu \gg m$)

SOLUZIONE (per 1 fermione)

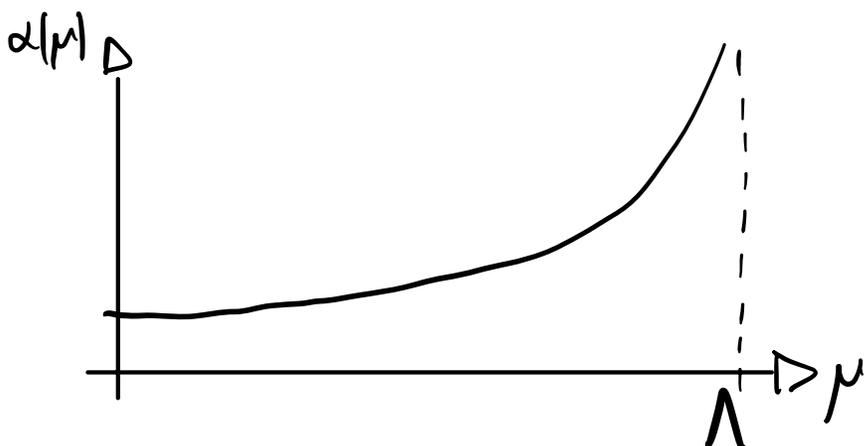
$$12\pi^2 \frac{de}{e^3} = \frac{d\mu}{\mu} = d \log \mu \rightarrow \int_{e(\mu_0)}^{e(\mu)} 12\pi^2 \frac{de}{e^3} = \int_{\mu_0}^{\mu} d \log \mu$$

$$12\pi^2 \left(-\frac{1}{2e^2(\mu)} + \frac{1}{2e^2(\mu_0)} \right) = \log \frac{\mu}{\mu_0} \rightarrow \frac{1}{e^2(\mu)} = \frac{1}{e^2(\mu_0)} - \frac{1}{12\pi^2} \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2}$$

$$e^2(\mu) = \frac{e^2(\mu_0)}{1 - \frac{e^2(\mu_0)}{12\pi^2} \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}$$

$$\Rightarrow \alpha(\mu) = \frac{\alpha(\mu_0)}{1 - \frac{\alpha(\mu_0)}{3\pi} \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(m_e^2) \approx \frac{1}{137} \\ \alpha(M_Z^2) \approx \frac{1}{129} \end{array} \right\}$$



Ad una scala Λ :

$$\frac{\alpha(\mu_0)}{3\pi} \log \frac{\Lambda^2}{\mu_0^2} = 1, \quad \alpha(\mu) \rightarrow \infty.$$

"Polo di LANDAU"

Il calcolo perturbativo perde di validità prima di Λ .

Per la QCD $\Lambda \sim 10^{286}$ eV.