TEOREMA ESISTENZA & UNICITA'

$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$ eq. diff. del 2° ordine

può essere portata nella forma di un sistema di eq. diff. del 1° ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v, t) \end{pmatrix}$$

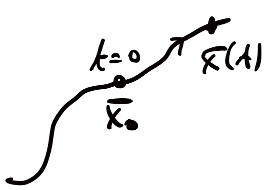
$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ $\bar{f}(\bar{x}, t) = \begin{pmatrix} v \\ f(x, v, t) \end{pmatrix}$

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)} \qquad (\star)$$

Eq. diff. del 1° ord nell'incognita $\bar{x}(t)$

Vale il TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA'

Prop. Se $\bar{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ è localm. Lipschitziana $^{\circledast}$ in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, allora $\forall\, \bar{x}_0 \in U$
$\exists$ intervallo $(-\tau, \tau)$ e un' UNICA SOLUZIONE $\bar{x}(t)$ dell'eq. $(\star)$ definita per $t \in (-\tau, \tau)$ t.c.
$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ (condizione iniziale)

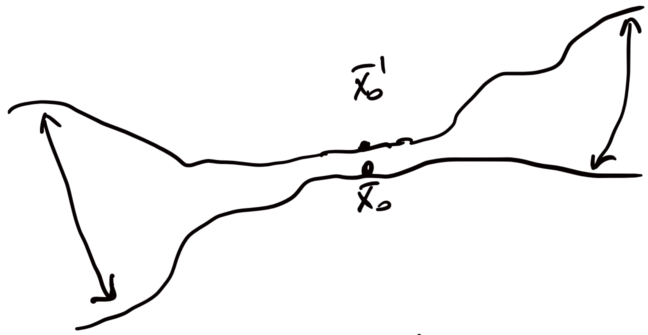


Se cambiamo $\bar{x}_0$, cambia la soluzione

$$\bar{x}(t\,;\,\bar{x}_0)$$

↑ parametro della funzione $\bar{x}(t)$ che risolve l'eq. (*) con condiz. iniz. $\bar{x}_0$.

La soluzione dipende con regolarità dal dato iniziale (e da eventuali parametri presenti in $\bar{f}$)

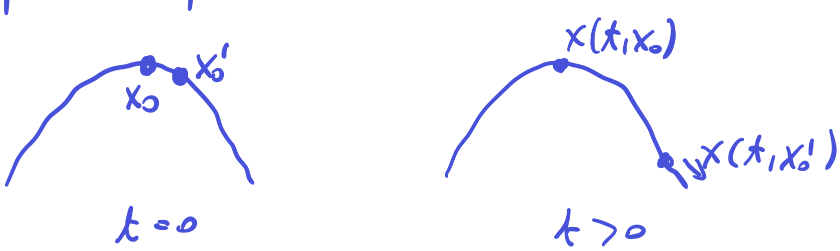


In effetti vale la relazione

$$\|\bar{x}(t,\bar{x}_0') - \bar{x}(t,\bar{x}_0)\| < C\,\|\bar{x}_0' - \bar{x}_0\|\, e^{\lambda|t|}$$

$\lambda > 0$

Esempio: repulsore armonico



(*) $\bar{f}$ è localm. Lipschitziana se $\exists\, \lambda>0$ t.c. $\forall\, \bar{x},\bar{y} \in U$ con $\bar{x} \neq \bar{y}$ si ha $\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{y})\| \leq \lambda \|\bar{x}-\bar{y}\|$. La più piccola λ che soddisfa pta condiz. è detta COST. DI LIP.

Condiz. suff: $\bar{f}$ di classe C^1.

Es. $\bar{f}$ non-Lip.: $\sqrt{x}$ attorno all'origine. Per $x_0=0$ si perde unicità: $x(t)=0$ e $x(t)=\frac{t^2}{4}$ sono soluz. di $\dot{x}=\sqrt{x}$ con $x(0)=0$.

SISTEMA AUTONOMO

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \cancel{t})$$

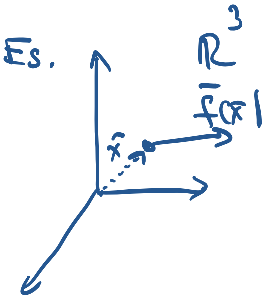
$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\uparrow$

campo VETTORIALE

Es.



$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*) \leftarrow \text{sistema autonomo}$$

→ per sistemi autonomi, abbiamo INVARIANZA PER TRASLAZIONI TEMPORALI, cioè

se $\bar{x}(t)$ è soluzione di $(*)$, anche $\bar{x}'(t) \equiv \bar{x}(t - t_0)$ è soluz. di $(*)$

Es. $\dot{x} = x$ → una soluz. è $x(t) = e^t$, ma anche e^{t-t_0} è soluzione $\forall t_0$

Dim. Prendiamo $\bar{x}(t)$ soluz. di $(*)$, cioè $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t))$;

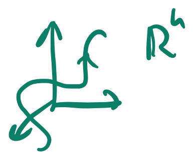
allora $\dot{\bar{x}}'(t) = \frac{d}{dt}\bar{x}'(t) = \frac{d}{dt}\bar{x}(t-t_0) = \dot{\bar{x}}(t-t_0) =$

$\uparrow$ $\bar{x}(\tilde{t})$ è soluz.

$= \bar{f}(\bar{x}(t-t_0)) = \bar{f}(\bar{x}'(t))$ //

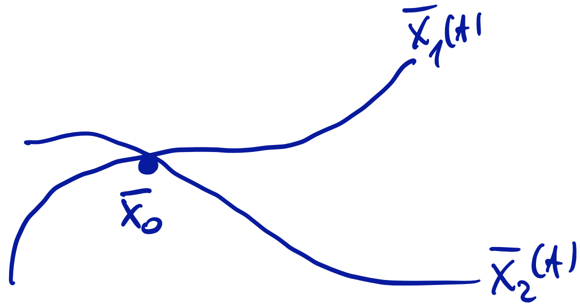
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Traiettorie}^{(*)} \text{ delle soluzioni di } (*) \text{ non si intersecano mai!}}$

(*) Traiettoria è l'immagine della funz. $\bar{x}(t)$ in $\mathbb{R}^n$



Dim. Assumiamo per assurdo che ci siano due soluzioni

$\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_2(t)$ le cui traiettorie si intersecano



$$\bar{x}_1(0) = \bar{x}_0$$
$$\bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_0$$
$$\Downarrow$$

Ma se questo fosse possibile, allora esisterebbe una terza solut. $\bar{x}_3(t) \equiv \bar{x}_2(t+t_0)$ t.c. $\bar{x}_3(0) = \bar{x}_0$

cioè esisterebbero due solut., $\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_3(t)$ con lo stesso dato iniziale a $t=0$, violando il teorema di esistenza e UNICITÀ. //

CASO MECCANICO (autonomo)

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \cancel{t}) \rightsquigarrow \ddot{x} = f(x, \dot{x}) \qquad (*)$$

Passiamo al "piano di fase", cioè lo spazio con coordinate $\bar{x} = (x, v)$

$$(*) \text{ equiv.a } \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad \text{dove} \quad \bar{f}(x,v) = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v) \end{pmatrix}$$

Preso il dato iniziale $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, c'è un'unica soluzione che passa per $\bar{x}_0$ al tempo $t=0$. Le soluzioni dipendono dai parametri x_0 e v_0.

ES. osc. armonico

solut. è
$$x(t) = a\cos\omega t + b\,\mathrm{sen}\,\omega t$$
$$v(t) = -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t + b\omega\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_0 &= x(0) = a \\ v_0 &= v(0) = b\omega \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= x_0 \\ b &= \frac{v_0}{\omega} \end{aligned}$$

$$\bar{x}(t;\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} x(t;x_0,v_0) \\ v(t;x_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t \\ -\omega x_0 \sin\omega t + v_0 \cos\omega t \end{pmatrix}$$

Scelti x_0 e v_0, la soluzione è determinata.

FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE

Data l'eq. diff. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$ $\bar{x}(t)$ a valori in $\mathbb{R}^n$

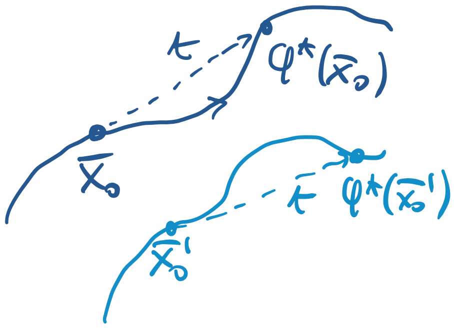
$\forall \bar{x}_0$, $\exists!$ solut. $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ $(\bullet)$

- Fissato $\bar{x}_0$, la solut. $(\bullet)$ descrive una curva in $\mathbb{R}^n$
- Fissato t, $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ è una funzione in $\bar{x}_0$, cioè descrive una mappa

$$\varphi^t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\bar{x}_0 \longmapsto \varphi^t(\bar{x}_0) \equiv \underbrace{\bar{x}(t;\bar{x}_0)}_{\text{solut. di } (*)}$$

t è un parametro della mappa $\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$



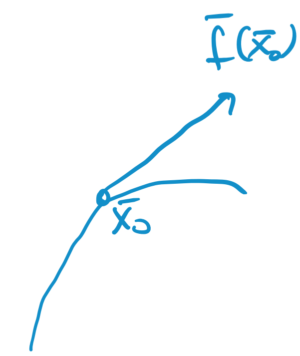
Al variare di t si ha una FAMIGLIA a un parametro di AUTOMORFISMI $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

La famiglia $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ si dice il FLUSSO relativo al campo vettoriale $\bar{f}$.

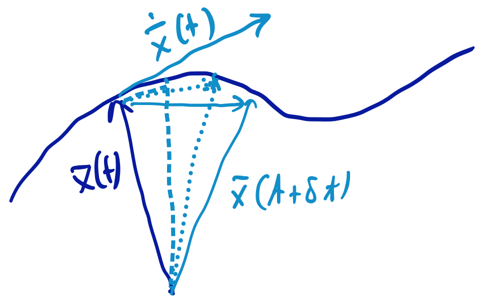
[$\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è un GRUPPO

Id : φ^0 Inverso : φ^{-t} Composiz. : $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$]

$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $\rightsquigarrow$ curva $\bar{x}(t)$ che passa per $\bar{x}_0$ deve essere tangente al vettore $\bar{f}(\bar{x}_0)$



$$\dot{\bar{x}}(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\bar{x}(t+\delta t) - \bar{x}(t)}{\delta t}$$



"Linee di forza"