Stabilità di sistemi interconnessi

Introduzione

- Assegnato un sistema dinamico LTI descritto tramite uno schema a blocchi (a tempo continuo oppure a tempo discreto), che cosa si può dire della stabilità (**stabilità interna e stabilità BIBO**) del sistema nel suo complesso?

- La **struttura** dello schema agevola l'analisi di stabilità?
  - Esistono delle configurazioni in cui la **stabilità del sistema interconnesso** e' **garantita**, se i sottosistemi elementari sono stabili?
  - Esistono configurazioni in cui questa proprietà non e' valida?

Tempo continuo vs tempo discreto

- I **risultati** a cui arriveremo saranno **validi** sia per **sistemi a tempo continuo** che **a tempo discreto**.

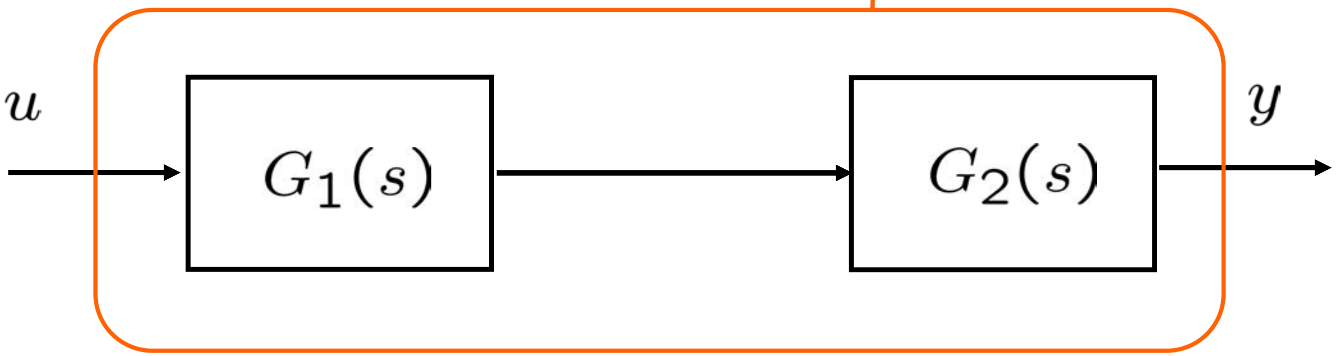
- Per semplicità allora analizziamo in dettaglio solo il caso a tempo continuo, riportando poi i risultati del caso a tempo discreto.

Sistemi interconnessi a tempo continuo

Analisi di stabilità

- Blocchi in serie

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$



$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \qquad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$$

$$G(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Caso 1: assenza di fattori comuni

$$\left\{ \text{Poli di } G(s) \right\} = \left\{ \text{Poli di } G_1(s) \right\} \cup \left\{ \text{Poli di } G_2(s) \right\}$$

$$G(s) \text{ asint. stabile} \iff G_1(s),\, G_2(s) \text{ asint. stabili}$$

- Caso 2: presenza di fattori comuni

- Cancellazioni con $\mathrm{Re}\,(\,\mathrm{poli}\ \text{"cancellati"}\,) < 0$

Dinamica “nascosta” asint. stabile

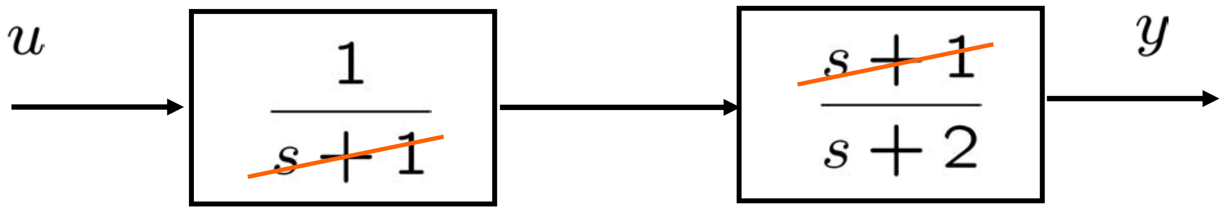
- Cancellazioni con $\mathrm{Re}\,(\,\mathrm{poli}\ \text{"cancellati"}\,) \geq 0$

Dinamica “nascosta” non asint. stabile

Il sistema non e` asint. stabile
anche se $G(s)$ non lo mostra

- Esempi

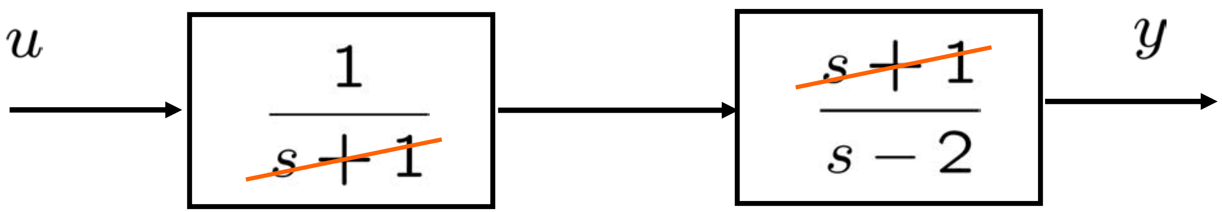
1)



$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Asint. stabile

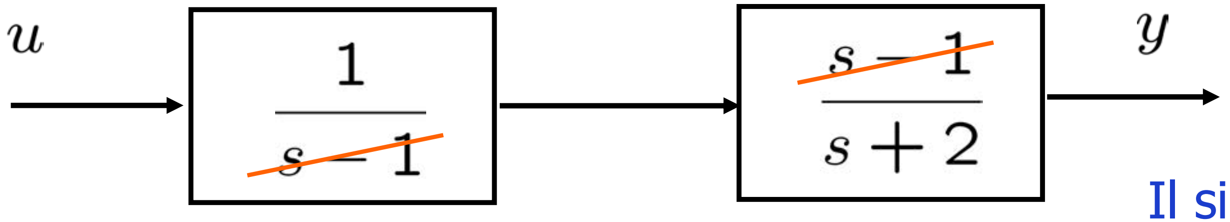
2)



$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

Instabile

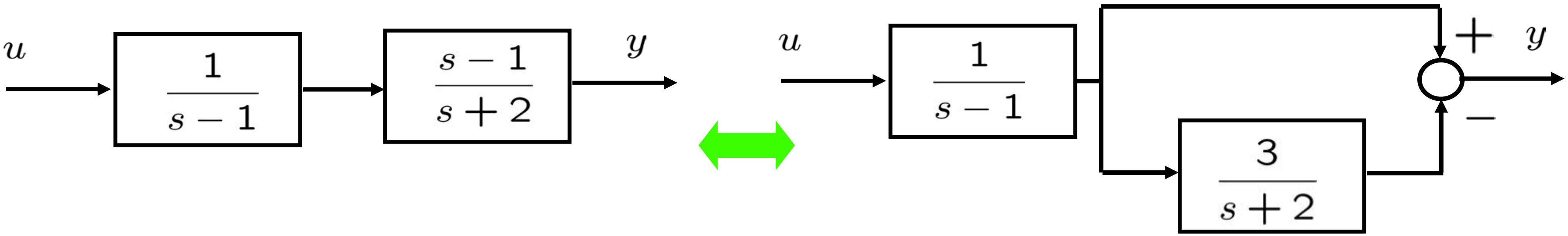
3)



$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Il sistema e` instabile anche se $G(s)$ non lo mostra

Infatti:

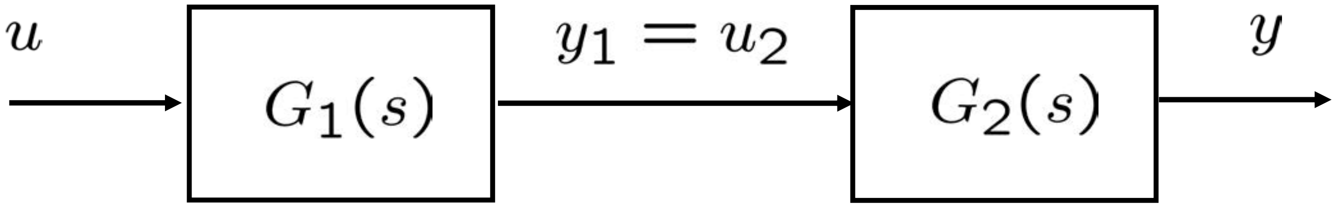


$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 3x_1 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Autovalore > 0

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1]\, x \end{cases}$$

- Blocchi in serie: analisi nel tempo



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ y_1 = c_1 x_1 + d_1 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 y_1 = A_2 x_2 + b_2 c_1 x_1 + b_2 d_1 u \\ y = c_2 x_2 + d_2 y_1 \end{cases}$$

$$G_1(s) = c_1 (sI - A_1)^{-1} b_1 + d_1 \qquad G_2(s) = c_2 (sI - A_2)^{-1} b_2 + d_2$$

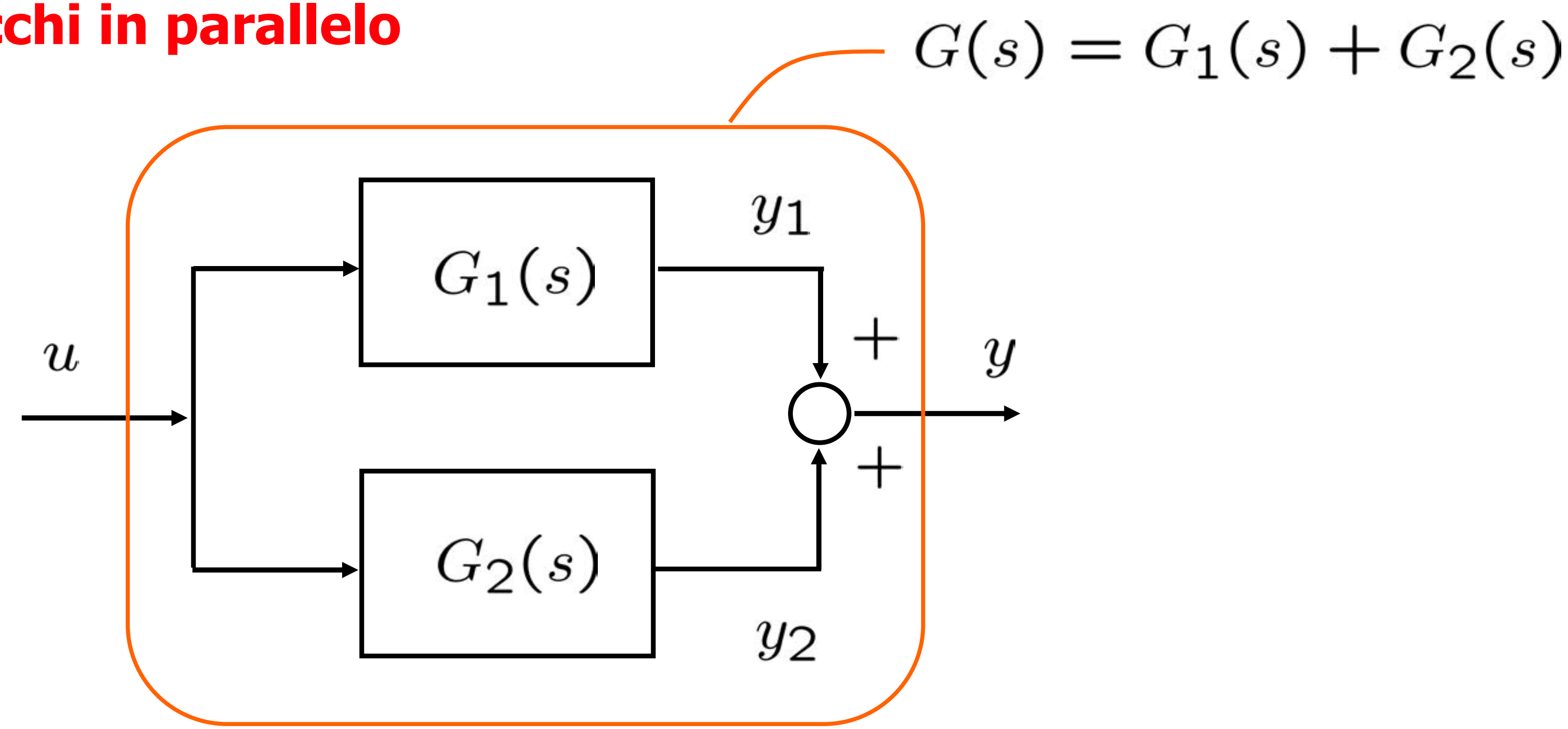
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 d_1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [d_2 c_1 \;\; c_2]\, x + d_1 d_2 u \end{cases}$$

- Conclusione blocchi in serie

- Sistema complessivo asintoticamente stabile $\Longleftrightarrow$ Sottosistemi asintoticamente stabili

- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in serie

- Blocchi in parallelo



$$G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Caso 1: assenza di fattori comuni

$$\{\text{Poli di } G(s)\} = \{\text{Poli di } G_1(s)\} \cup \{\text{Poli di } G_2(s)\}$$

$\Rightarrow$ $G(s)$ asint. stabile $\Leftrightarrow$ $G_1(s), G_2(s)$ asint. stabili

- Caso 2: presenza di fattori comuni

- Cancellazioni con $\mathrm{Re}\,(\,\mathrm{poli}\ \text{''cancellati''}\,) < 0$

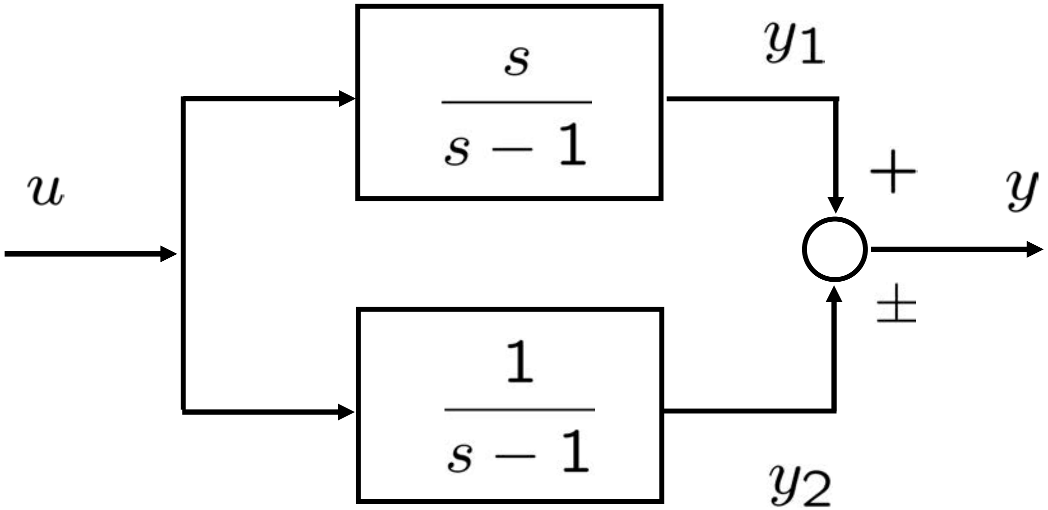
Dinamica “nascosta” asint. stabile

- Cancellazioni con $\mathrm{Re}\,(\,\mathrm{poli}\ \text{''cancellati''}\,) \geq 0$

Dinamica “nascosta” non asint. stabile

Il sistema non e` asint. stabile
anche se $G(s)$ non lo mostra

- Esempio



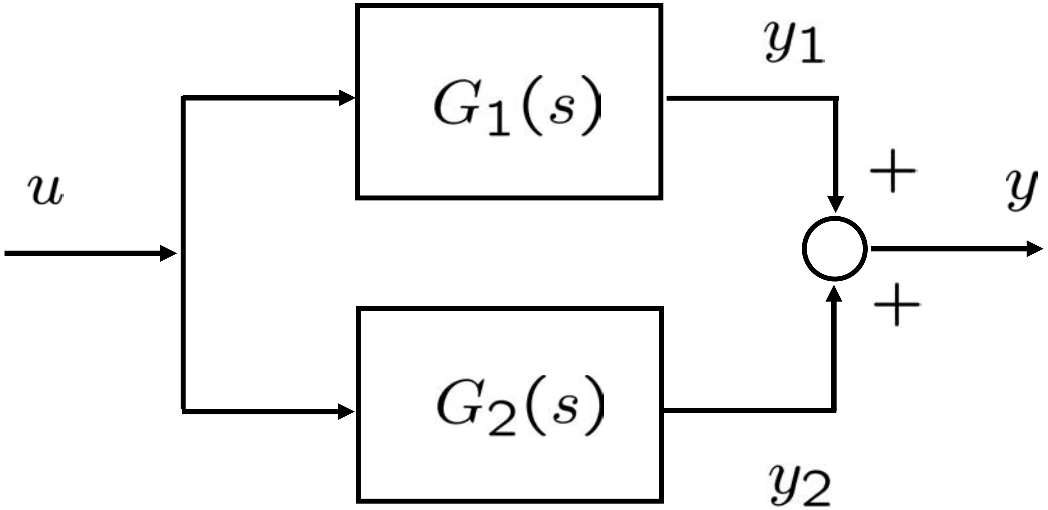
$$(+) \quad G(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

Instabile

$$(-) \quad G(s) = 1$$

Il sistema e` instabile anche se $G(s)$ non lo mostra

- Blocchi in parallelo: analisi nel tempo



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 u \\ y_1 = c_1 x_1 + d_1 u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 u \\ y_2 = c_2 x_2 + d_2 u \end{cases}$$

$$G_1(s) = c_1 (sI - A_1)^{-1} b_1 + d_1 \qquad G_2(s) = c_2 (sI - A_2)^{-1} b_2 + d_2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [c_1 \;\; c_2]\, x + (d_1 + d_2)\, u \end{cases}$$

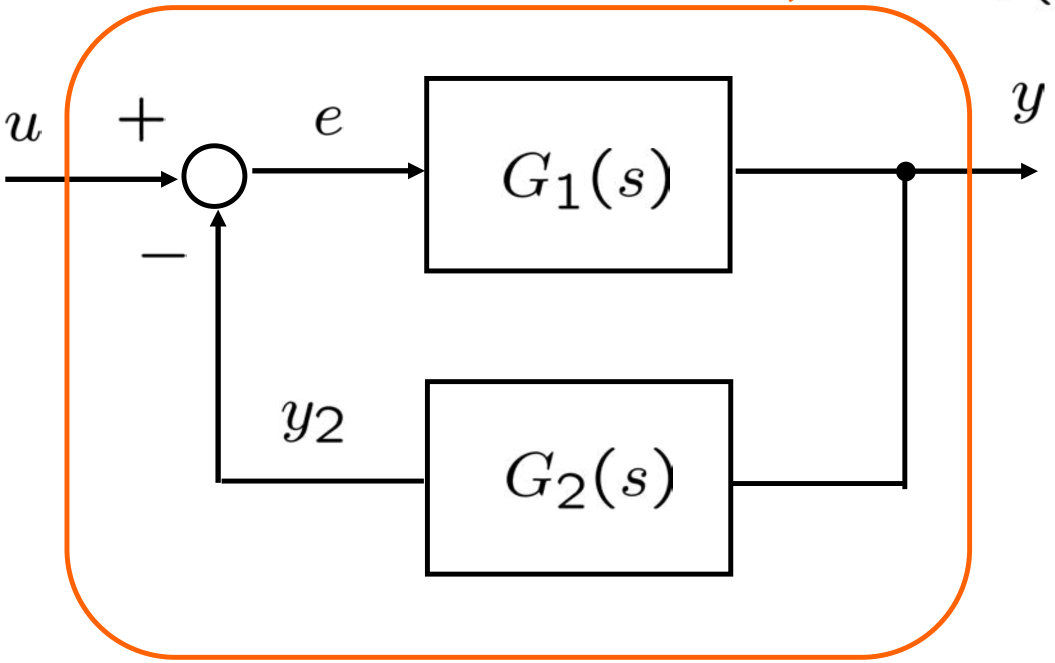
- Conclusione blocchi in parallelo

- Sistema complessivo asintoticamente stabile $\Longleftrightarrow$ Sottosistemi asintoticamente stabili

- Gli autovalori non cambiano a causa della connessione in parallelo

- Blocchi in retroazione

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



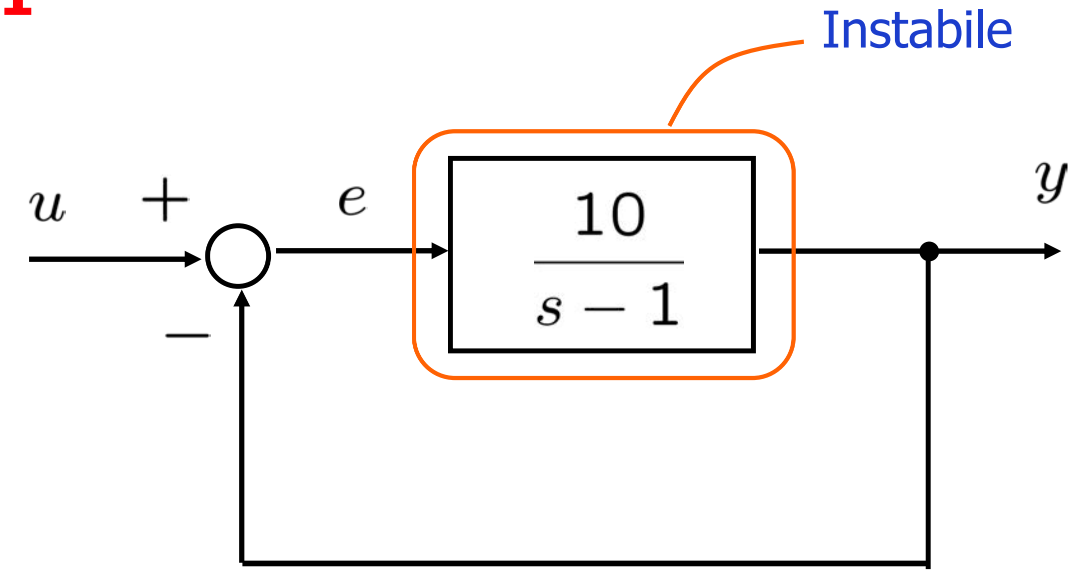
$$G(s) = \frac{\dfrac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 + \dfrac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}$$

- Anche in assenza di fattori comuni

$$\left\{ \text{Poli di } G(s) \right\} = \left\{ \text{Radici di } D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) \right\}$$

$$G(s) \text{ asint. stabile } \begin{array}{c} \not\Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} G_1(s),\, G_2(s) \text{ asint. stabili}$$

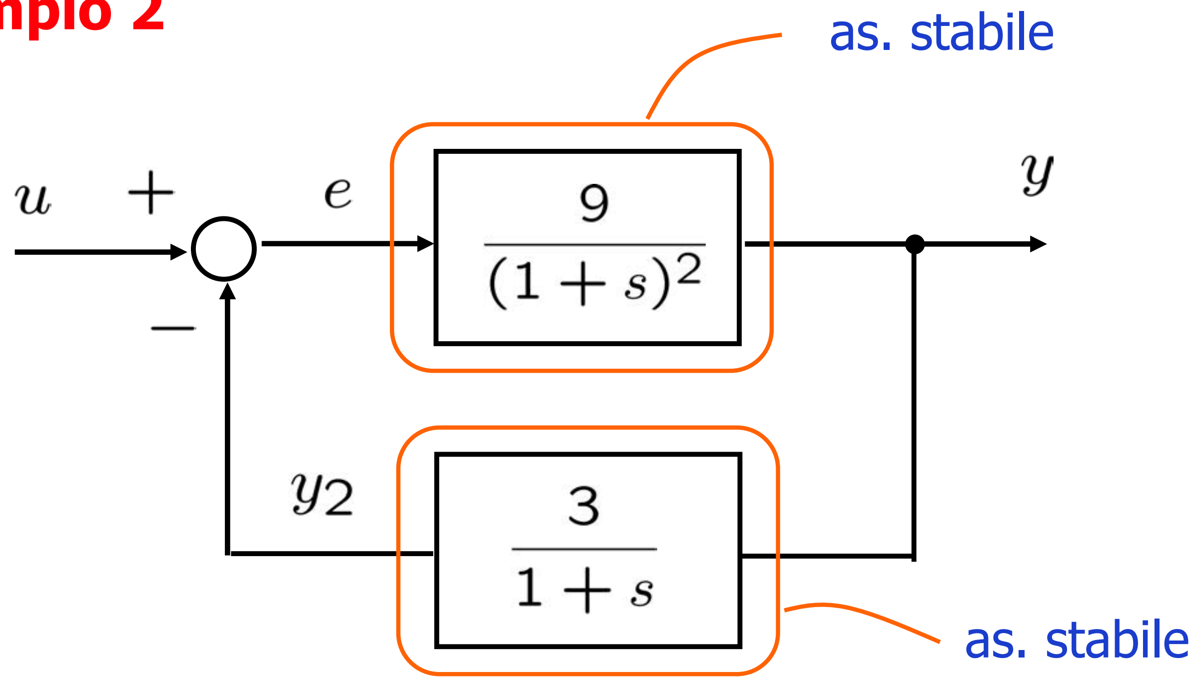
- Esempio 1



$$G(s) = \frac{\dfrac{10}{s-1}}{1+\dfrac{10}{s-1}} = \frac{\dfrac{10}{s-1}}{\dfrac{s-1+10}{s-1}} = \frac{10}{s+9}$$

Asint. stabile

- Esempio 2



$$G(s) = \frac{\dfrac{9}{(1+s)^2}}{1 + \dfrac{27}{(1+s)^3}} = \frac{9(1+s)}{(1+s)^3 + 27}$$

$$\varphi(s) = (1+s)^3 + 27 = s^3 + 3s^2 + 3s + 28$$

$$\begin{array}{c|ccc}
1 & 1 & 3 & 0 \\
2 & 3 & 28 & 0 \\
3 & \alpha & 0 & 0 \\
4 & \beta & 0 & 0
\end{array}$$

r_4

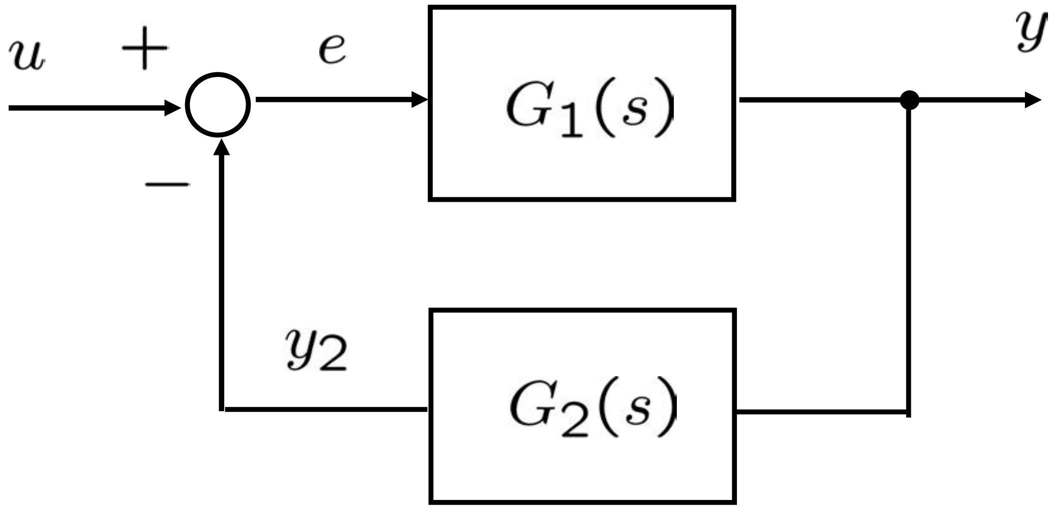
Due variazioni di segno in r_4

$$\alpha = -\frac{1}{3}\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 28 \end{bmatrix} = -\frac{19}{3}$$

$$\beta = 28$$

Instabilità

- Blocchi in retroazione: analisi nel tempo



$$e = u - y$$

$$d_1 = d_2 = 0$$

Perche` (es. a casa)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + b_1 e \\ y = c_1 x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + b_2 y \\ y_2 = c_2 x_2 \end{cases}$$

$$G_1(s) = c_1 (sI - A_1)^{-1} b_1 + d_1 \qquad G_2(s) = c_2 (sI - A_2)^{-1} b_2 + d_2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -b_1 c_2 \\ b_2 c_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [c_1 \;\; 0]\, x \end{cases}$$

- Conclusione blocchi in retroazione

- Sistema complessivo asintoticamente stabile $\not\Leftrightarrow$ Sottosistemi asintoticamente stabili

- Gli autovalori cambiano a causa della connessione in retroazione