

Analisi dei sistemi retroazionati

Prestazioni dei sistemi di controllo

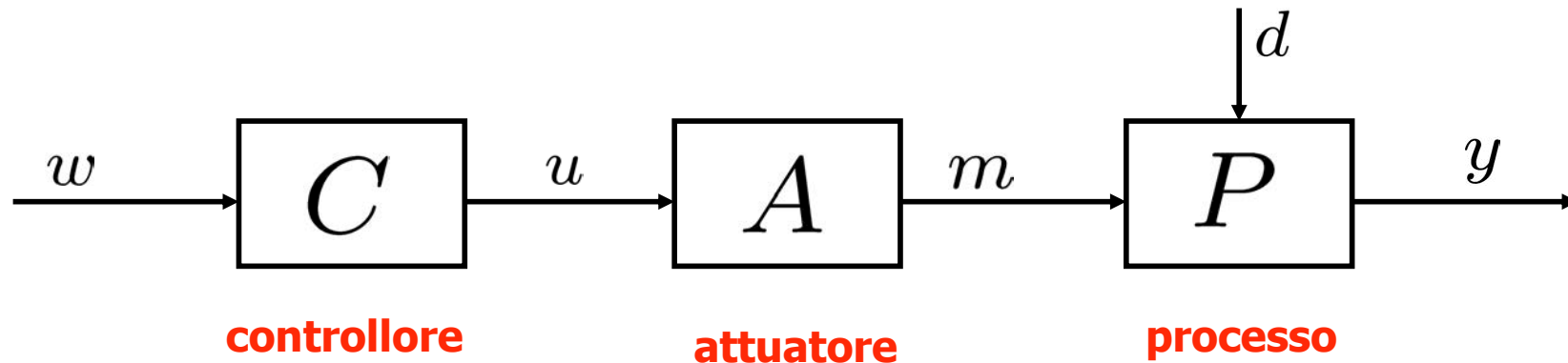
Stabilità a ciclo chiuso: criterio di Nyquist, margini di guadagno e di fase, criterio di Bode

Introduzione

- In questa parte del corso affronteremo lo **studio dei sistemi LTI retroazionati**, introducendo definizioni, proprietà e strumenti che saranno poi utili (ed utilizzati) nella fase di progetto del controllore.
- L'analisi non può essere svolta considerando assieme sistemi a tempo continuo ed a tempo discreto:
 - Gli **strumenti** che abbiamo a disposizione (ad es. i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza [cfr. Parte 8]) e che vedremo nel seguito sono per la maggior parte **adoperabili con profitto solo** nel caso di **sistemi a tempo continuo**.
- Per questo motivo in ciò che segue consideriamo **solamente sistemi LTI a tempo continuo**.

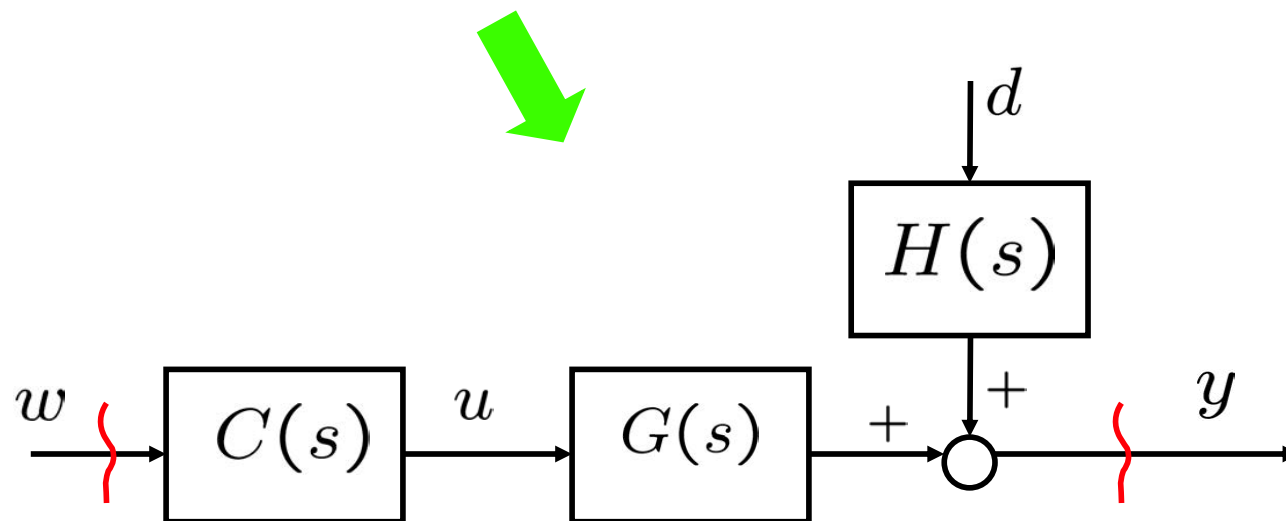
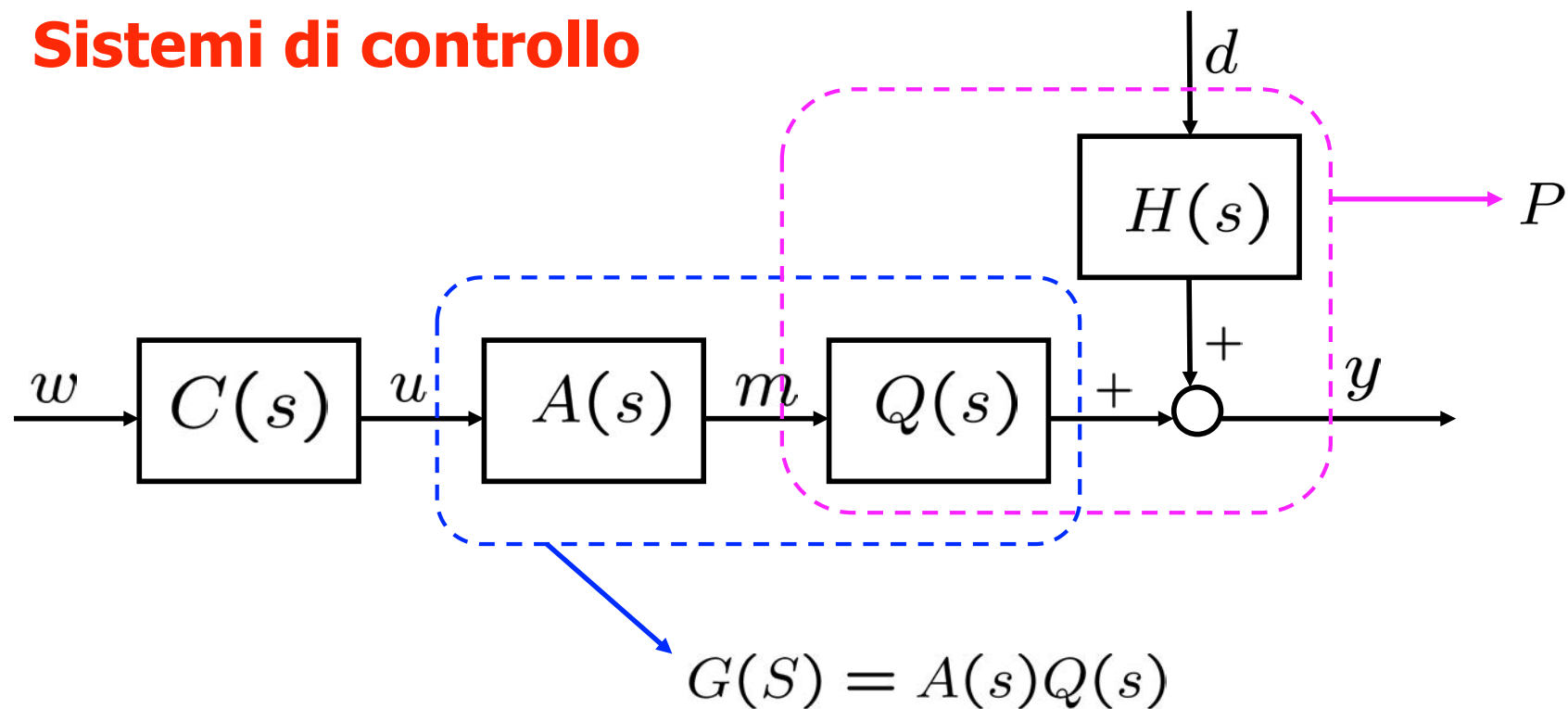
- **Sistemi di controllo**

- **Anello aperto**



Ipotesi: C, A, P sistemi
dinamici
lineari

• Sistemi di controllo



- **Prestazioni ideali**

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$

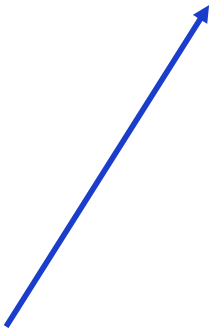


$$C(s)G(s) = 1$$



$$C(s) = G(s)^{-1}$$

Passa-tutto
con $\mu = 1$



Quindi il controllore
"perfetto" in a.a. deve
invertire la dinamica
del sistema

● Limitazioni

- cancellazioni polo-zero nel semipiano destro ($\text{Re} \geq 0$)
- non si può stabilizzare in a.a. un sistema instabile
- $C(s)$ potrebbe avere più zeri che poli ($\Rightarrow$ non realizzabile)
- scarsa robustezza nei confronti di incertezze su $G(s)$

● Esempi

$$G(s) = \frac{10(1 + s)}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)}$$

$$C_0(s) = \frac{0.1(1 + 2s)(1 + 0.1s)}{1 + s} \longrightarrow \text{Non realizzabile}$$

$$C_1(s) = \frac{0.1(1 + 2s)(1 + 0.1s)}{(1 + s)(1 + 0.01s)} \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\longrightarrow F_1(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = C_1(s)G(s) = \frac{1}{1 + 0.01s}$$

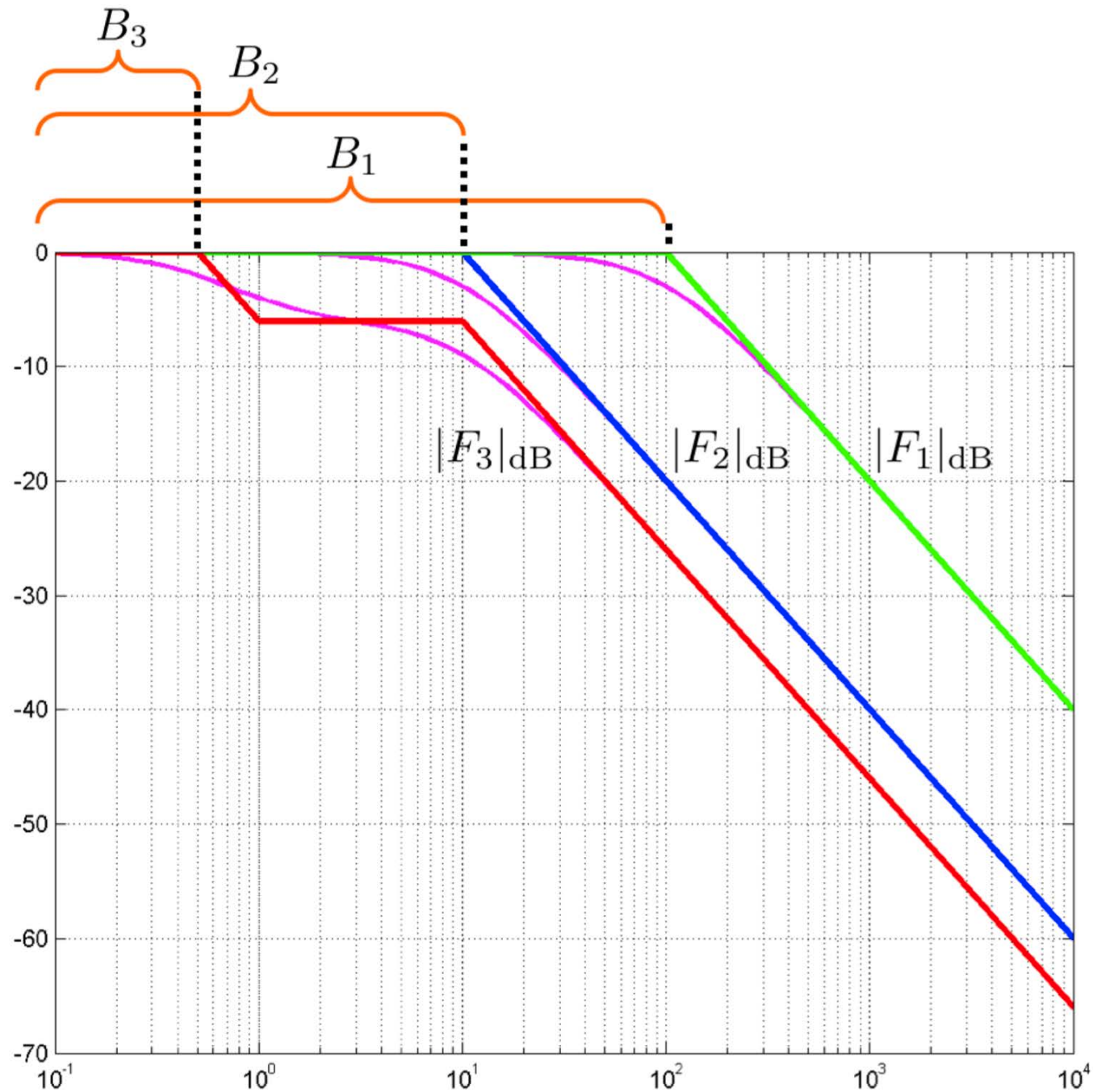
Filtro P.B. con $B \simeq [0, 100]$

$$C_2(s) = \frac{0.1(1 + 2s)}{1 + s} \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

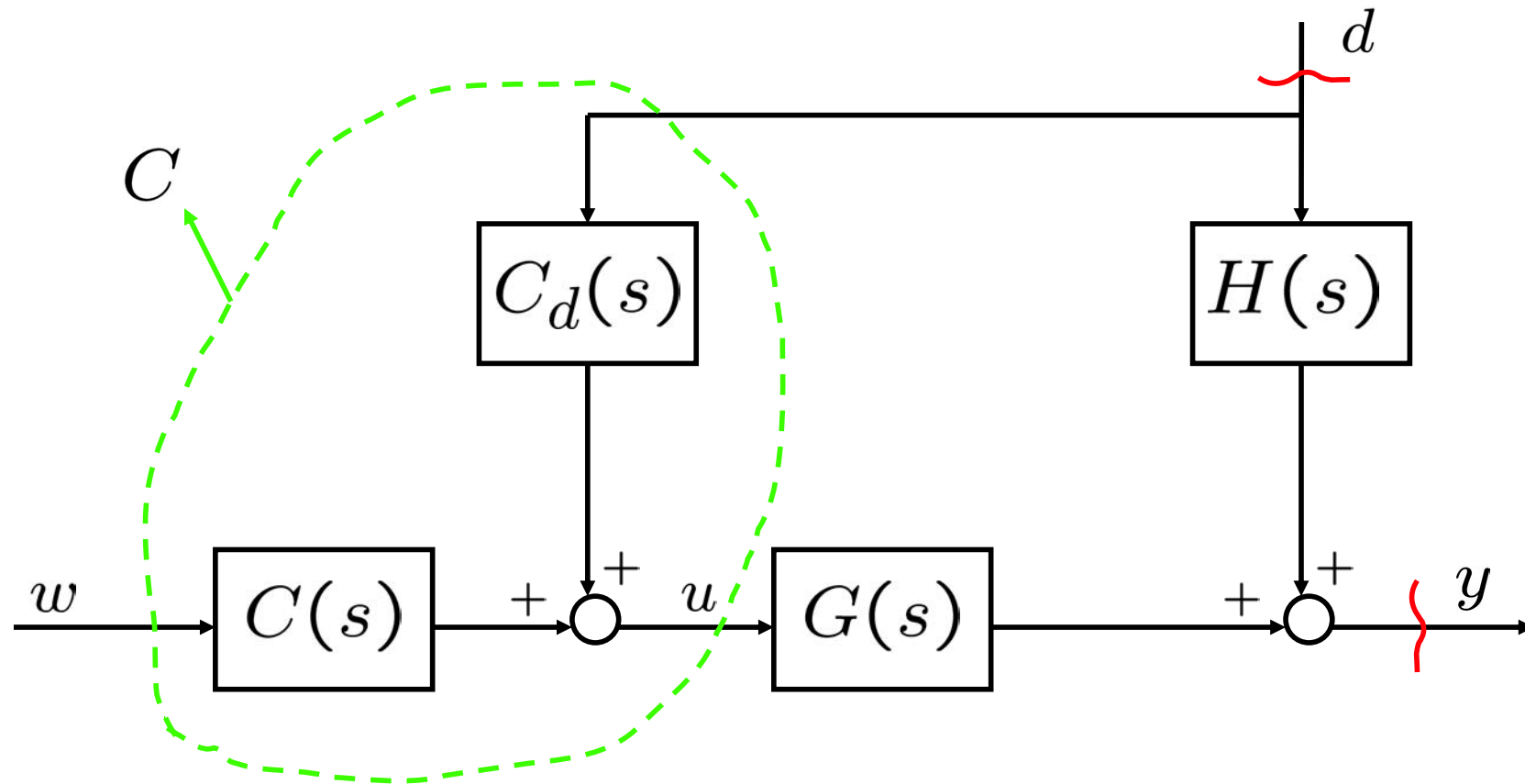
$$\longrightarrow F_2(s) = \frac{1}{1 + 0.1s} \quad \text{Filtro P.B. con } B \simeq [0, 10]$$

$$C_3(s) = 0.1 \longrightarrow \text{Realizzabile}$$

$$\longrightarrow F_3(s) = \frac{1 + s}{(1 + 2s)(1 + 0.1s)} \quad \text{Filtro P.B. con } B \simeq [0, 0.5]$$



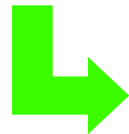
- Compensazione del disturbo in a.a.



Si presuppone quindi la misurabilità del disturbo $d(t)$

- **Prestazione ideale**

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = 0 = H(s) + C_d(s) \cdot G(s)$$



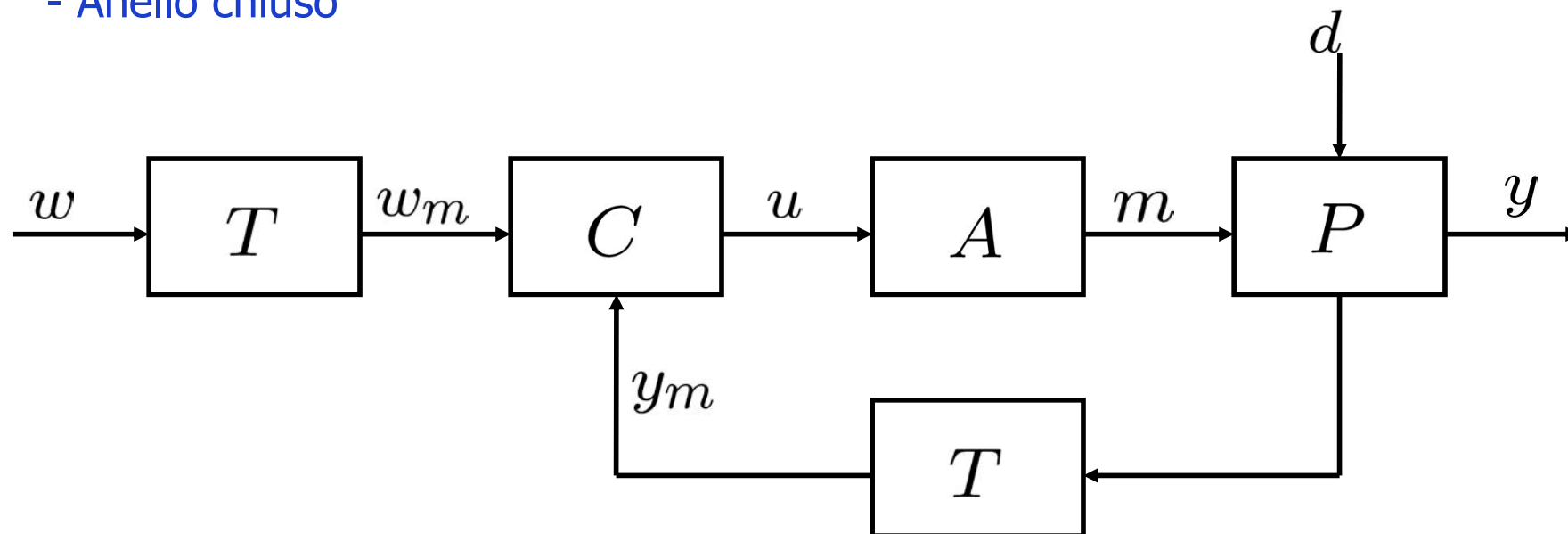
Si impone la perfetta compensazione del disturbo

$$\longrightarrow C_d(s) = -G(s)^{-1}H(s)$$

Limitazioni: analoghe alle precedenti

● Sistemi di controllo

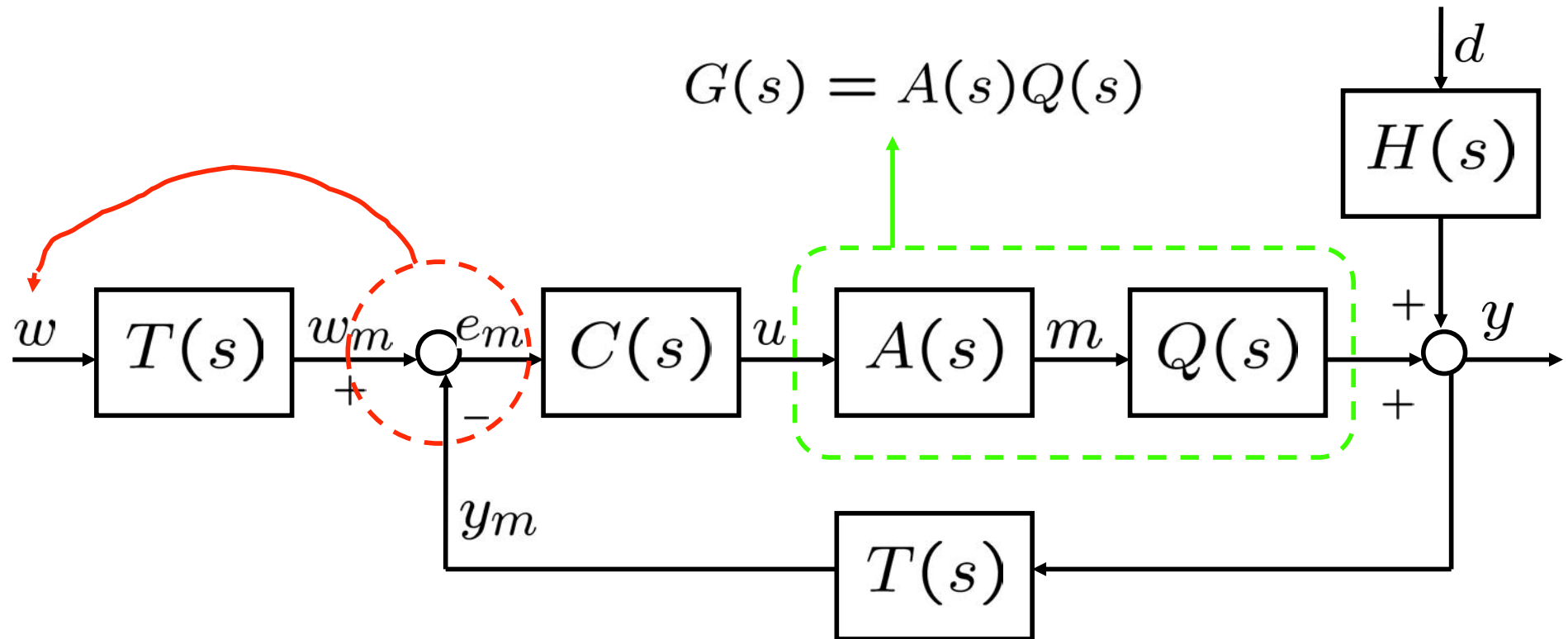
- Anello chiuso



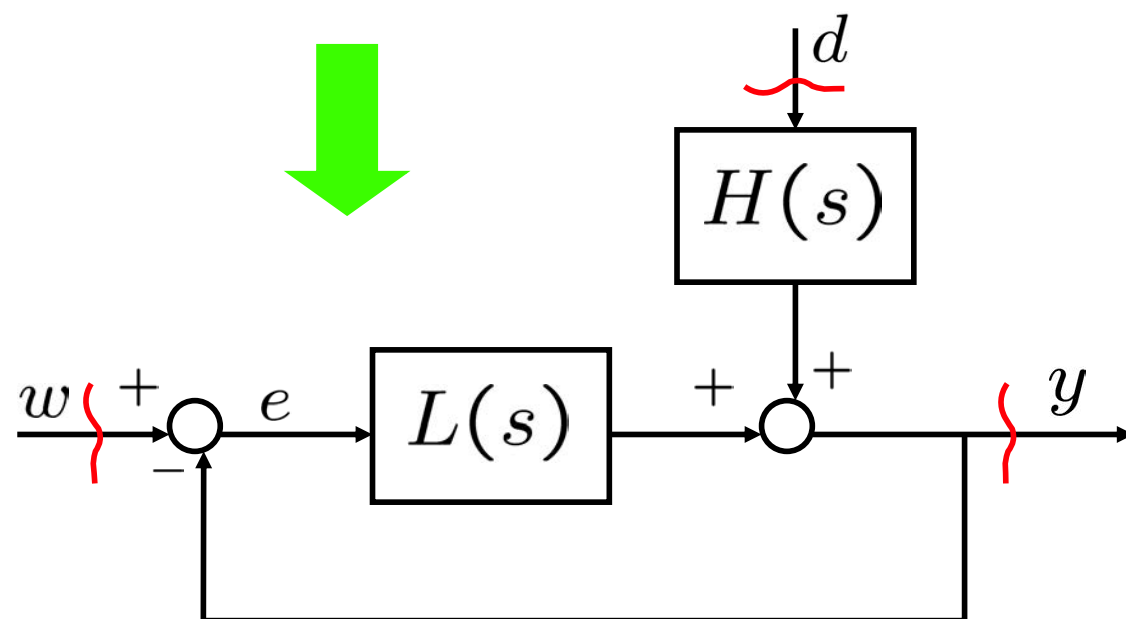
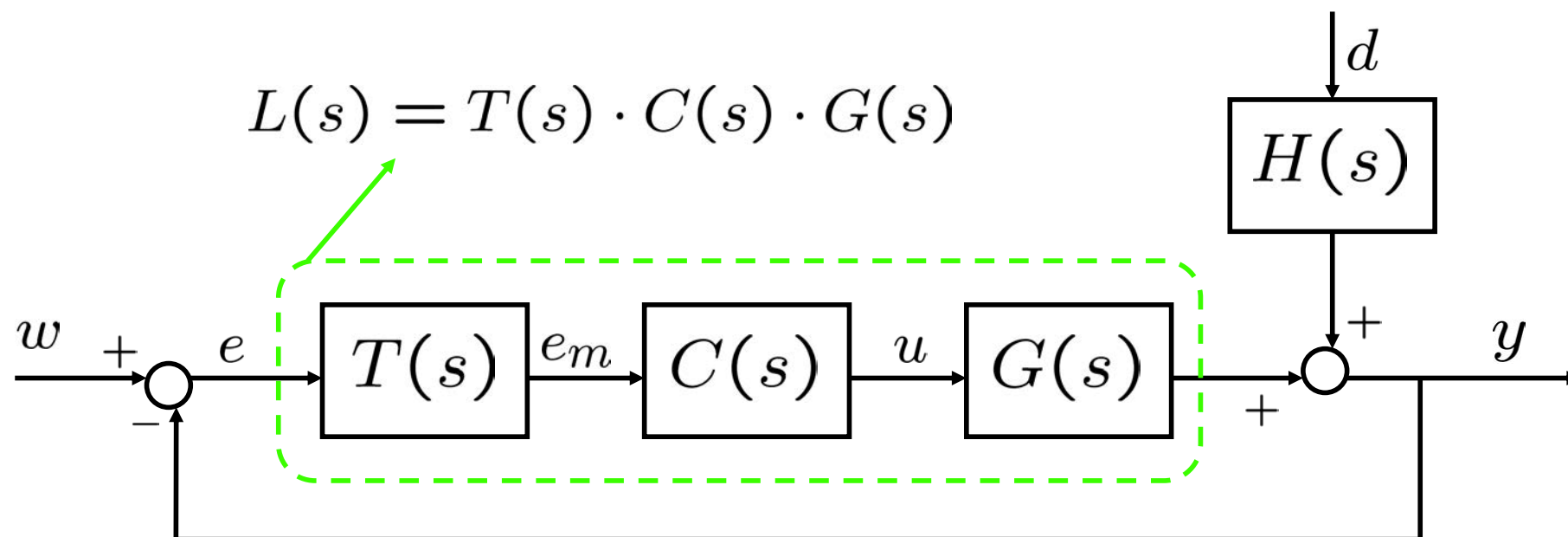
Trasduttore

Ipotesi: - T, A, C, P sistemi lineari

- azione di controllo basata su $w_m - y_m = e_m$



$$\begin{aligned}
 E_m(s) &= W_m(s) - Y_m(s) = \\
 &= T(s)[W(s) - Y(s)] = T(s) \cdot E(s)
 \end{aligned}$$



- **Prestazioni ideali**

$$F(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = 1$$

$$M(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = 0$$

In realtà:

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \neq \underline{1}$$

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)} \neq \underline{0}$$

● Soluzione realistica

- $F(s)$: Filtro passa-basso con banda passante suff. ampia e guadagno $\mu_F = 1$
- $M(s)$: $|M(j\omega)| \simeq 0$
nella banda di ω in cui lo spettro di $d(t)$ è significativo

● Analisi di sistemi retroazionati

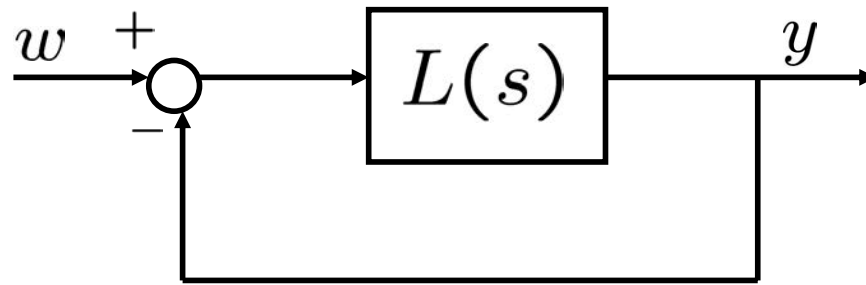
- Asintotica stabilità in anello chiuso

- Prestazioni in anello chiuso

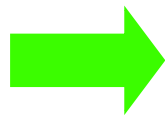

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$


$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)}$$

● Stabilità di sistemi retroazionati



$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)}$$



$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s) + N(s)}$$

Asintotica stabilità



Le radici di
 $\varphi(s) + N(s)$
 hanno $\text{Re} < 0$

- **Diagramma di Nyquist**

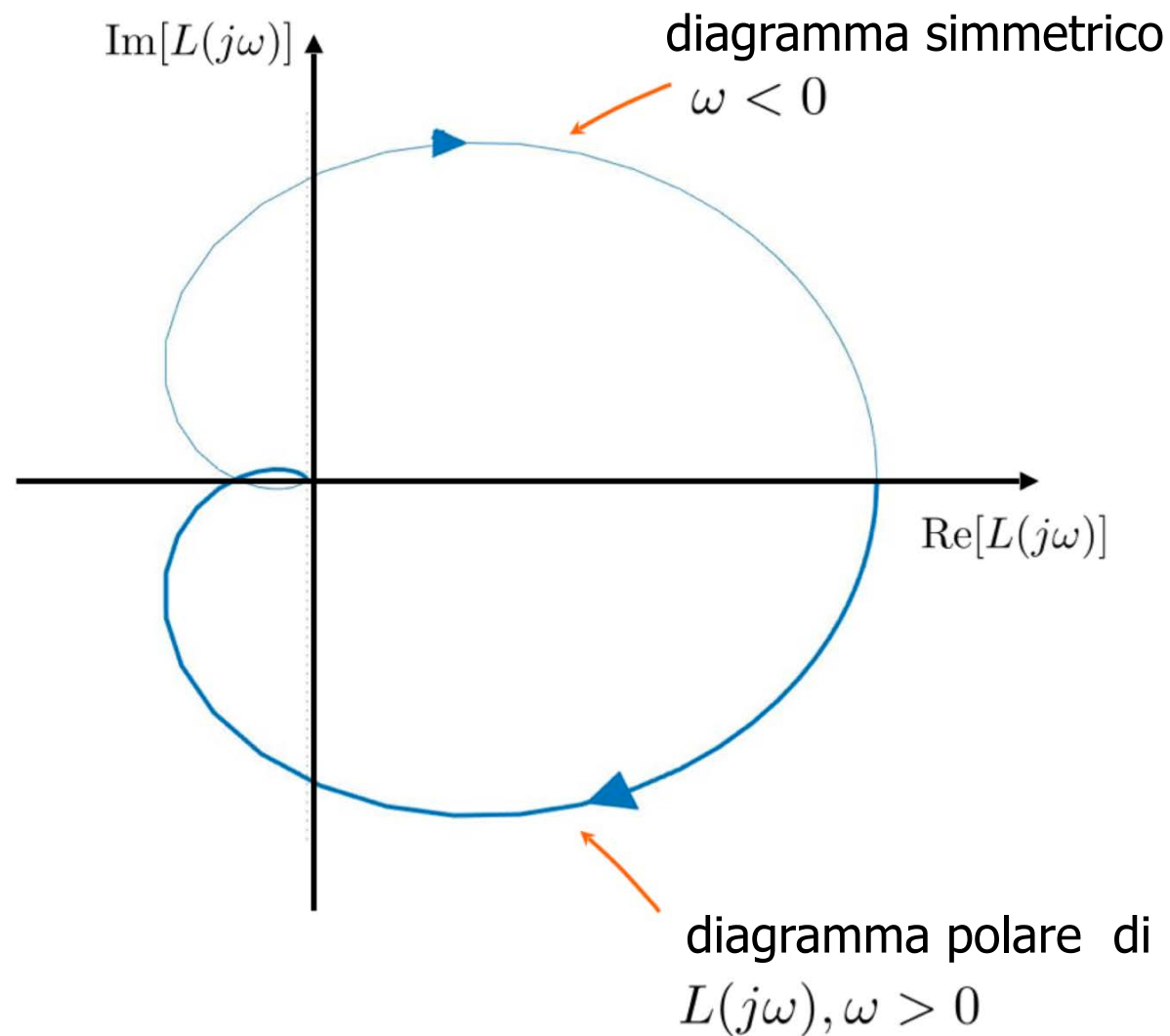
┌ = D.D.N = grafico di $L(j\omega)$ per $-\infty < \omega < +\infty$

= diagramma polare ($\omega \geq 0$)

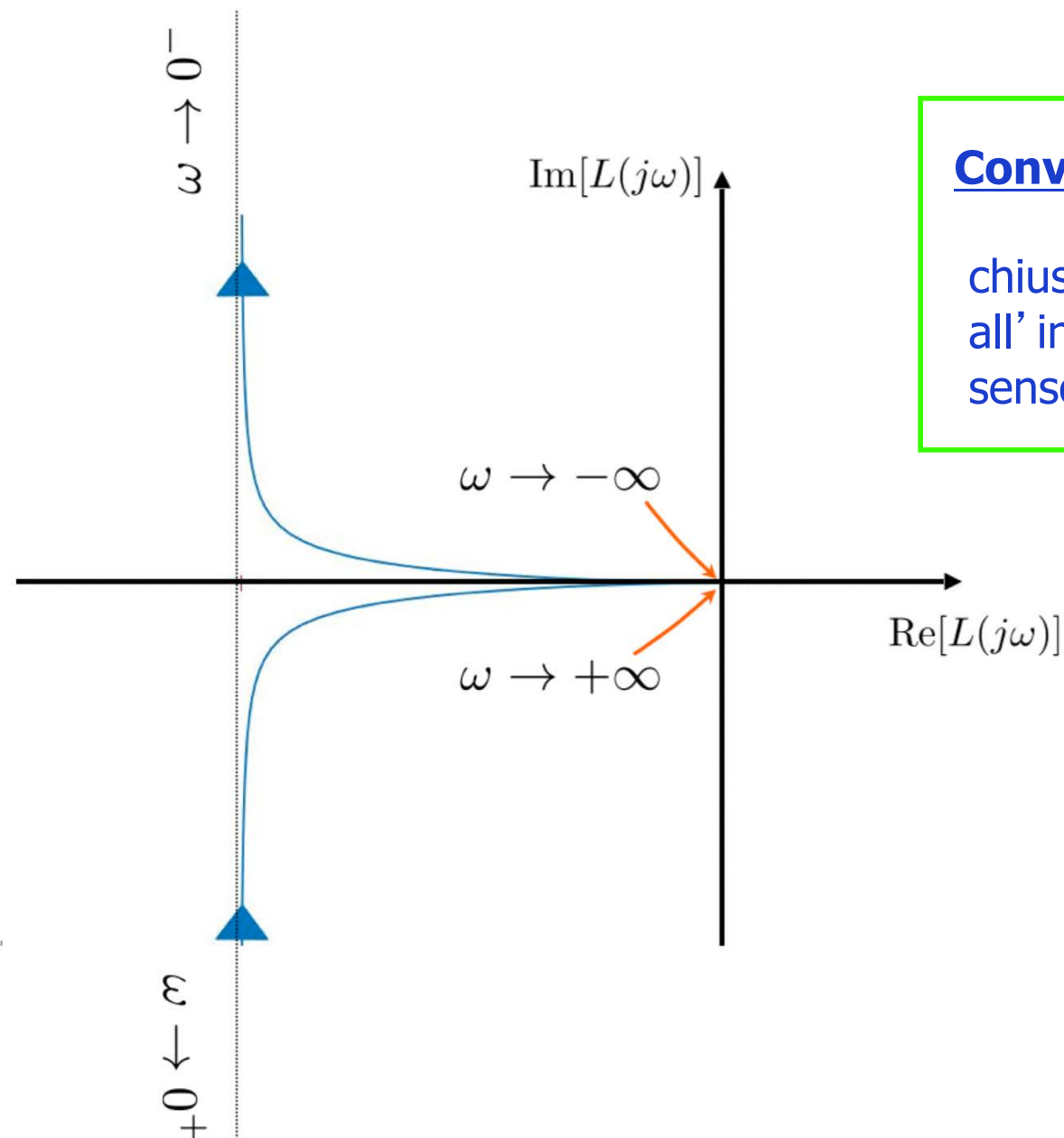
+

simmetrico rispetto all'asse reale

Osservazione: $L(-j\omega) = L^*(j\omega)$



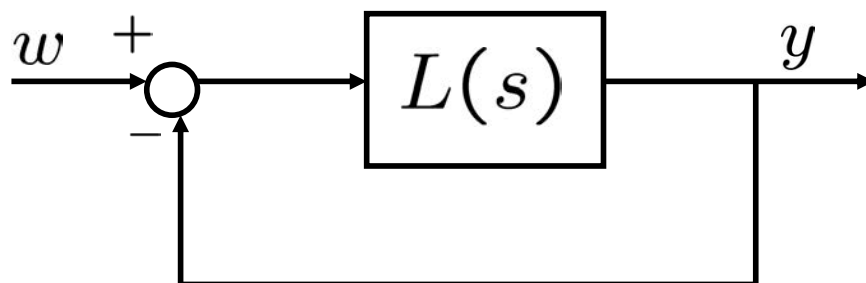
Attenzione:



Convenzione:

chiusura
all' infinito in
senso orario

● Criterio di Nyquist – versione semplificata



$$1 + L(s) = 0$$

- Γ D.D.N. di $L(s)$
- N num. di giri antiorari di Γ intorno al punto -1
- P num. di poli di $L(s)$ con $\text{Re} > 0$

Asintotica stabilità



N ben definito

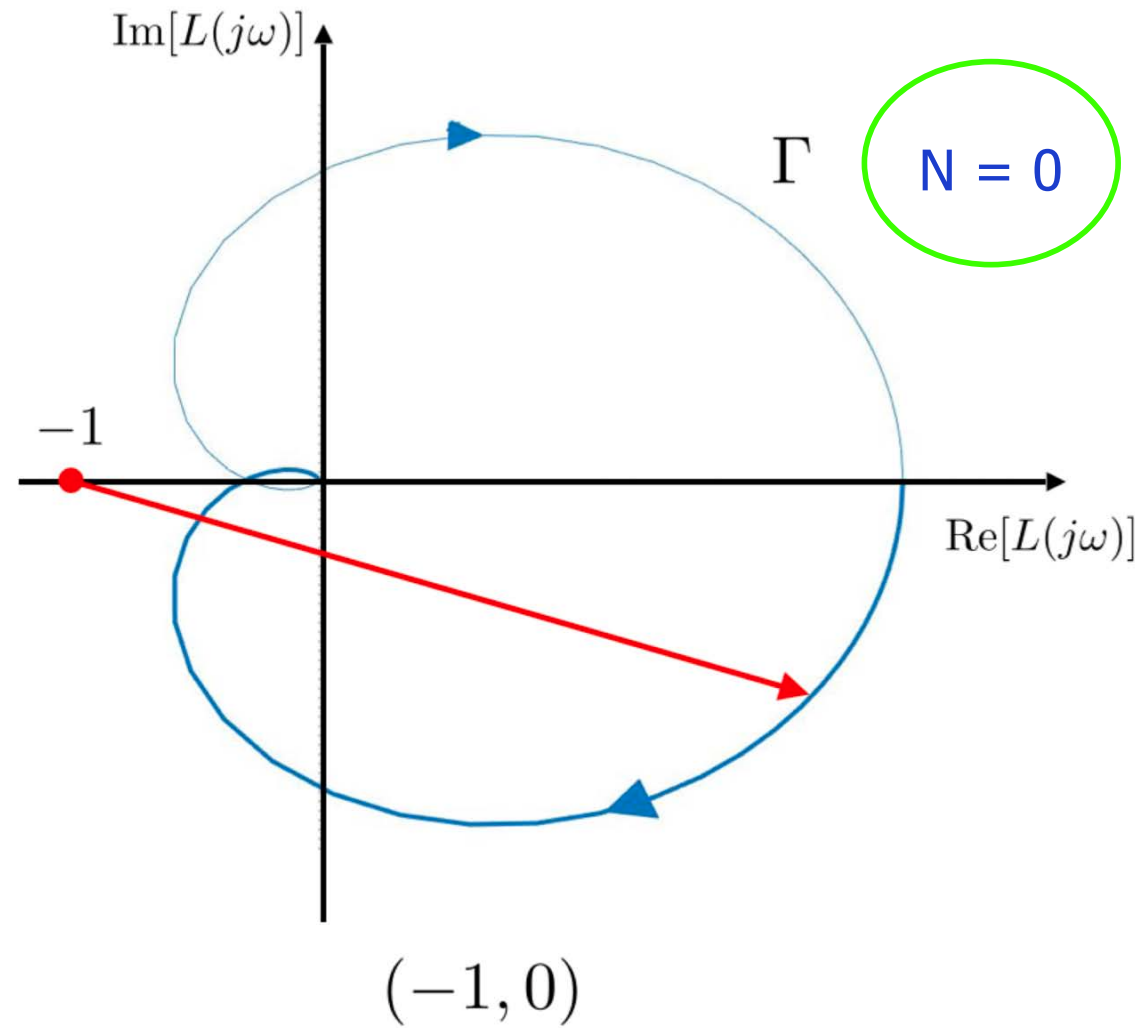
$N = P$

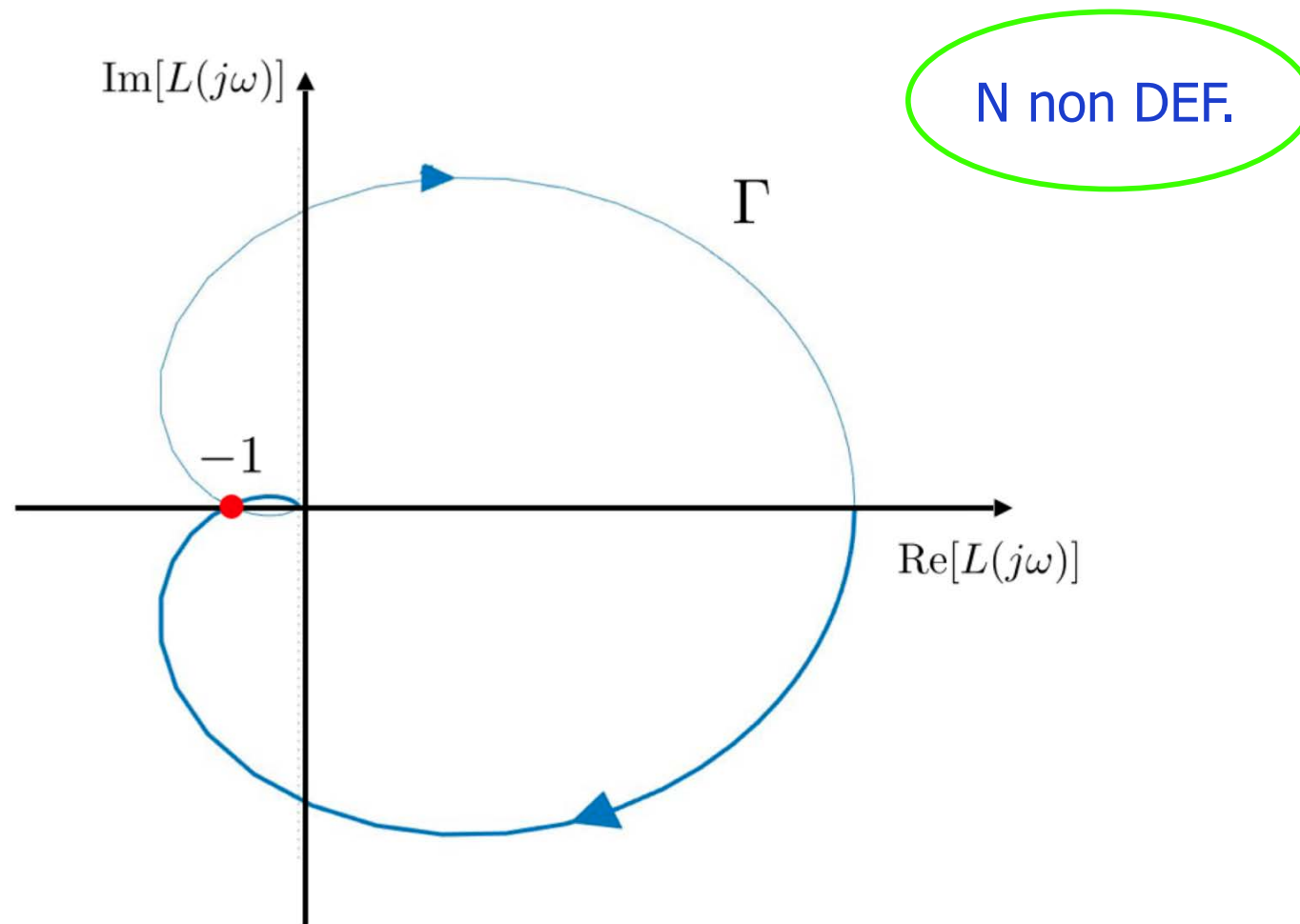
● Osservazioni

- conteggio di N ?

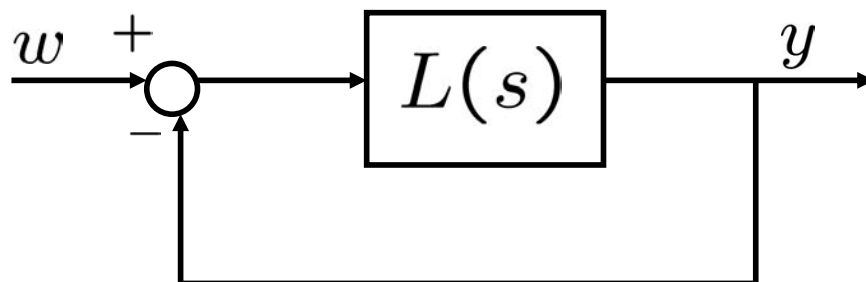
- N non definito  non as. stabilità

- $N < 0$  non as. stabilità





● Criterio di Nyquist: formulazione completa



$$1 + L(s) = 0$$

- Γ D.D.N. di $L(s)$
- N num. di giri antiorari di Γ intorno al punto -1
- P num. di poli di $L(s)$ con $\text{Re}>0$

n_p : numero di poli con $\text{Re}>0$ a ciclo chiuso

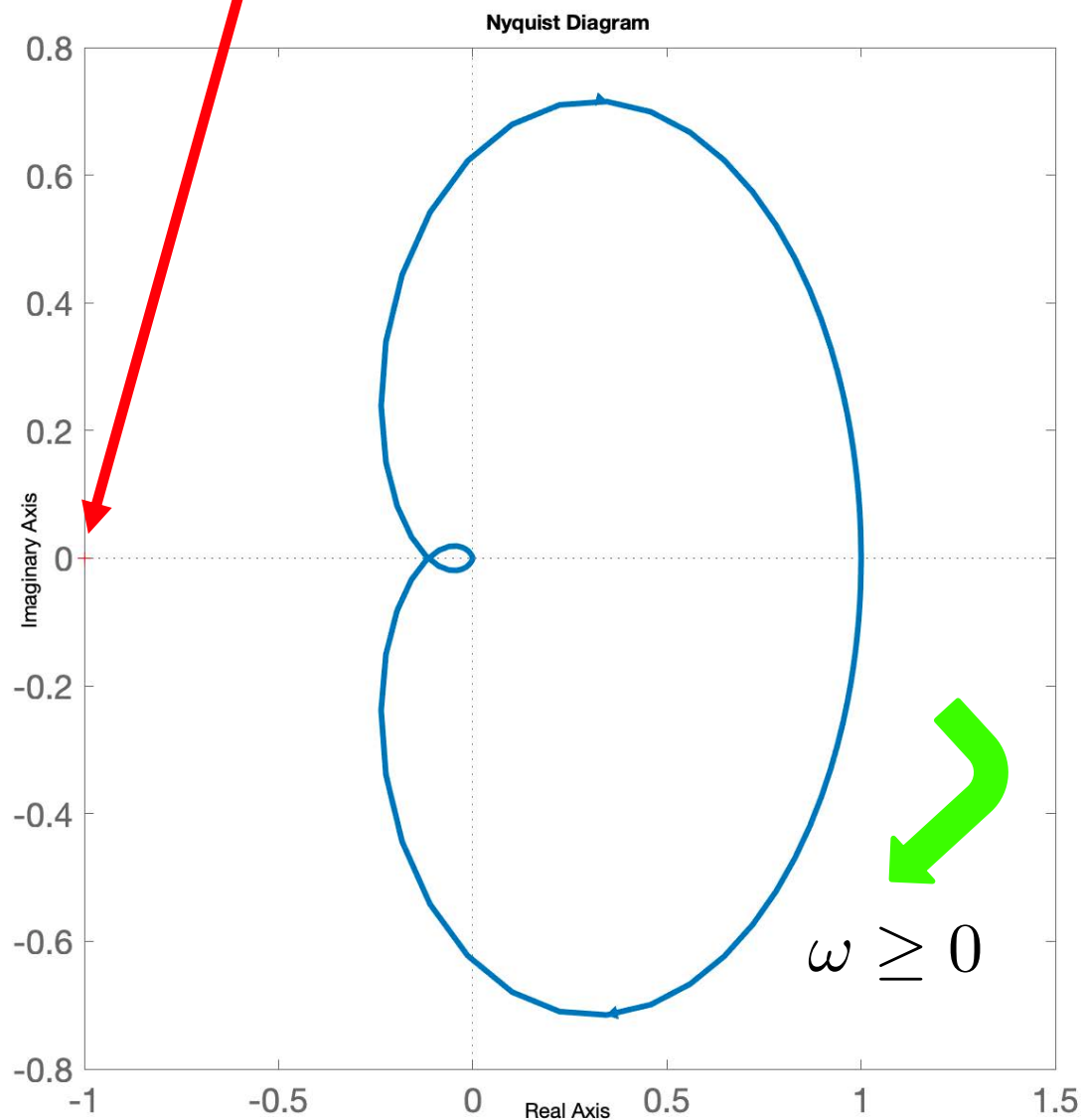


N ben definito

$$n_p = P - N$$

$$(-1 + j0)$$

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 10s)(1 + 7s)(1 + 5s)}$$



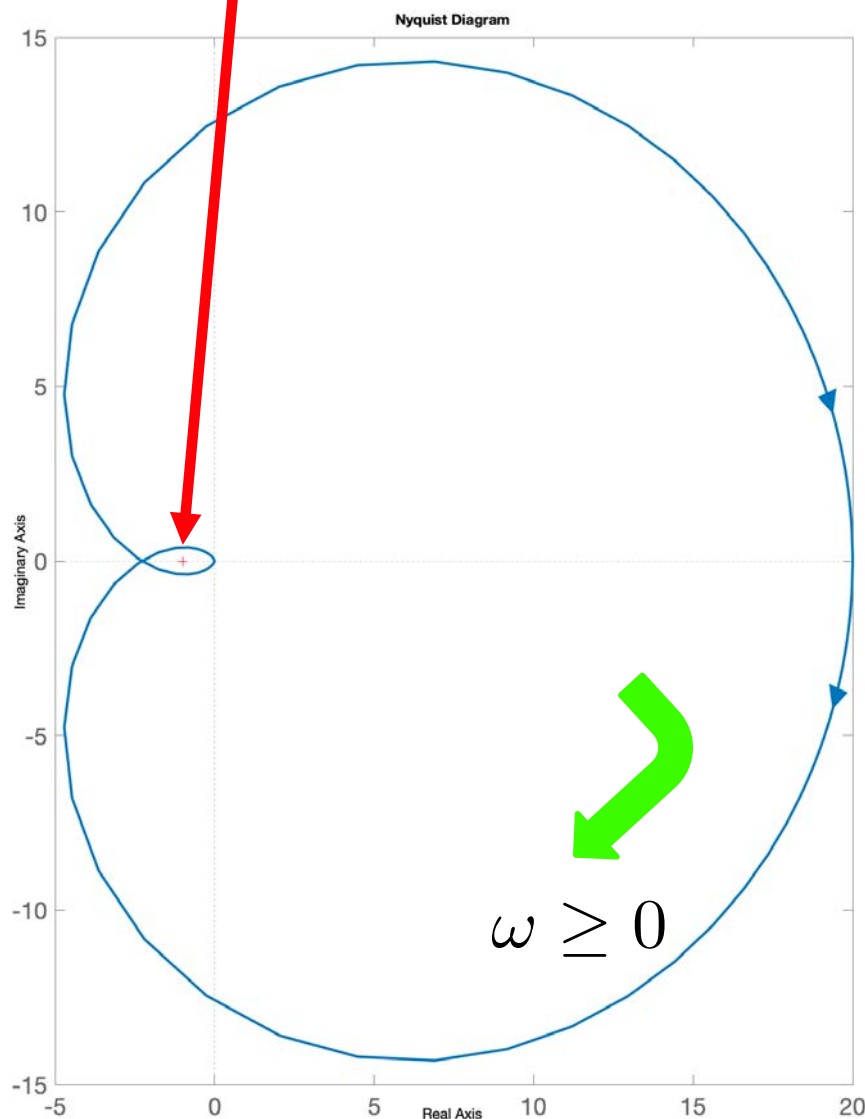
$P=0$ ed $N=0$



Sistema
asintoticamente
stabile a ciclo chiuso

$$(-1 + j0)$$

$$G(s) = \frac{20}{(1 + 10s)(1 + 7s)(1 + 5s)}$$



$P=0$ ed $N = -2$



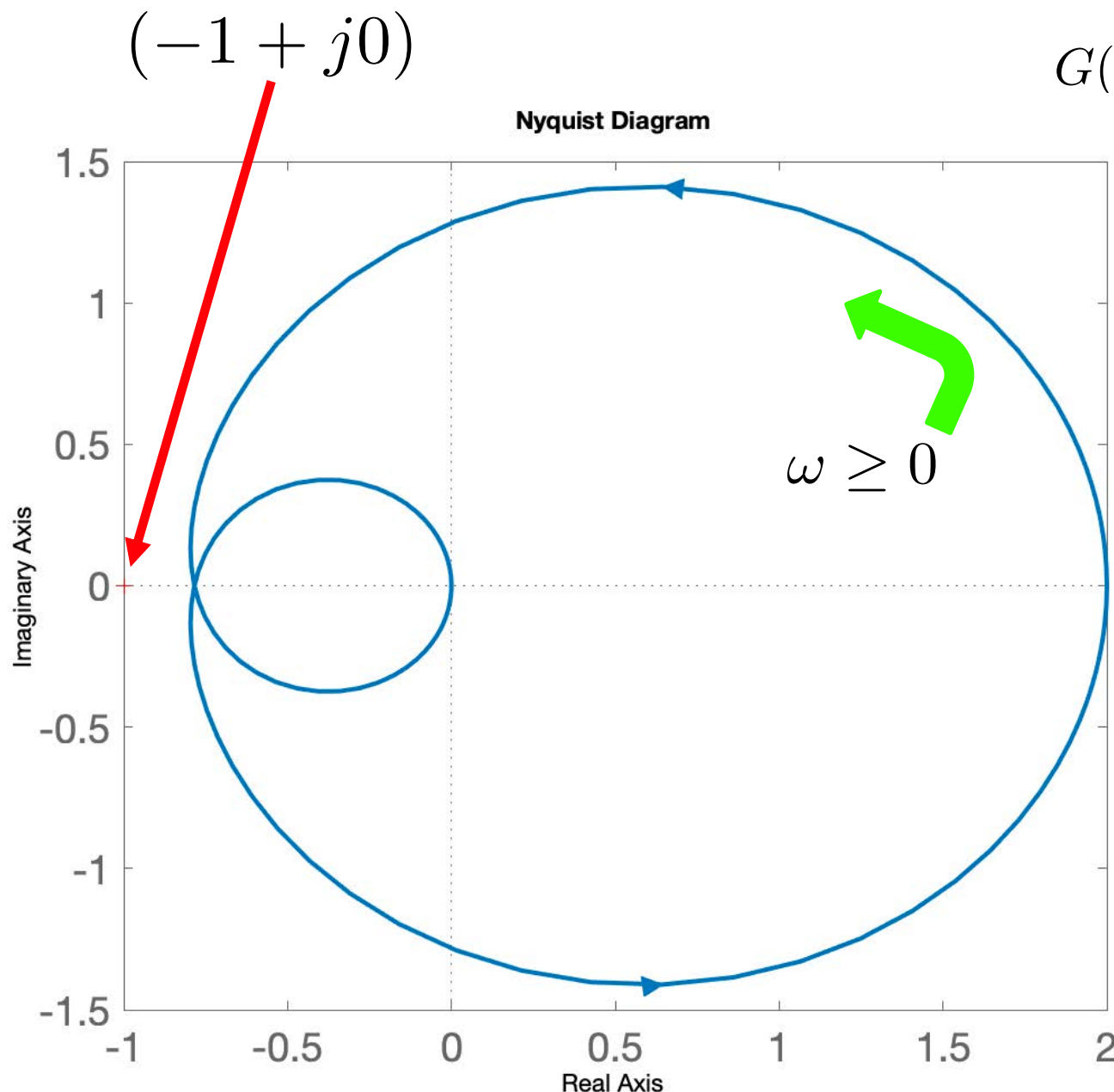
Sistema instabile a ciclo chiuso!

Ci sono $P-N$ poli instabili a ciclo chiuso!

$$p_1 \approx -0.535$$

$$p_{2,3} \approx +0.046 \pm j 0.332$$

$$G(s) = \frac{2(1 + 2s)}{\left(1 - \frac{s}{10}\right)(1 - 5s)}$$

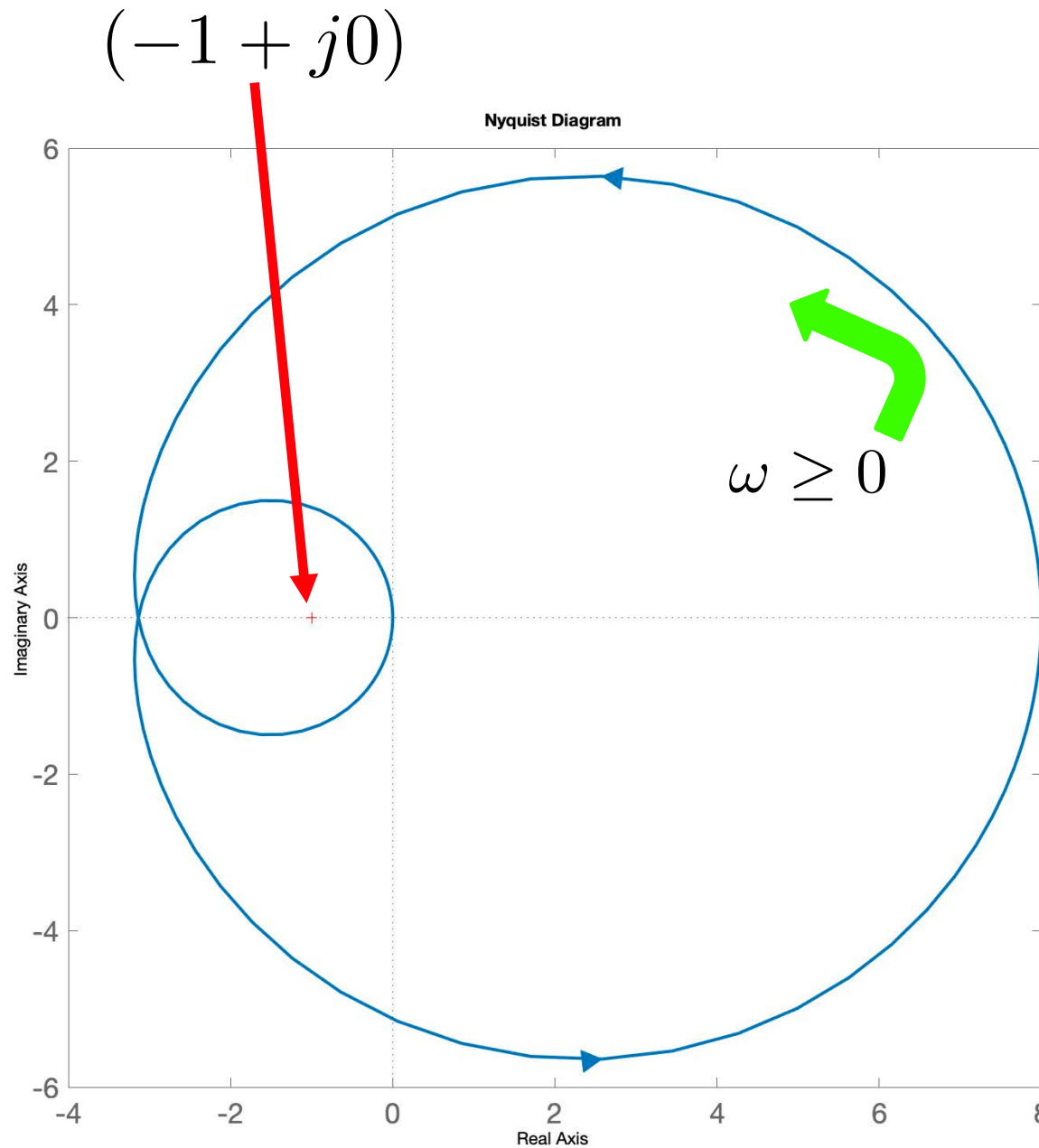


$P=2$ ed $N = 0$

Sistema instabile a
ciclo chiuso!

Ci sono $P-N$ poli
instabili a ciclo
chiuso!

$$p_{1,2} \approx +1.100 \pm j 2.189$$



$$G(s) = \frac{8(1 + 2s)}{\left(1 - \frac{s}{10}\right)(1 - 5s)}$$

$P=2$ ed $N = +2$

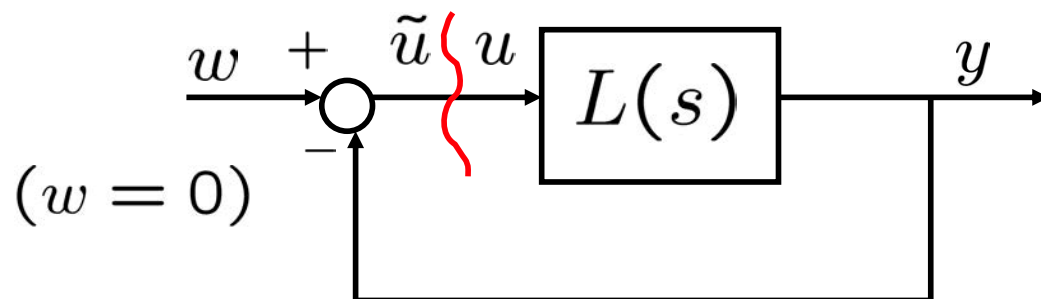


Sistema
asintoticamente
stabile a ciclo chiuso

$$p_1 \approx -0.860$$

$$p_2 \approx -20.940$$

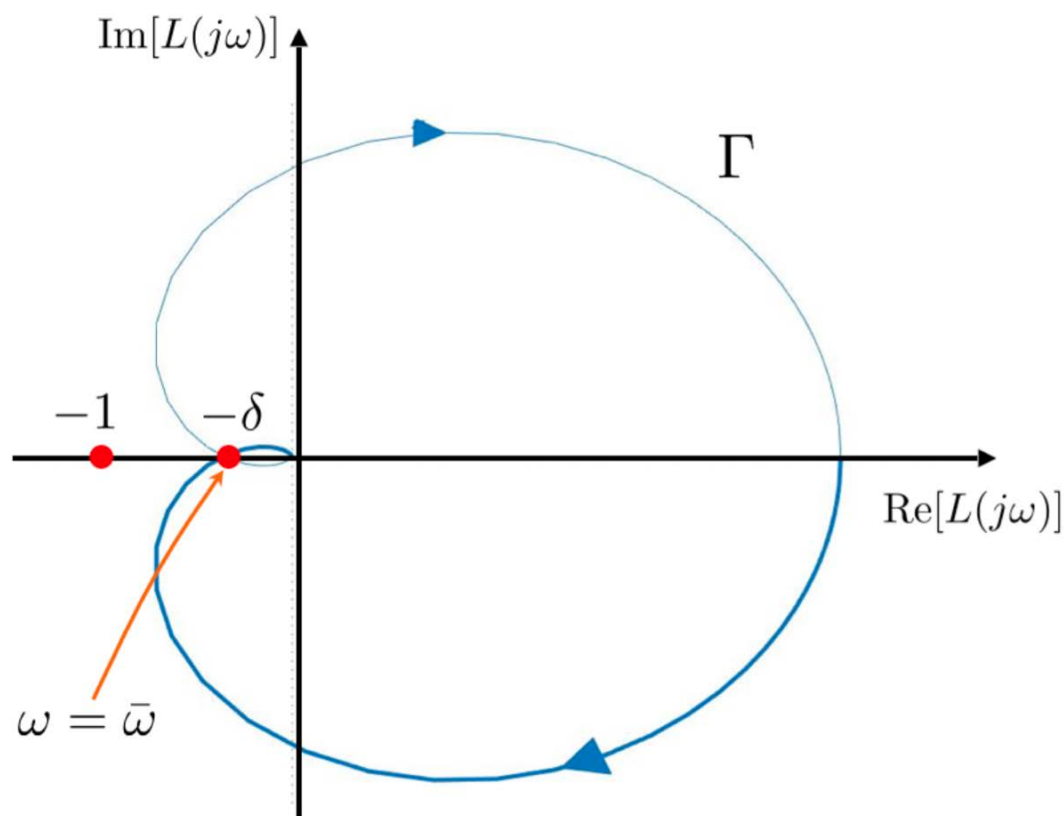
• Giustificazione intuitiva



$L(s)$ As. stabilità



$P = 0$



$$L(j\bar{\omega}) = -\delta$$



$$|L(j\bar{\omega})| = \delta$$

$$\arg L(j\bar{\omega}) = -180^\circ$$

$$u(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\longrightarrow y(t) \simeq |L(j\bar{\omega})| \sin[\bar{\omega}t + \arg(L(j\bar{\omega}))]$$

$$= \delta \sin(\bar{\omega}t - \pi)$$

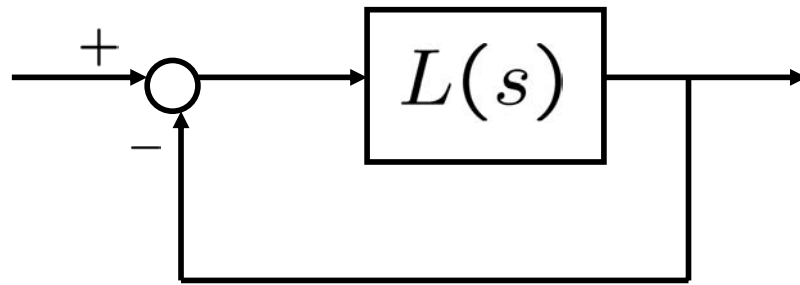
$$= -\delta \sin(\bar{\omega}t)$$

$$\longrightarrow \tilde{u}(t) = \delta \sin(\bar{\omega}t)$$

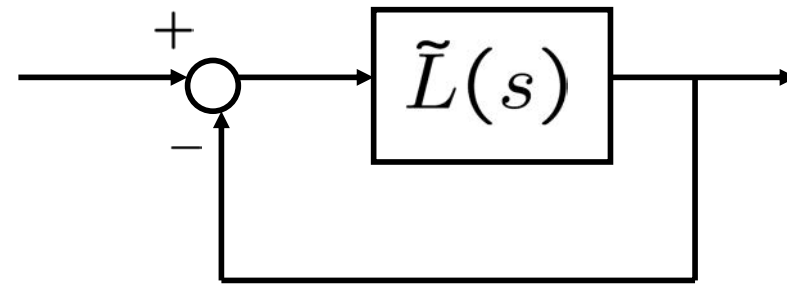
Quindi:

- $\delta > 1$ $\longrightarrow$ instabilità N $\neq$ 0 (= P)
- $\delta < 1$ $\longrightarrow$ as. Stabilità N = 0 (= P)
- $\delta = 1$ $\longrightarrow$ non as. Stabilità N non definito

- **Stabilità di sistemi retroazionati incerti**



Modello nominale



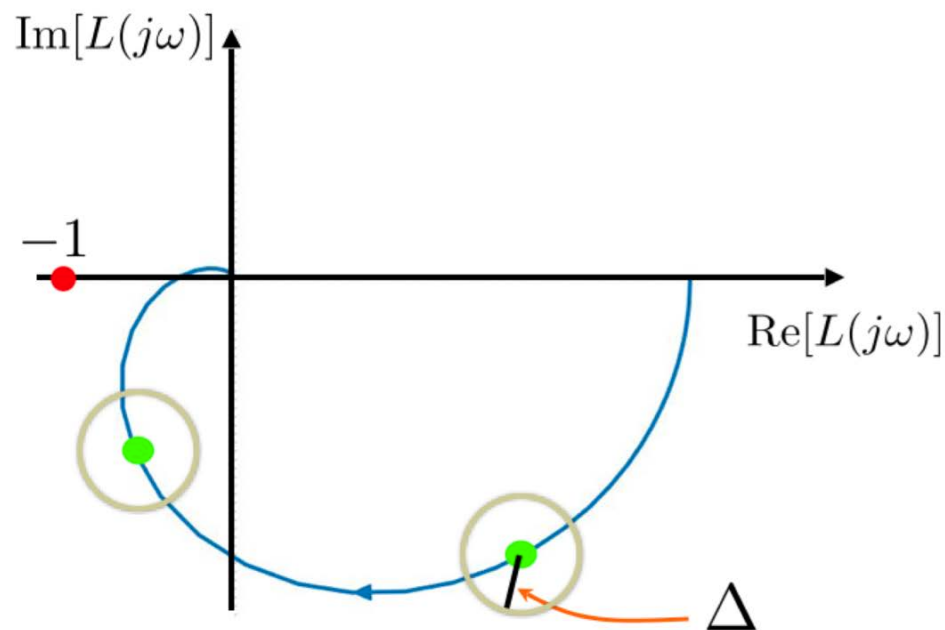
Modello “vero”

- In generale: $\tilde{L}(s) \neq L(s)$
- Stabilità robusta:

garanzia di stabilità anche in presenza di incertezza

● Tipici modelli dell'incertezza

- $\tilde{L}(s) = L(s) + \delta L(s) \quad , \quad |\delta L(j\omega)| \leq \Delta$



- $\tilde{L}(s) = K \cdot L(s) \quad , \quad 0 < K < \bar{K}$

● Indicatori di stabilità robusta

Sono parametri che misurano:

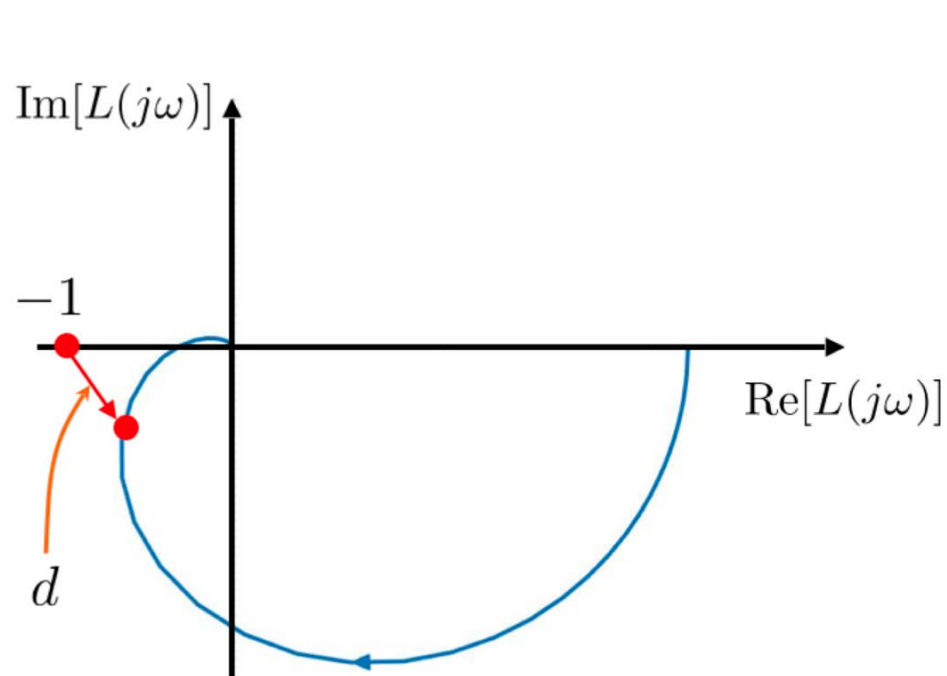
- l'ampiezza delle perturbazioni per cui è garantita la stabilità
- la “distanza” del modello nominale dall'instabilità

- **Ipotesi**

- asintotica stabilità in condizioni nominali

- $P=0$ Asintotica stabilità  $N = 0$

● Un indicatore di robustezza



Distanza di Γ dal punto -1

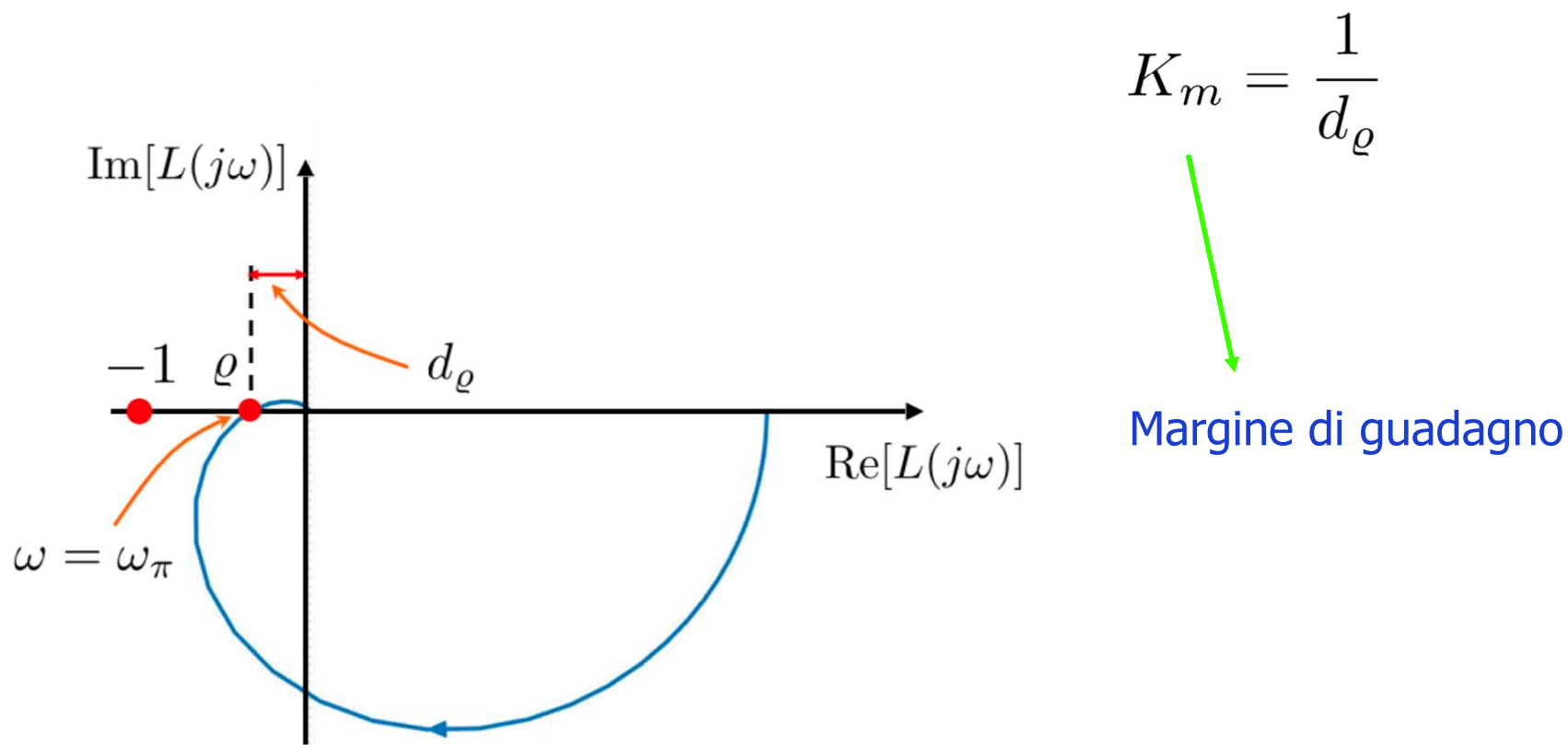
Margine di stabilità vettoriale

$$d = \min_{\omega} |1 + L(j\omega)|$$



Difetto: non è ricavabile direttamente dai diagrammi di Bode di $L(j\omega)$

• Margine di guadagno

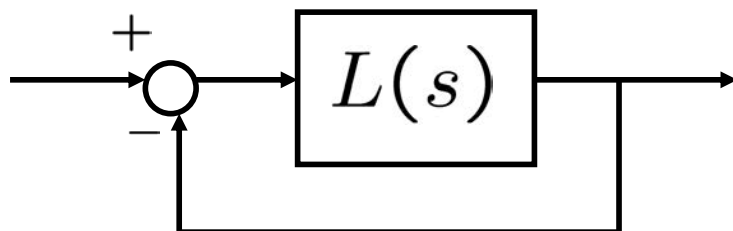


$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

$$K_m = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

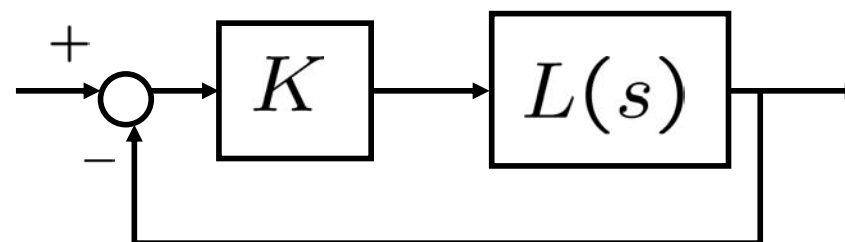
● Interpretazione

Nominale



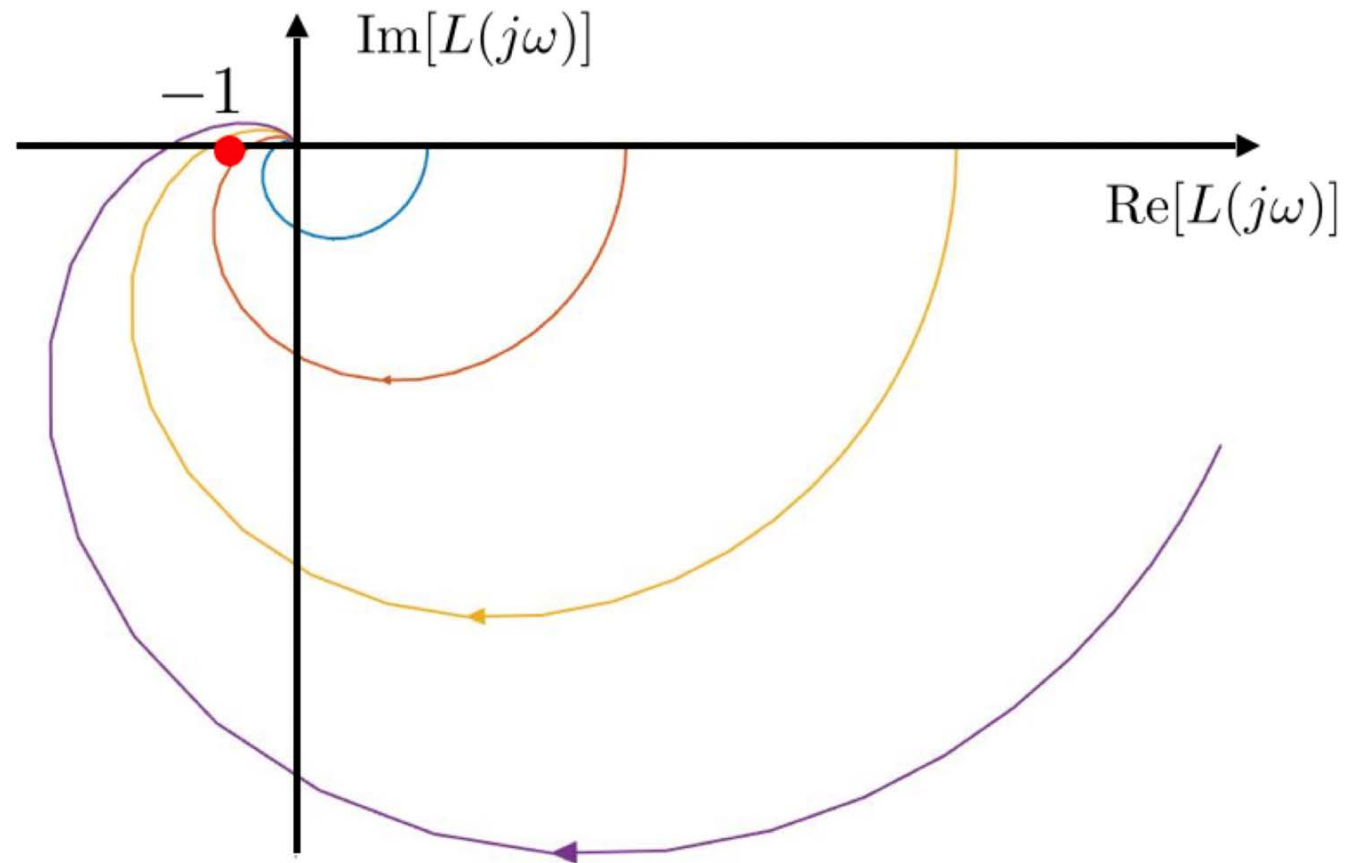
$$K_m > 1$$

“vero”

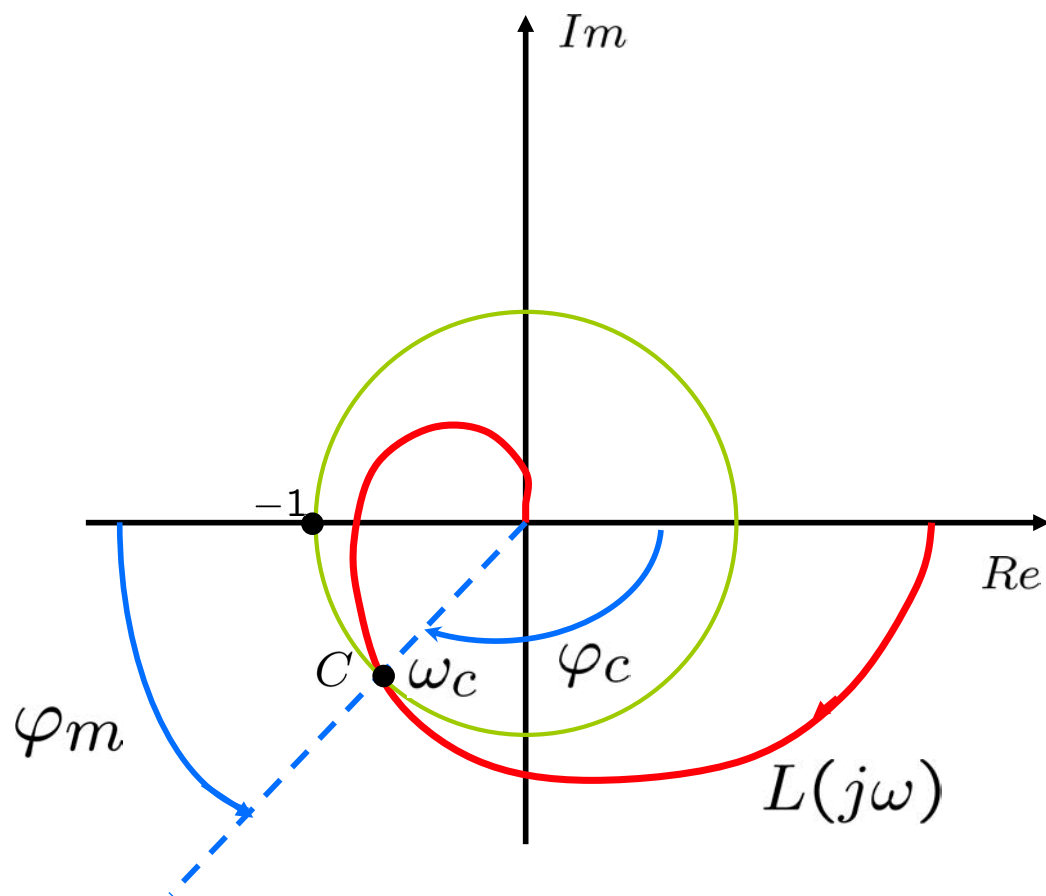


$$\text{As.stabilità: } 0 < K < K_m$$

K_m è un indicatore di robustezza rispetto ad incertezze sul guadagno d'anello



● Margine di fase



NB: si noti che $\varphi_c < 0$ in accordo con la convenzione introdotta in Parte 8 (#55-58)

$$|L(j\omega_c)| = 1 = 0dB$$

$$\varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$

$$\varphi_m = \varphi_c - (-180^\circ)$$

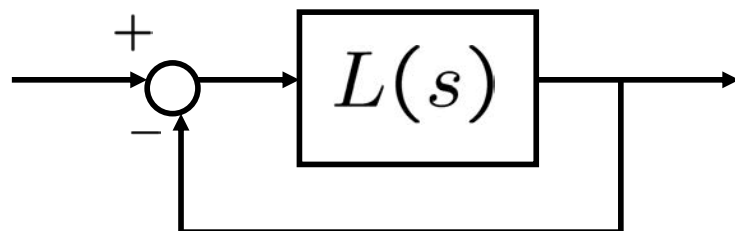
Margine di fase

ω_c : pulsazione critica

φ_c : fase critica

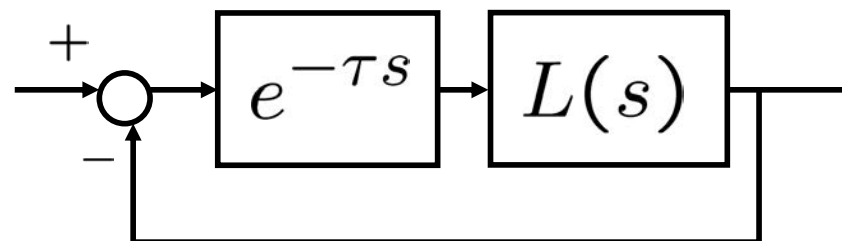
● Interpretazione

Nominale



$$\varphi_m > 0^\circ$$

“vero”



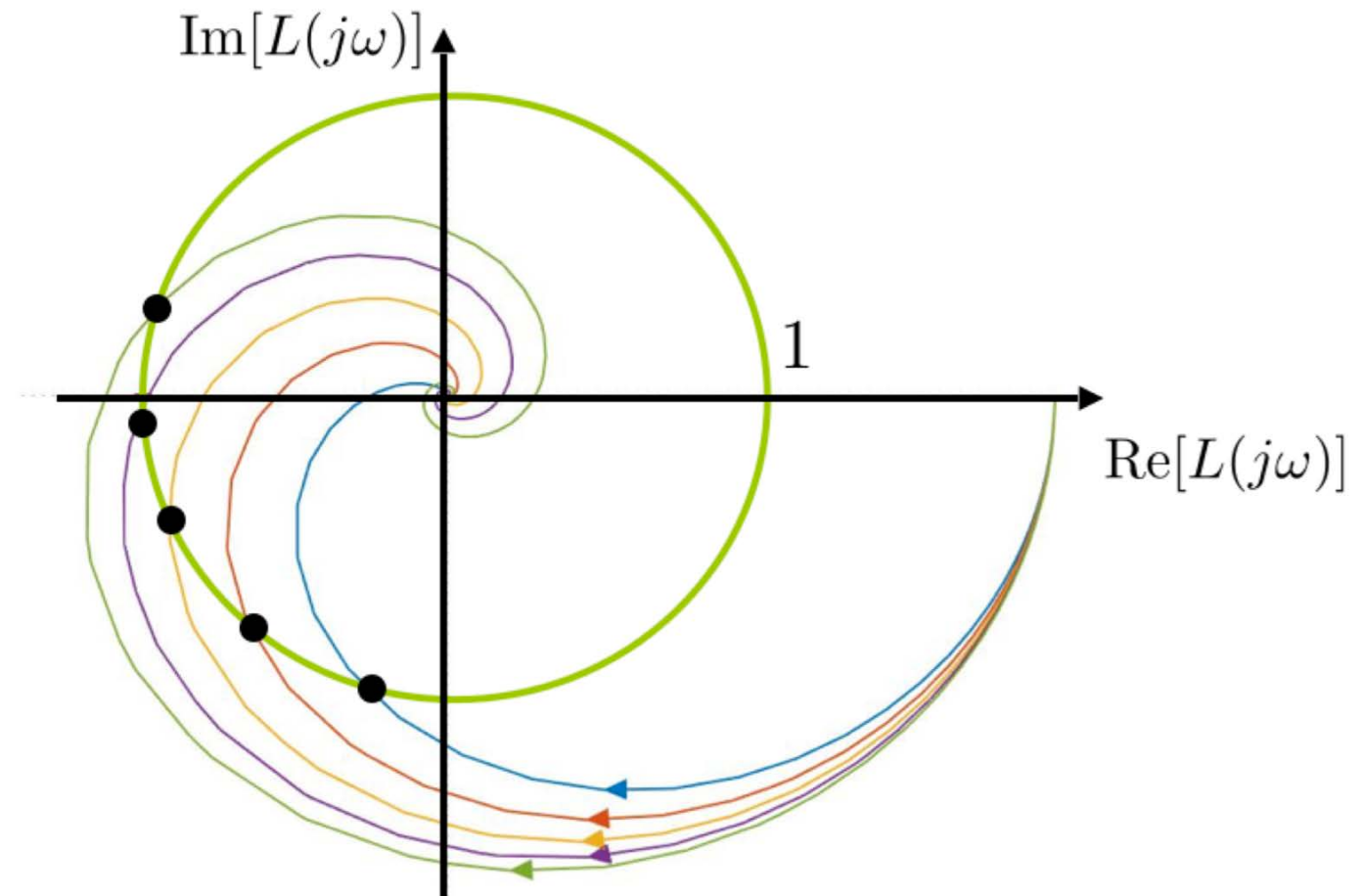
As. stabilità

$$\omega_c \tau = \varphi_m \cdot \frac{\pi}{180}$$

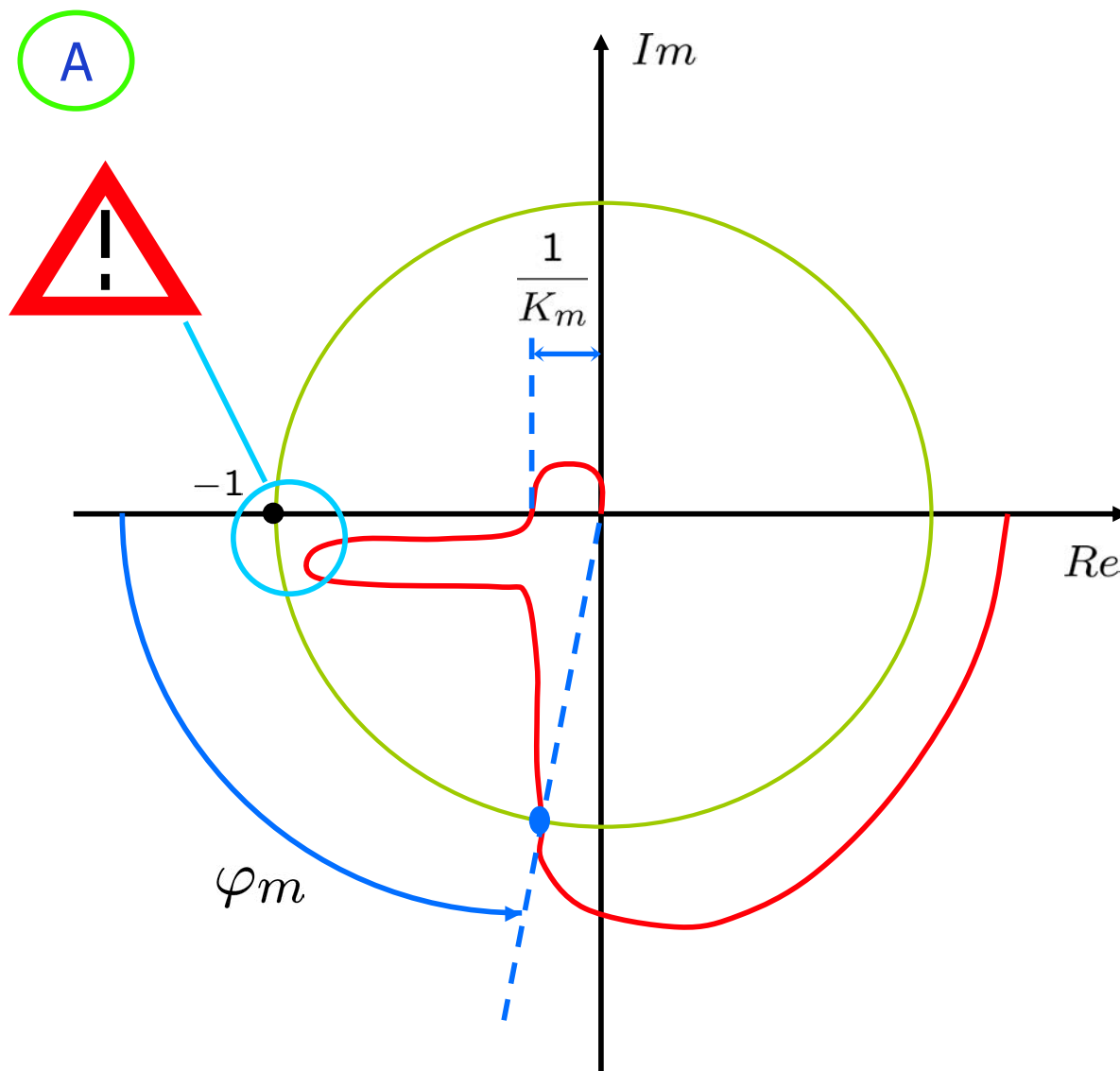


φ_m è un indicatore di robustezza
rispetto ad incertezze sul ritardo
d'anello

$$0 < \tau < \frac{\varphi_m}{\omega_c} \cdot \frac{\pi}{180}$$



• Situazioni anomale

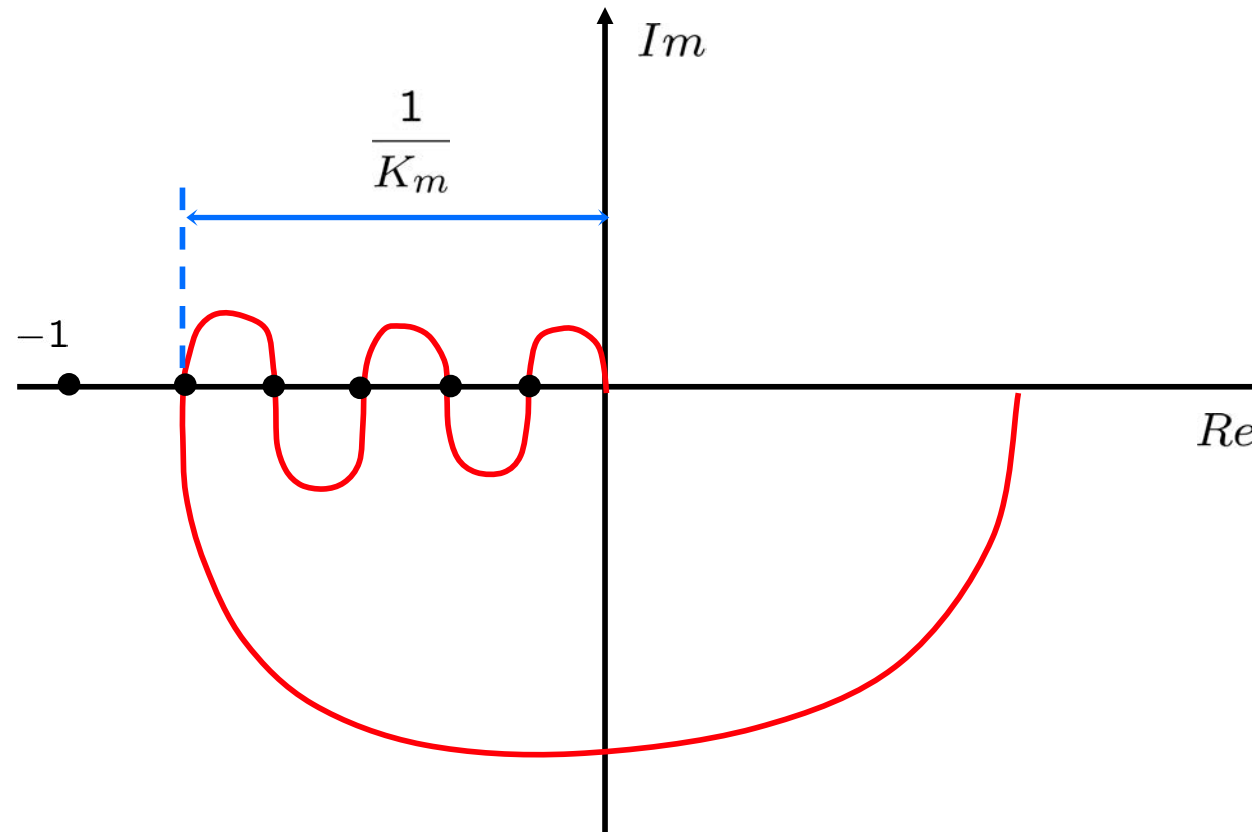


$$K_m \gg 1$$

$$\varphi_m \gg 0^\circ$$

Però il sistema
è poco robusto

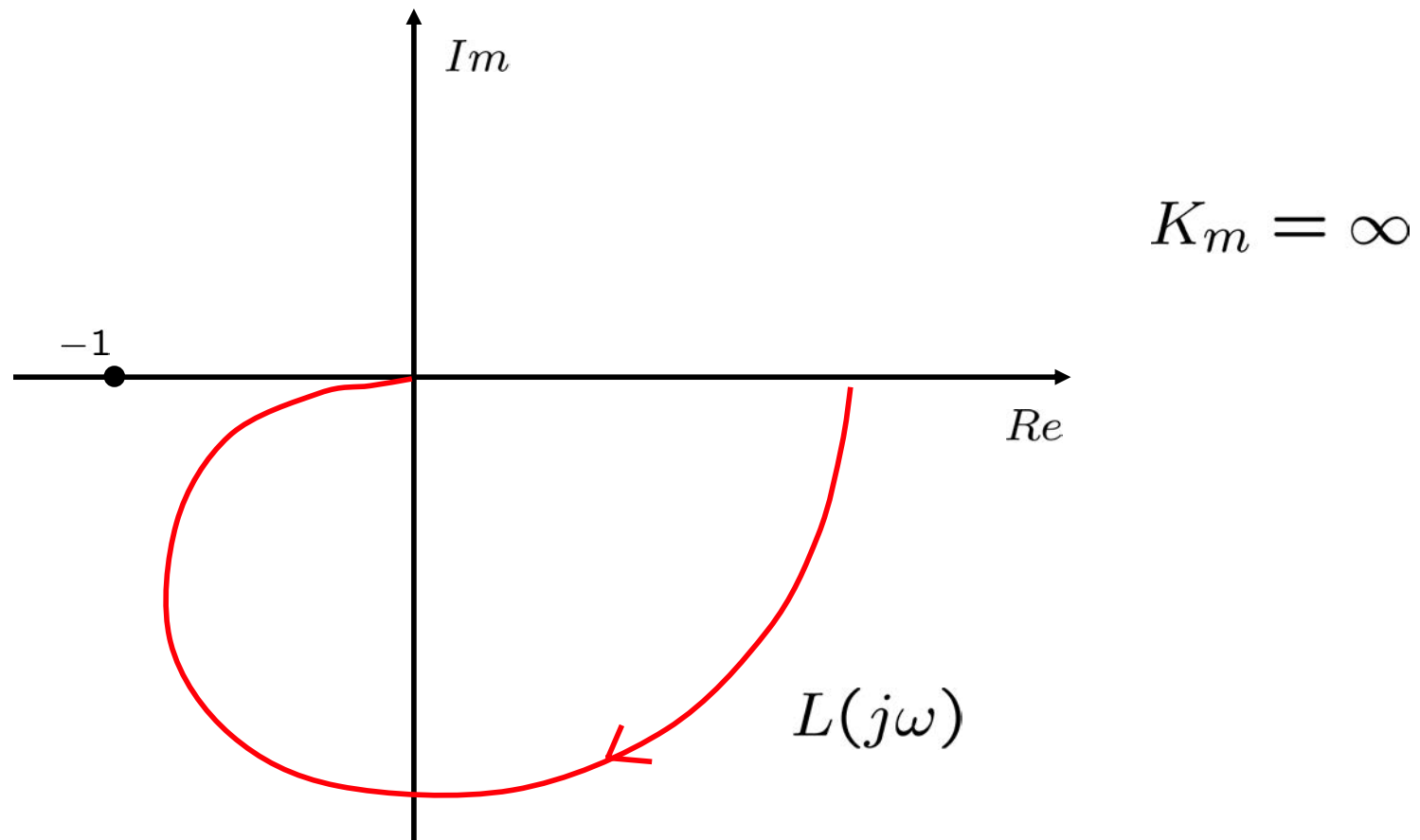
B



Affinchè K_m sia affidabile è necessario costruirlo nel caso peggiore

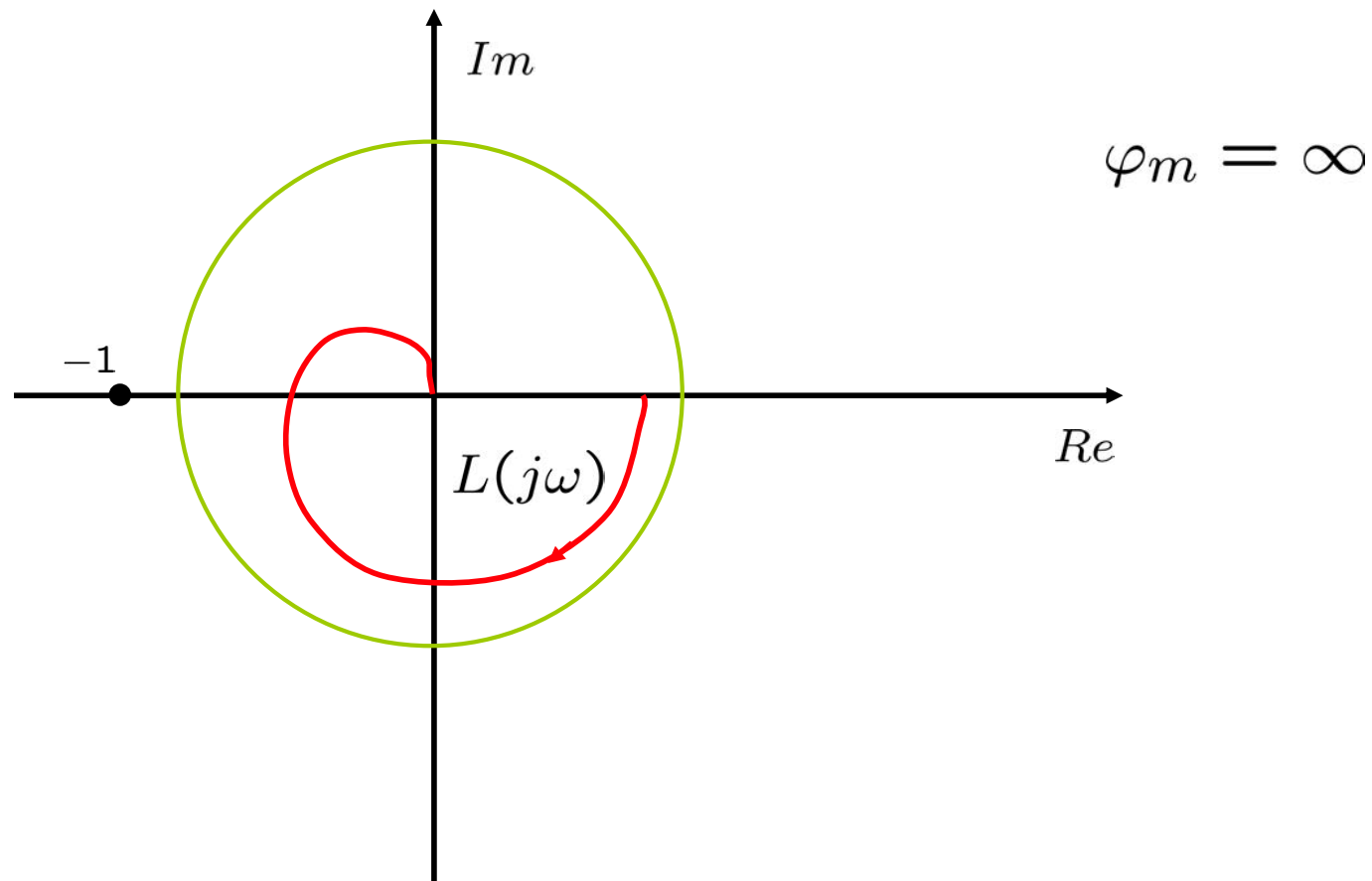
- Casi particolari

A



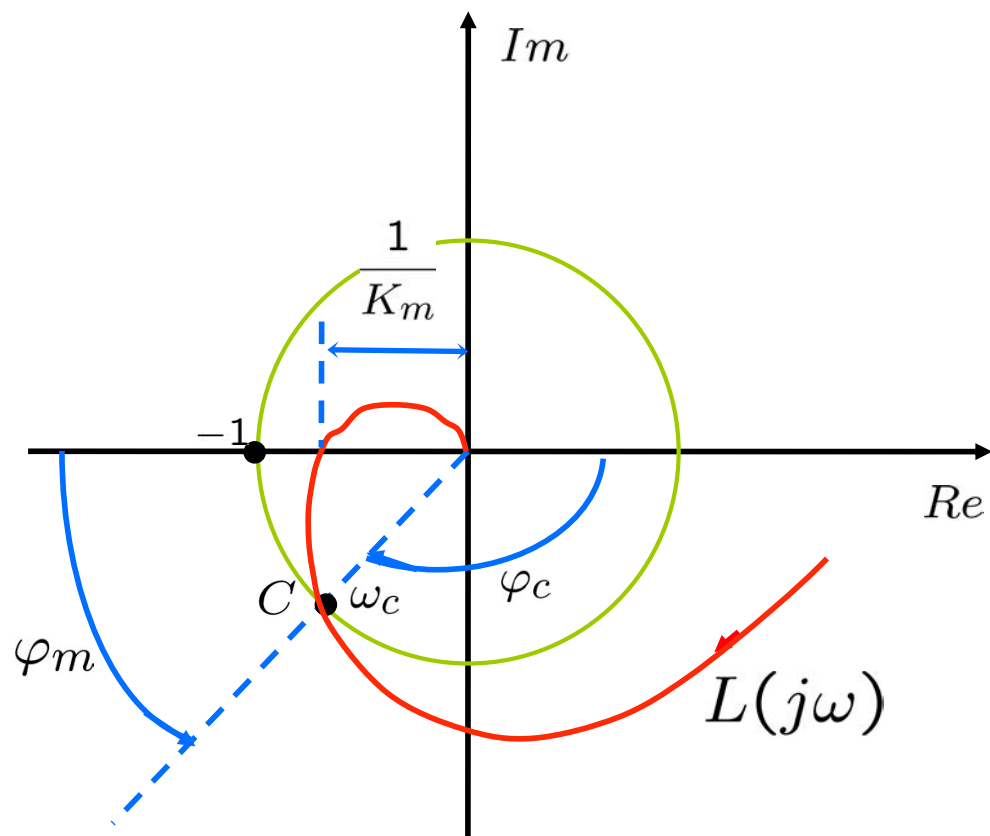
$$|\arg L(j\omega)| < 180^\circ, \quad \forall \omega \quad \longrightarrow \quad \varphi_m > 0^\circ$$

B



$$|L(j\omega)| < 1 \quad , \quad \forall \omega \quad \longrightarrow \quad K_m > 1$$

- **Margine di guadagno e di fase**



- **Margine di guadagno**

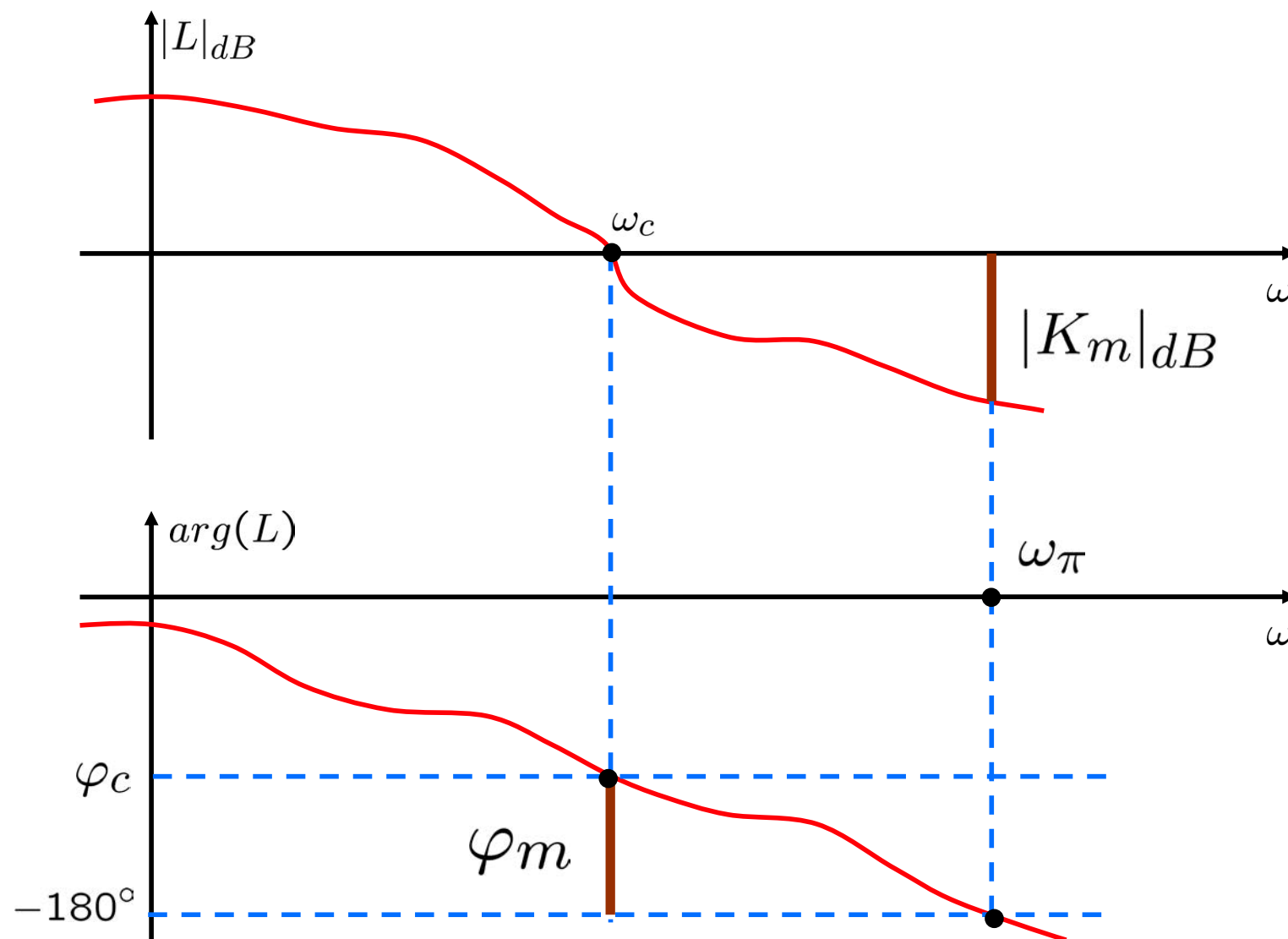
$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \quad ; \quad \arg L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

- **Margine di fase**

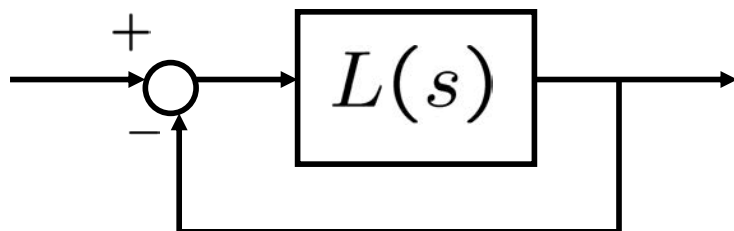
$$\varphi_m = \varphi_c - (-180^\circ) \quad ; \quad \varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$

$$|L(j\omega_c)| = 1$$

- **Calcolo di K_m e φ_m dai diagrammi di Bode**



● Criterio di Bode



Condizioni di applicabilità:

- 1) $P = 0$
- 2) $|L(j\omega)|_{dB}$ attraversa una volta l'asse a 0 dB (dall'alto verso il basso)

μ guadagno d'anello

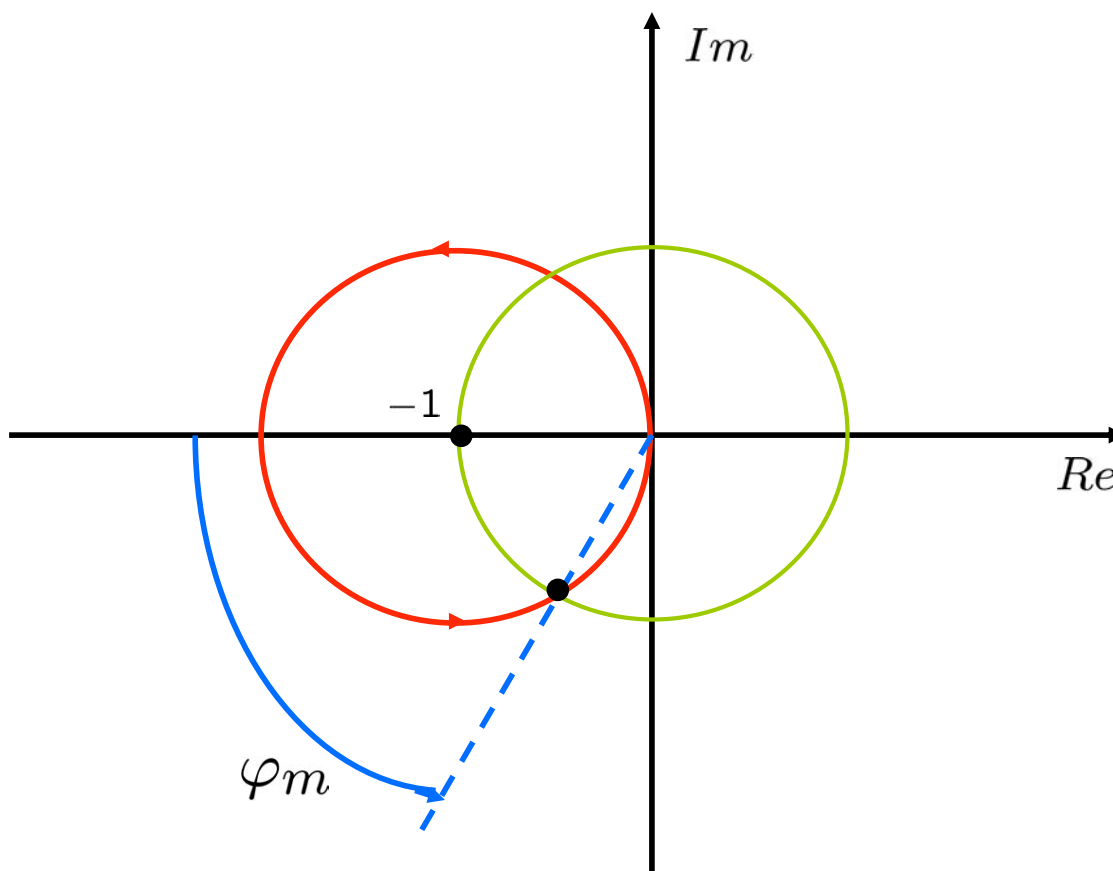
φ_m margine di fase

Asintotica stabilità $\longleftrightarrow$ $\mu > 0$
 $\varphi_m > 0$

Perché è necessario $\mu > 0$?



Per escludere casi del tipo:



Instabile in a.c.



● Osservazione

Se

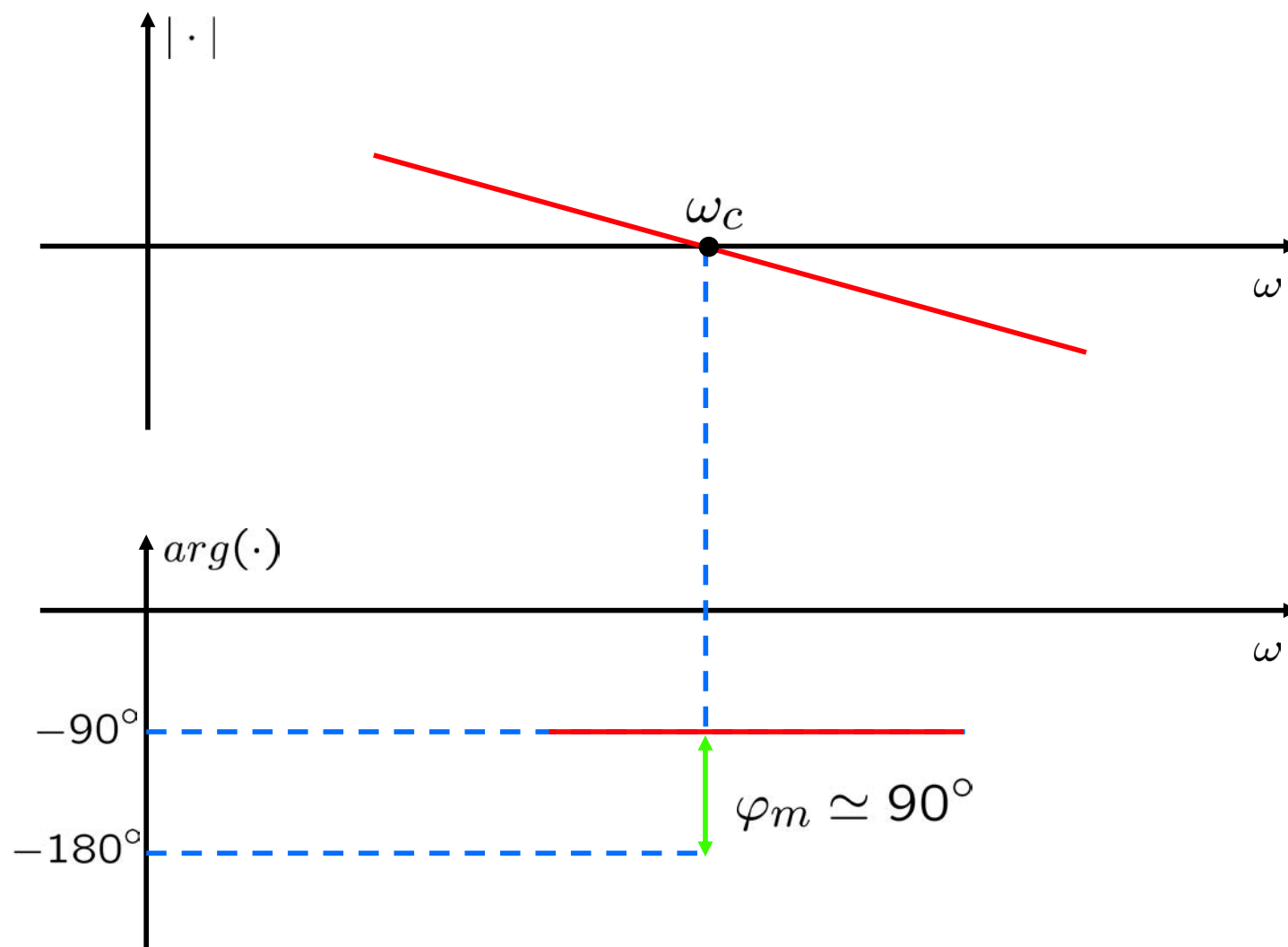
- $L(s)$ è a fase minima ($\mu > 0$, poli, zeri con $Re < 0$)
- $|L|_{dB}$ attraversa l'asse a 0dB una volta sola

Allora

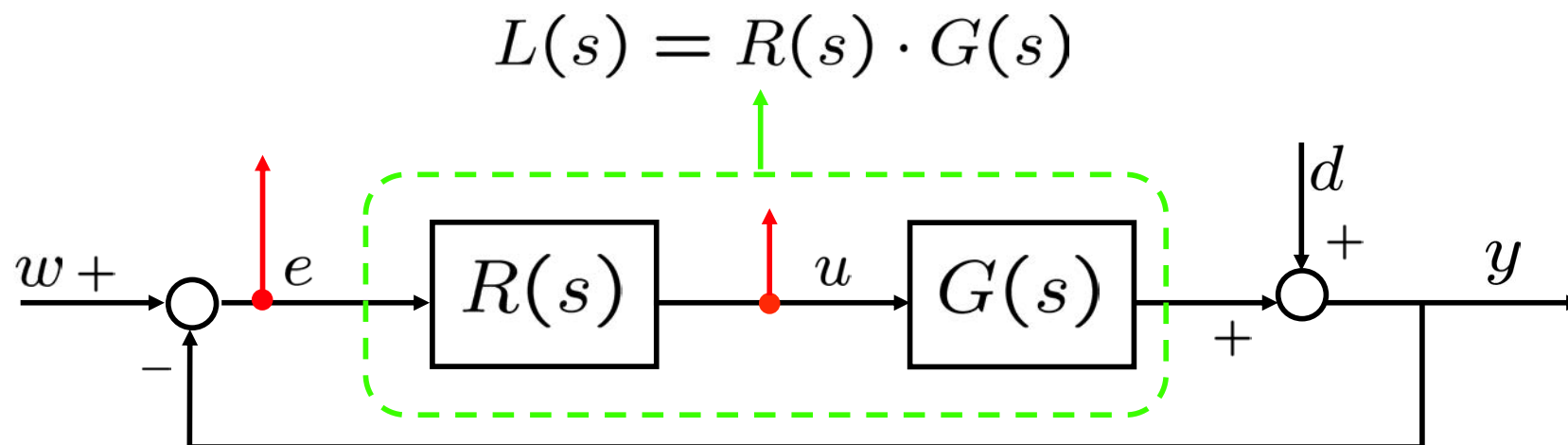
- $P = 0$
 - Bode applicabile
 - $\mu > 0$
 - diagrammi asintotici
- $\left\{ \begin{array}{ll} |L|_{dB} & \text{pendenza } -K \\ \arg(L) & \text{valore } -K \cdot 90^\circ \end{array} \right.$

● Criterio “empirico”

* nelle ipotesi di validità *



● Analisi di sistemi retroazionati



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s)$$

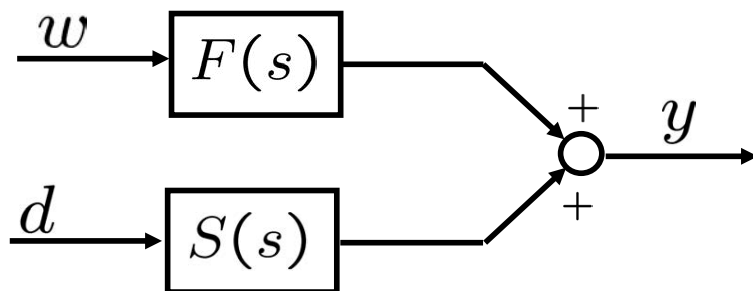
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s)$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1 + L(s)} = -S(s)$$

$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{R(s)}{1 + L(s)} = Q(s)$$

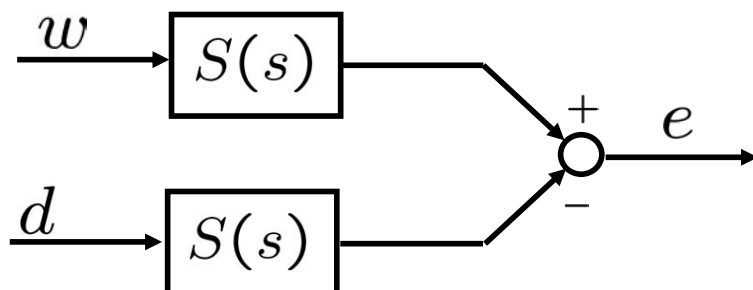
$$\frac{U(s)}{D(s)} = \frac{-R(s)}{1 + L(s)} = -Q(s)$$



F. di sensitività
complementare

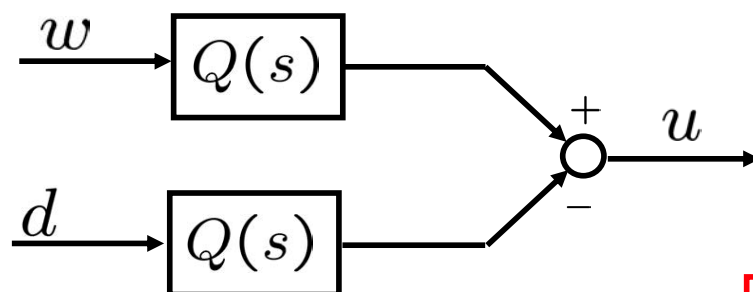
Caso
"ideale"

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \simeq 1$$



F. di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \simeq 0$$



F. di sensitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)} \simeq 0$$

$$F(s) + S(s) = 1$$

- **Caso ideale**



$$F(s) \simeq 1$$

F. di sensitività
complementare



$$S(s) \simeq 0$$

F. di sensitività

$$Q(s) \simeq 0$$

F. di sensitività
del controllo

● Analisi di $F(s)$ - analisi statica

Valore di regime risp. allo scalino

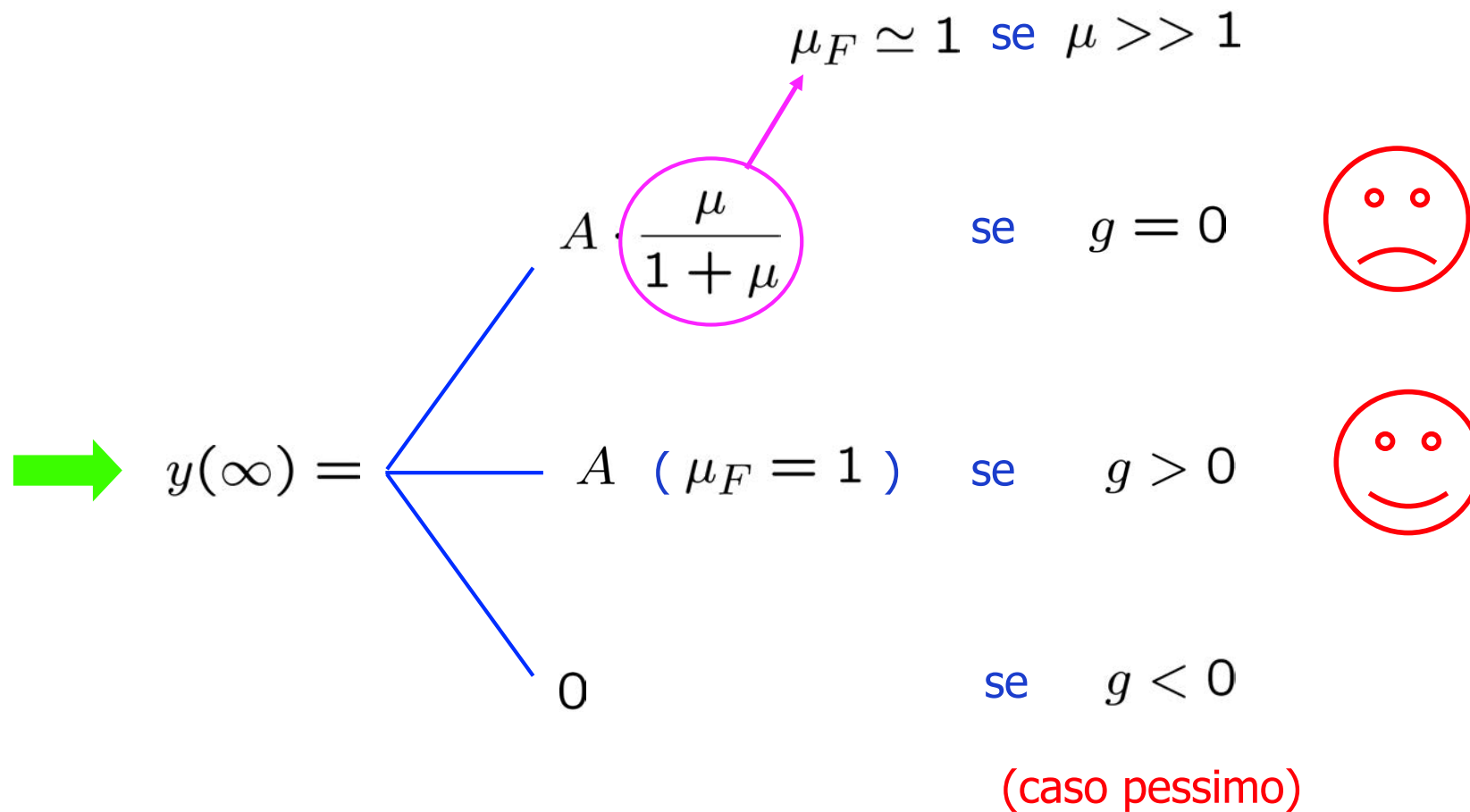
$$L(s) = \frac{\mu}{s^g} \cdot \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_i (1 + s\tau_i)} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 1$$

$$w(t) = A \cdot 1(t)$$

$$\longrightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot F(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = A \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

$$= A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{L(s)}{1 + L(s)} = A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{\mu}{s^g}}{1 + \frac{\mu}{s^g}}$$

$$= \boxed{A \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{s^g + \mu}}$$



- **Analisi di $F(s)$ - poli & zeri**

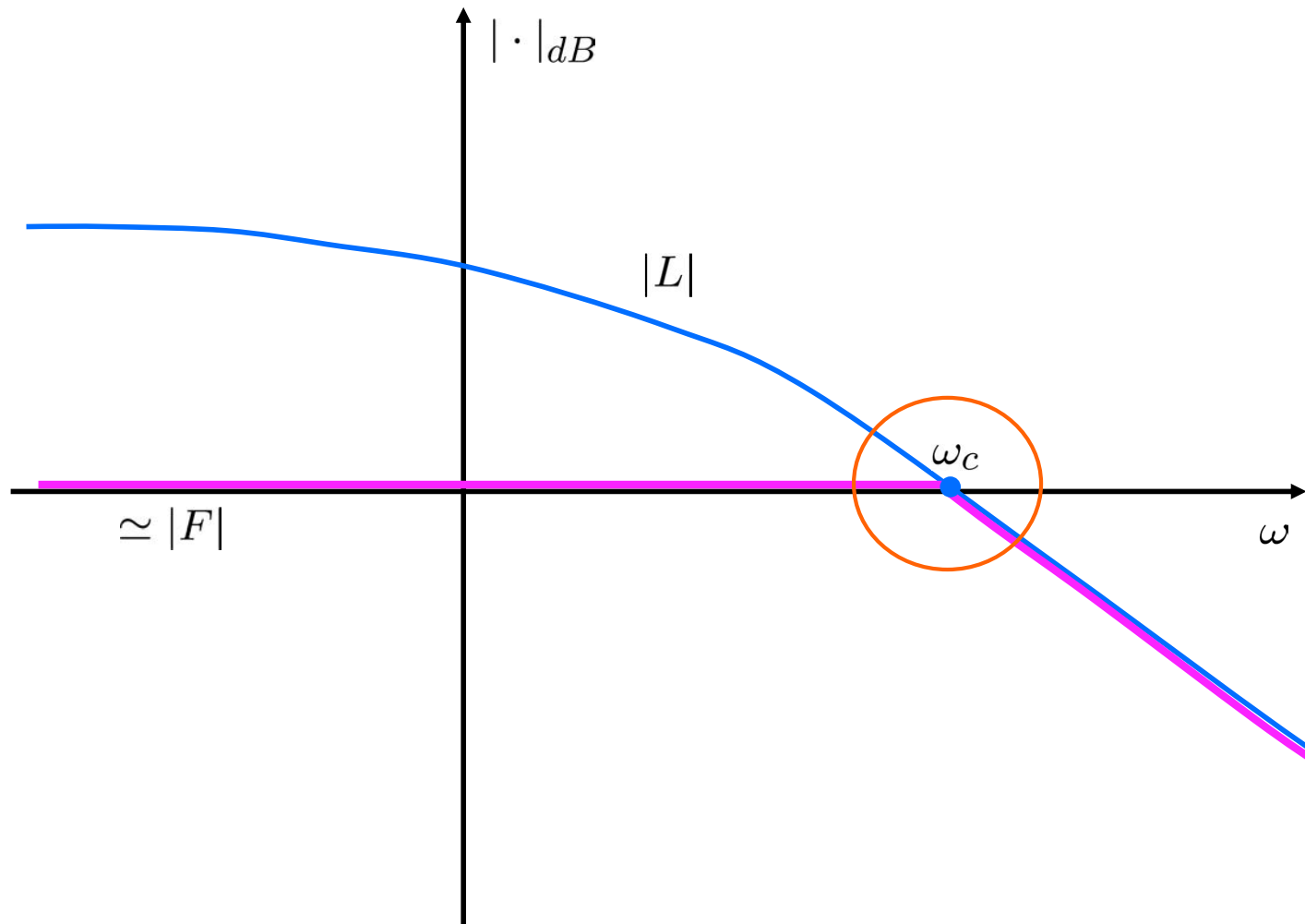
$$L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \quad \longrightarrow \quad F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{N(s)}{\varphi(s) + N(s)}$$

- zeri di $F(s) \equiv$ zeri di $L(s)$
- poli di $F(s) \equiv$ radici di $\varphi(s) + N(s)$

- Analisi di $F(s)$ - risposta in frequenza

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}$$

- **Situazione tipica**



Quindi:

- $F(s)$ è un filtro passa-basso

- Banda passante: $B \simeq [0, \omega_c]$

- Guadagno $\mu_F \simeq 1$

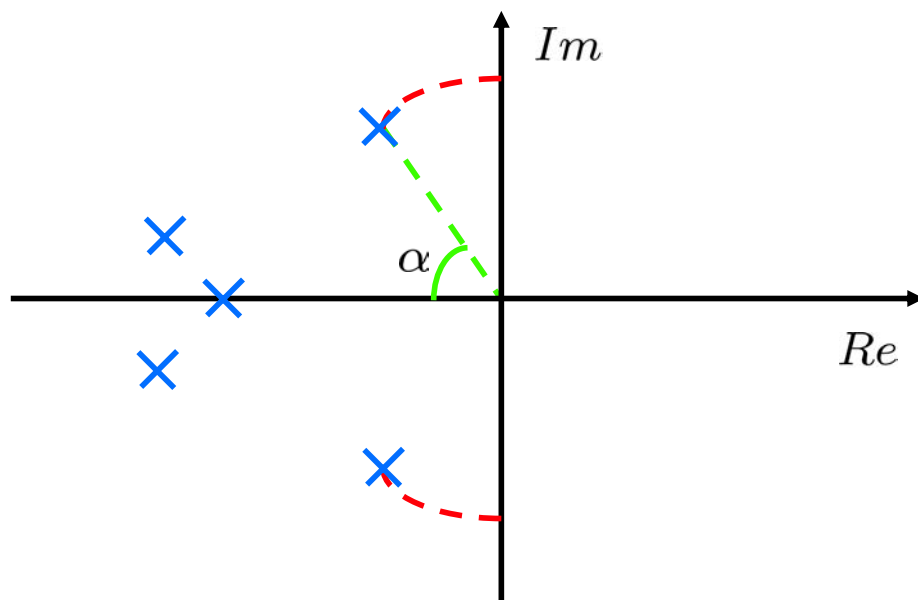
$$\mu_F = 1 \quad \text{se } g > 0$$

$$\mu_F = \frac{\mu}{1 + \mu} \quad \text{se } g = 0$$

- Poli dominanti di $F(s)$ cadono in corrispondenza di ω_c

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{- se reale} & \longrightarrow \tau \simeq \frac{1}{\omega_c} \\ \text{- se complessi} & \longrightarrow \begin{array}{l} \omega_n \simeq \omega_c \\ \xi = ? \end{array} \end{array} \right.$$

• Smorzamento e margine di fase



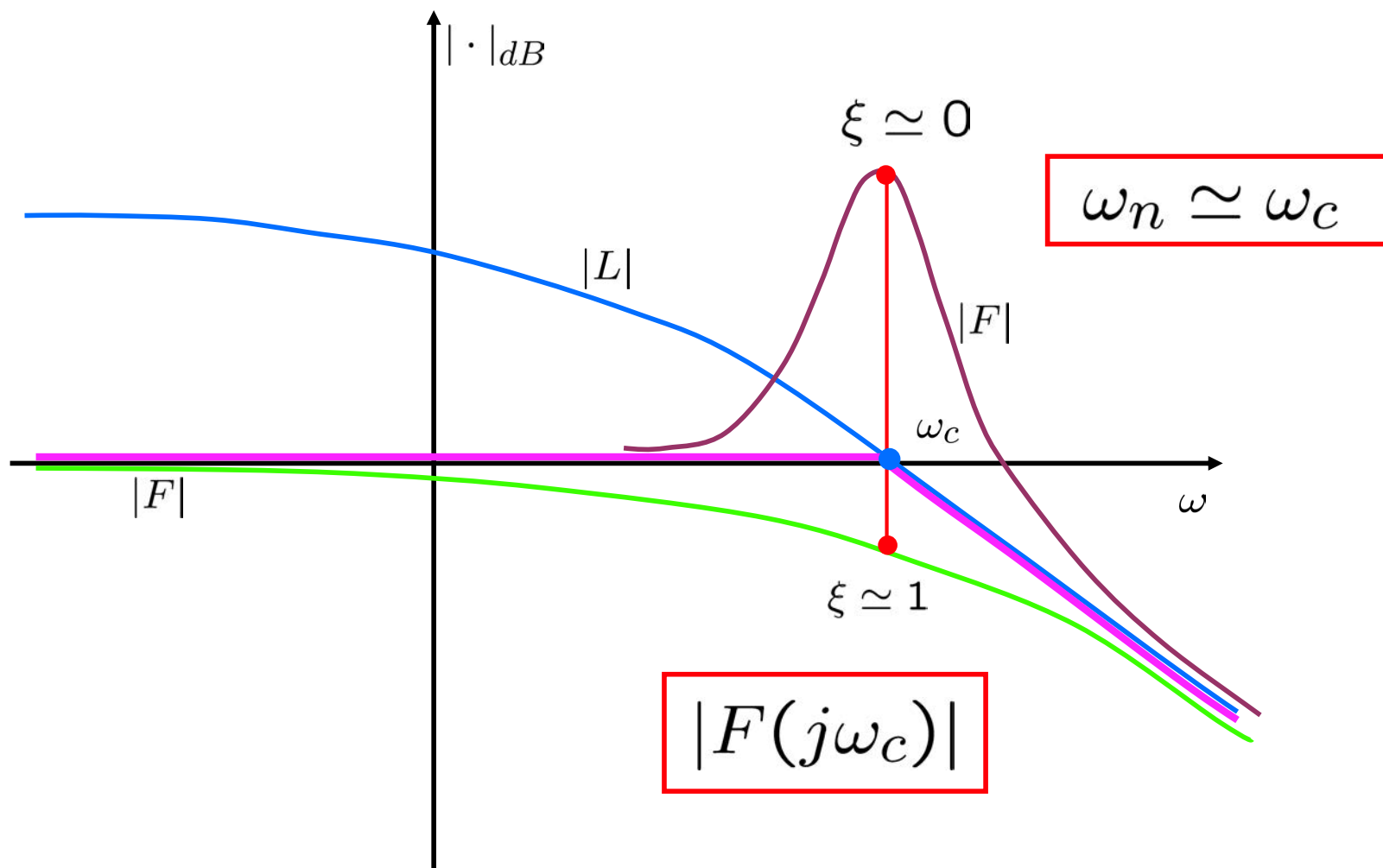
Poli di $F(s)$

Basso smorzamento $\longrightarrow$ Scarsa robustezza $\longrightarrow \varphi_m \simeq 0^\circ$

$\xi \simeq 0$

?

● Legame tra ξ e φ_m



- **Calcolo di** $|F(j\omega_c)|$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|}$$

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad \longrightarrow \quad L(j\omega_c) = 1 \cdot e^{j\varphi_c}$$

$$\text{con } \varphi_c = \arg L(j\omega_c)$$

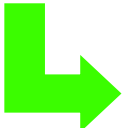
$$\longrightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{\underbrace{|1 + \cos \varphi_c|}_{\text{Re}} + \underbrace{j \sin \varphi_c}_{\text{Im}}}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow |F(j\omega_c)| &= \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \varphi_c)^2 + \sin^2 \varphi_c}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_c + 2 \cos \varphi_c + \sin^2 \varphi_c}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)}}
 \end{aligned}$$

$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c|$

- Consideriamo un generico sist. del secondo ordine:

$$F(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad \xi > 0$$


$$|F(j\omega_n)| = \left| \frac{\cancel{\omega_n^2}}{-\cancel{\omega_n^2} + 2j\xi\cancel{\omega_n^2}s + \cancel{\omega_n^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{j2\xi} \right| = \frac{1}{2\xi}$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega_n \simeq \omega_c \\ \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sin \frac{x}{2} \end{array} \right\} \rightarrow |F(j\omega_c)| = \frac{1}{2 \sin(\frac{\varphi_m}{2})}$$



$$\xi \simeq \sin \left(\frac{\varphi_m}{2} \right) \simeq \frac{\varphi_m}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

Regola empirica

- $\varphi_m < 75^\circ$



Poli dominanti complessi
con

$$\omega_n \simeq \omega_c$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

- $\varphi_m > 75^\circ$



Polo dominante reale
con

$$\tau \simeq \frac{1}{\omega_c}$$

● Riassumendo:

In un sistema di controllo in a.c.

- la **precisione statica** dipende da:

$$g, \mu \quad \mu_F = \begin{cases} 1 & g > 0 \\ \frac{\mu}{1 + \mu} & g = 0 \end{cases}$$

- la **precisione dinamica** dipende da

$$\omega_c, \varphi_m \quad B_F \simeq [0, \omega_c]$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100}$$

- **Analisi di $S(s)$ - analisi statica**

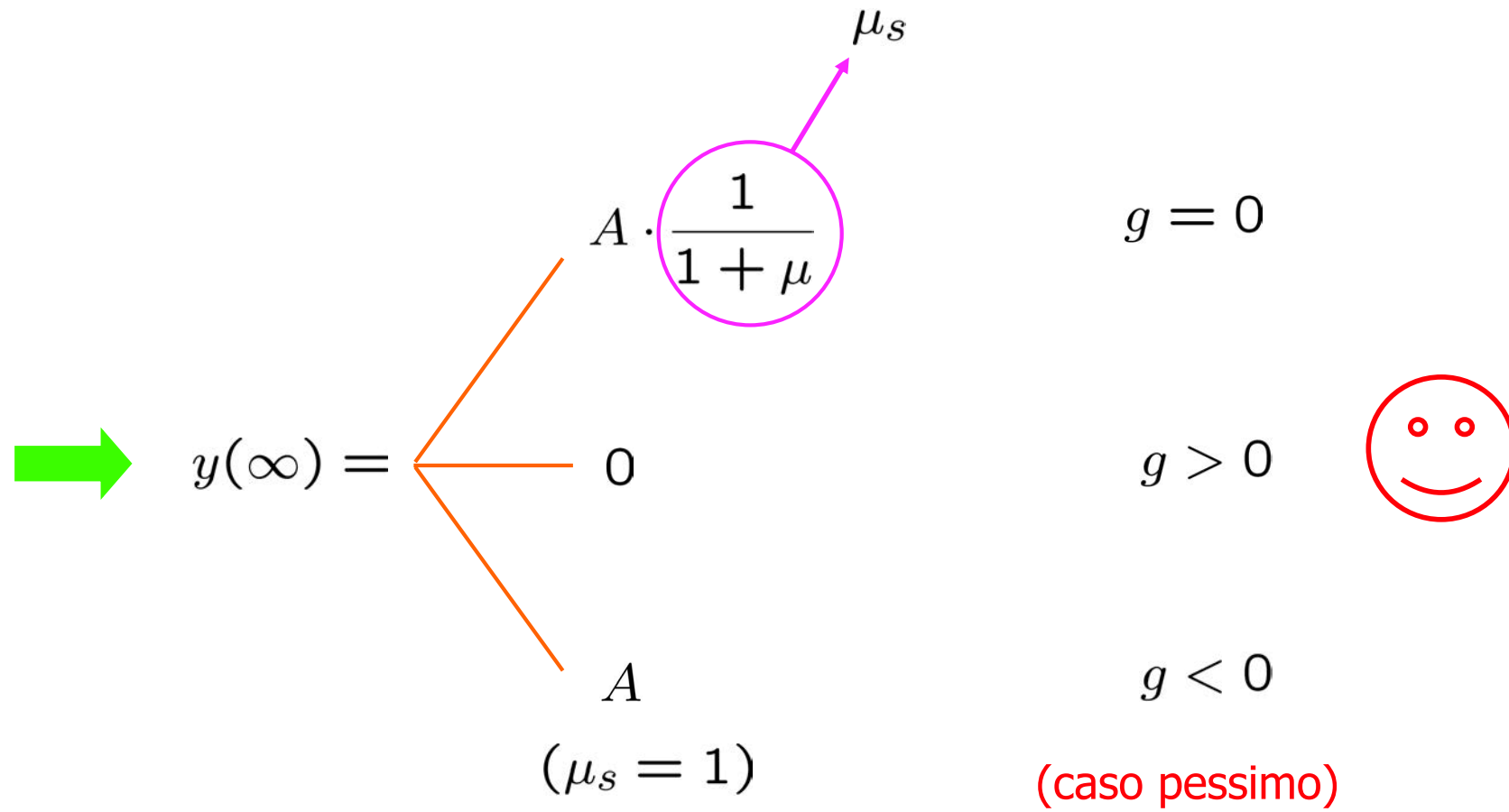
- valore di regime, risposta allo scalino:

$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$\text{L} \rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot S(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} A \cdot S(s)$$

$$= A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{s^g}} =$$

$$= A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu}$$



- valore di regime, risposta alla rampa:

$$d(t) = A \cdot t, \quad t \geq 0 \quad \longrightarrow \quad D(s) = \frac{A}{s^2}$$

$$\longrightarrow y(\infty) = \dots = A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu}$$

$$= \begin{cases} \infty & g = 0 \\ \frac{A}{\mu} & g = 1 \\ 0 & g > 1 \end{cases}$$

Tabella riassuntiva:

Valori di regime $y(\infty)$ in risposta a $d(t)$

$e(\infty)$ in risposta a $w(t)$

	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$
	$A \cdot 1(t)$	$A \cdot t \cdot 1(t)$	$A \cdot t^2/2 \cdot 1(t)$
$g = 0$	$\frac{A}{1 + \mu}$	∞	∞
$g = 1$	0	$\frac{A}{\mu}$	∞
$g = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu}$
$g = 3$	0	0	0

- **Analisi di $S(s)$ - poli & zeri**

$$S(s) = \frac{\varphi(s)}{\varphi(s) + N(s)} \qquad \left(L(s) = \frac{N(s)}{\varphi(s)} \right)$$

- zeri di $S(s) \equiv$ poli di $L(s)$
 - poli di $S(s) \equiv$ radici di $\varphi(s) + N(s)$
- $\equiv$
- poli di $F(s)$

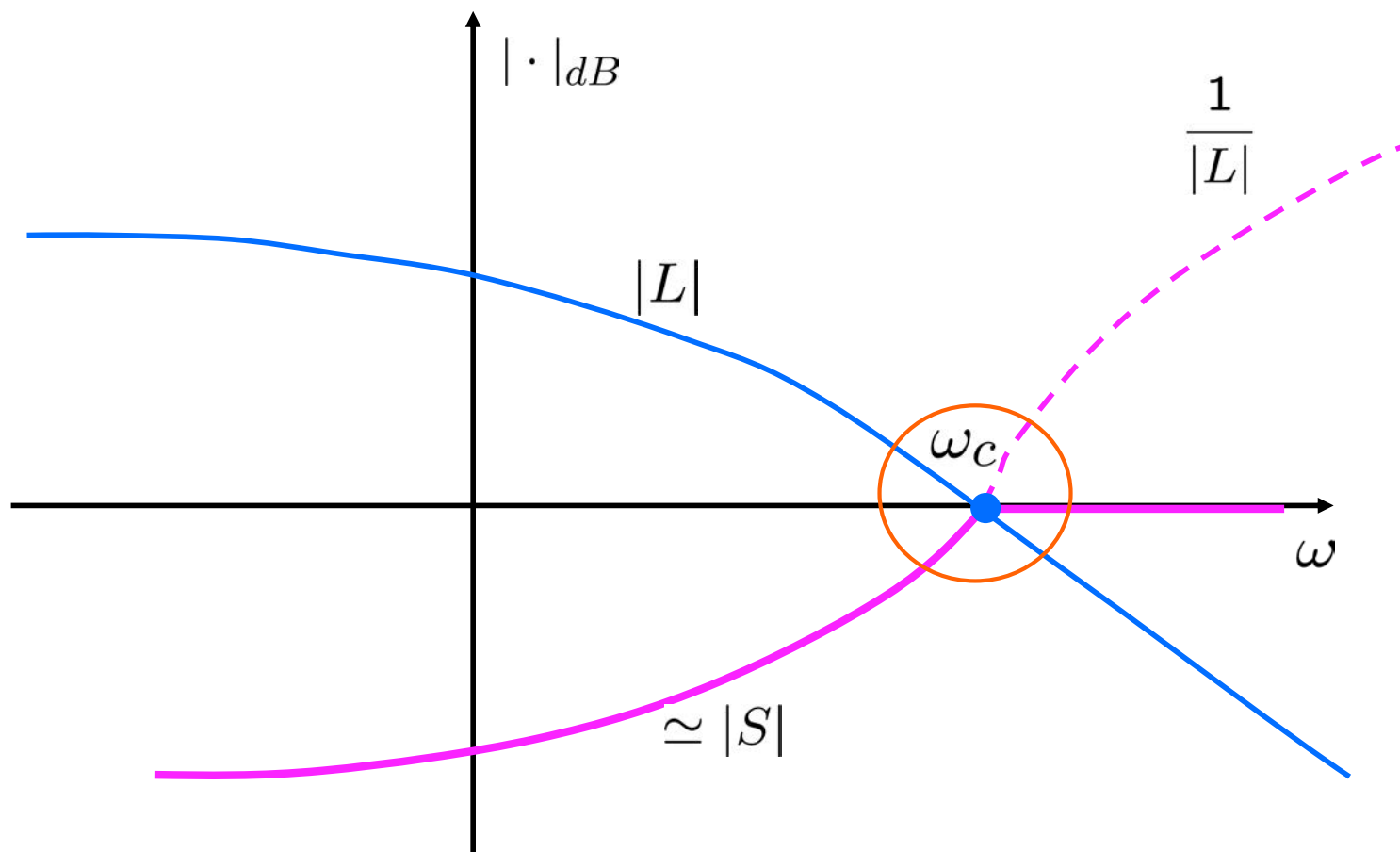
● Analisi di $S(s)$ - risposta in frequenza

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } |L(j\omega)| \ll 1 \\ \frac{1}{|L(j\omega)|} & \text{se } |L(j\omega)| \gg 1 \end{cases}$$

$0dB$
 $se \quad |L(j\omega)| \ll 1$

$-\lvert L(j\omega) \rvert_{dB}$

- **Situazione tipica**



➡ Filtro passa-alto con $B \simeq [\omega_c, \infty)$

- **Attenuazione del disturbo** $d(t)$

- solo in $[0, \omega_c]$



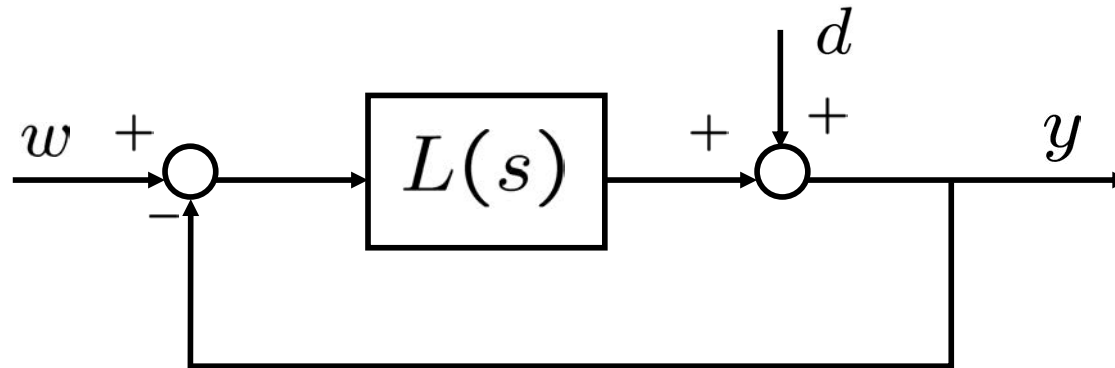
Banda del sistema
di controllo

- tanto migliore

- quanto maggiore è ω_c

- quanto più $|L(j\omega)| \gg 1$ in $[0, \omega_c]$

- Effetto di un ritardo



$$L(s) = L'(s) \cdot e^{-\tau s}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} |L(j\omega)| = |L'(j\omega)| \\ \arg L(j\omega) = \arg L'(j\omega) - \omega\tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \end{array} \right.$$

- può modificare la **stabilità in anello chiuso**
- **analisi statica** invariata

$$\lim_{s \rightarrow 0} e^{-\tau s} = 1$$

- **analisi dinamica**

ω_c non cambia (diagramma del modulo invariato)

φ_c diminuisce

φ_m diminuisce



ξ diminuisce

(ritardi  oscillazioni)

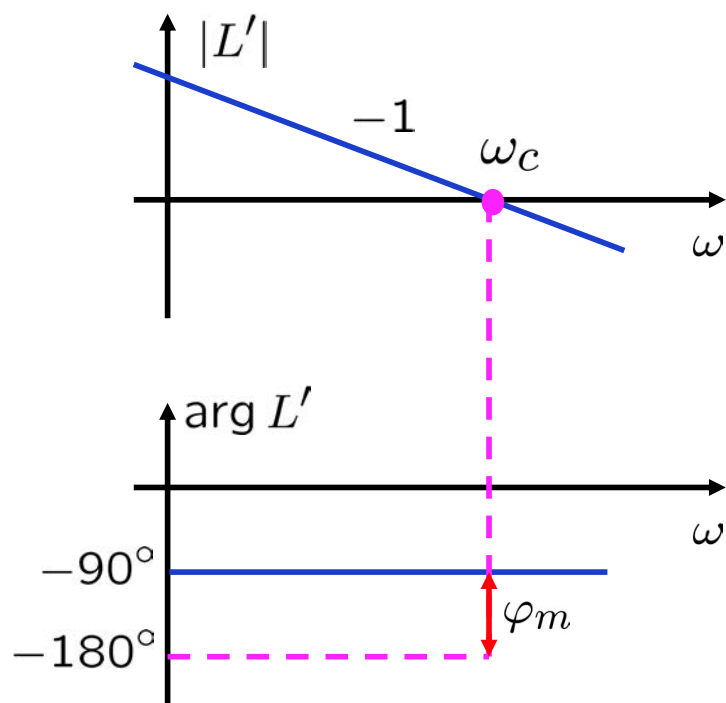
● Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s} \cdot e^{-\tau s}$$

$$w(t) = 1(t)$$

- $\tau = 0$ (no ritardo)

$$y(\infty) = 1$$



$$\omega_c = 1$$

$$\varphi_m = 90^\circ$$

$$(\varphi_c = -90^\circ)$$

Polo dominante
reale con

$$T \simeq \frac{1}{\omega_c} = 1$$

- $\tau > 0$

(taglio invariato)

$$y(\infty) = 1$$

$$\omega_c = 1$$

$$\varphi_c = -90^\circ - \omega_c \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

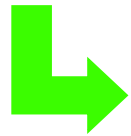
$$= -90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\Rightarrow \varphi_m = 90^\circ - \tau \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\text{Asintotica stabilità} \iff \tau < \frac{\pi}{2} \simeq 1.57 \text{ sec}$$

$$\tau = 1$$

$$\rightarrow \varphi_m = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$$



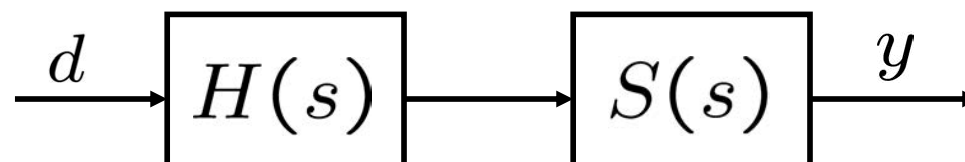
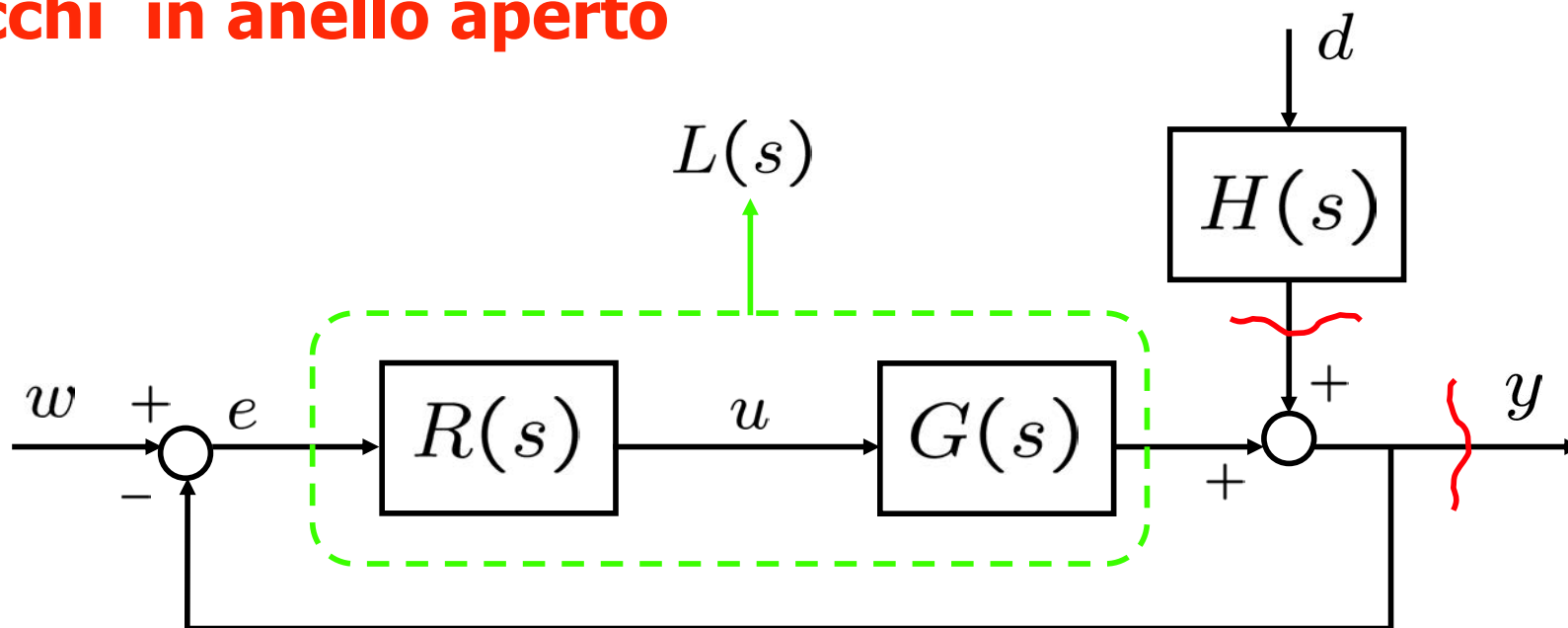
Poli dominanti complessi con

$$\omega_n \simeq \omega_c = 1$$

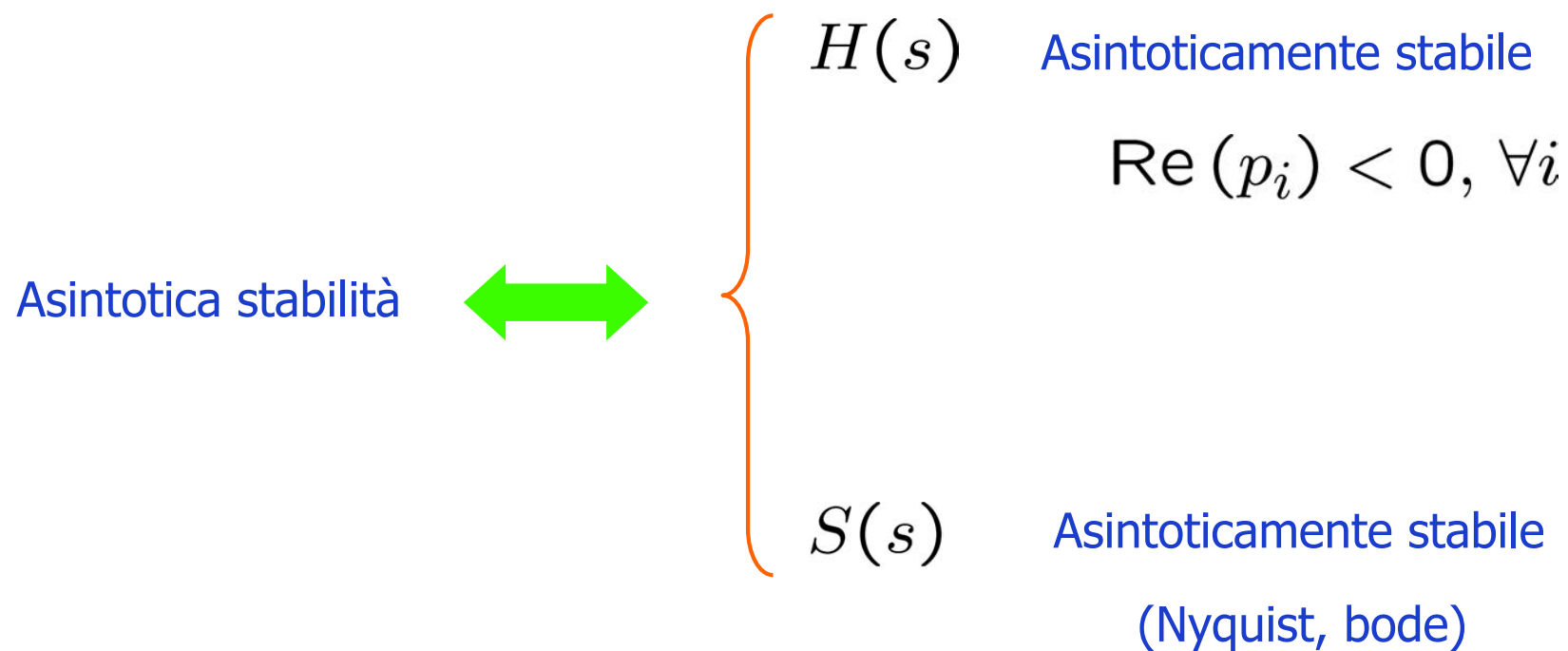
$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} \simeq 0.33$$

$$t_a \simeq \frac{5}{\xi \omega_n} \simeq 15 \text{ sec !!!}$$

- **Blocchi in anello aperto**



● Stabilità



- Effetto di d su y

$$M(s) = \frac{H(s)}{1 + L(s)} = H(s) \cdot S(s)$$

- Analisi statica: (supp. $g_H = 0$, $g_L = 0$)

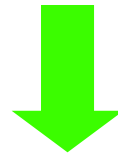
$$d(t) = A \cdot 1(t)$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \cdot M(s) \cdot \frac{A}{\cancel{s}} = A \cdot \lim_{s \rightarrow 0} M(s)$$

$$= A \cdot \frac{\mu_H}{1 + \mu_L} = A \cdot \mu_H \cdot \mu_S$$

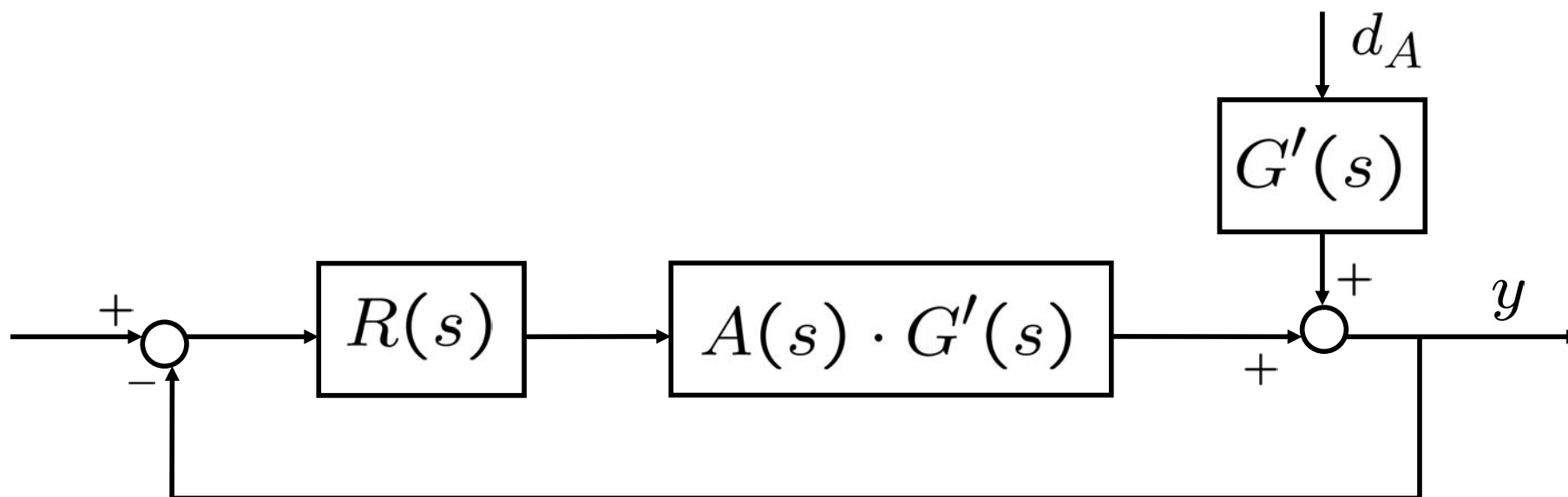
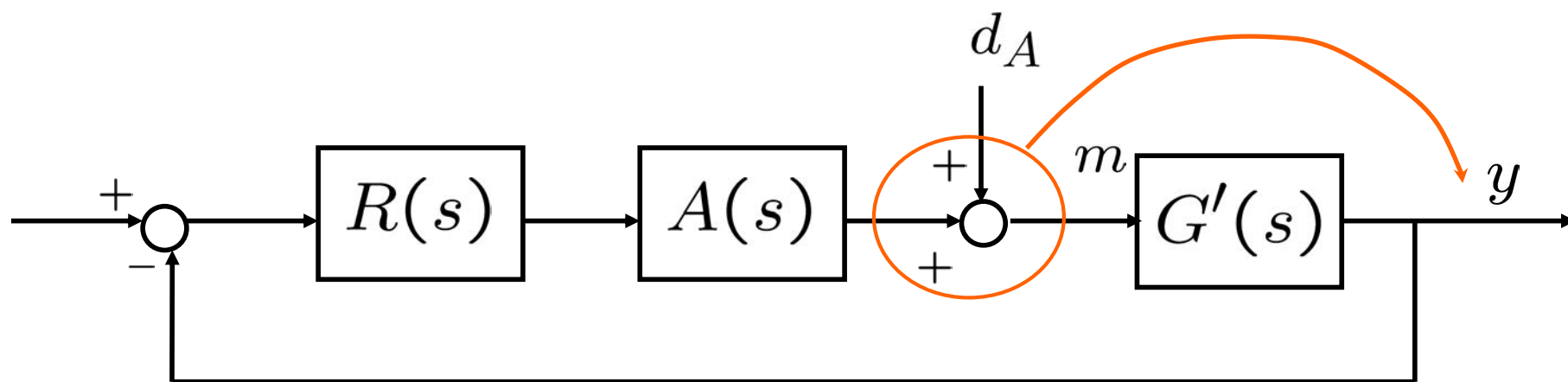
- Analisi dinamica:

$$|M(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |S(j\omega)|$$



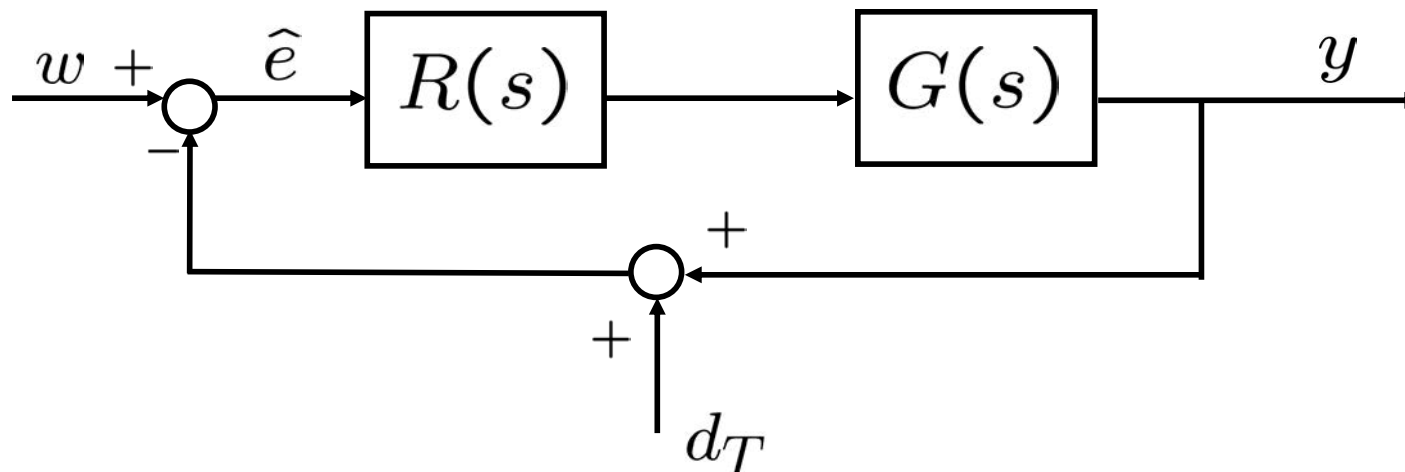
$$|M(j\omega)|_{dB} = |H(j\omega)|_{dB} \oplus |S(j\omega)|_{dB}$$

• Disturbi sull' attuatore

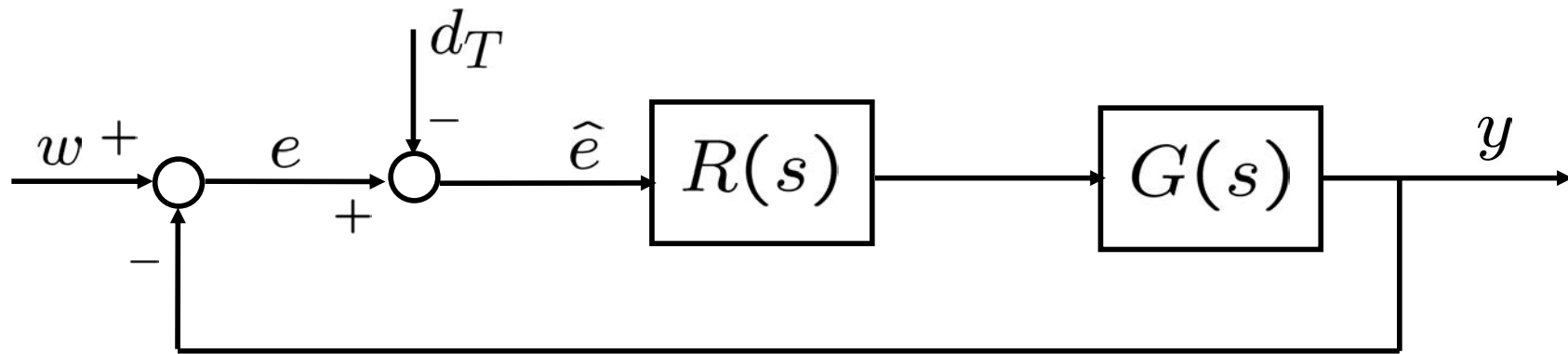


→ vedi caso precedente

- Disturbi sul trasduttore (in retroazione)



$$\hat{e} = w - (y + d_T) = \underbrace{w - y}_e - d_T$$



$$\frac{E(s)}{D_T(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = F(s) \quad \text{Passa-basso con } B_F \simeq [0, \omega_c]$$



Disturbi a bassa frequenza
vanno a influire su $e(t)$

- Valore a regime risposta allo scalino

$$d_T(t) = A \cdot 1(t) \quad (\text{Hp: sistema as. stabile})$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \frac{1}{s}$$

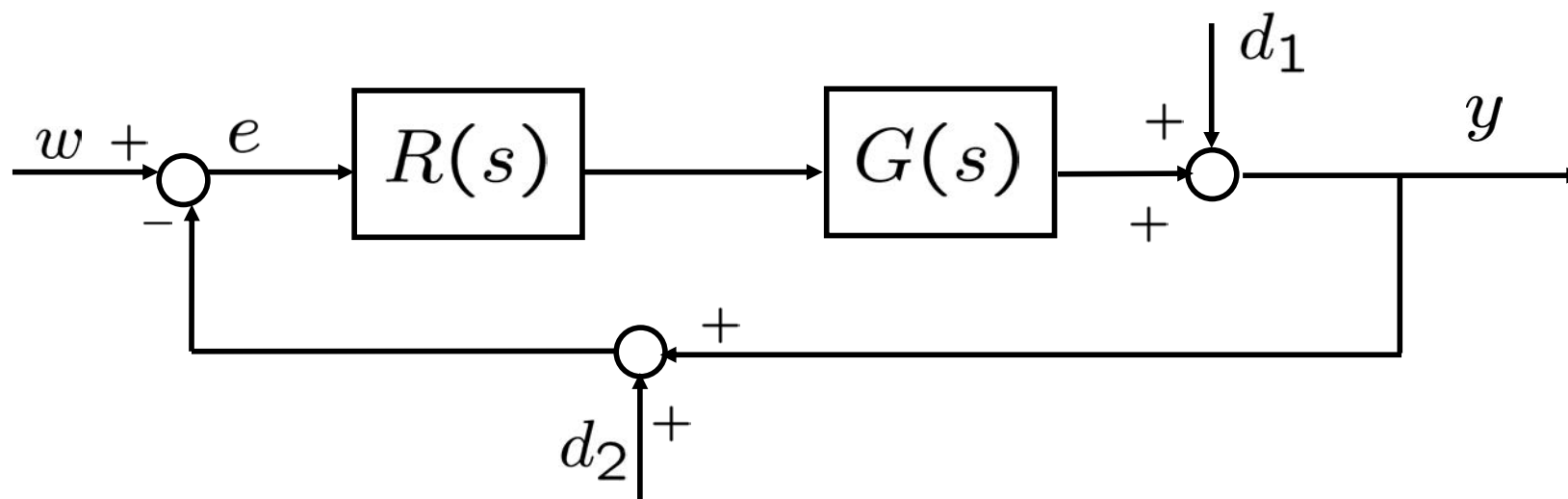
$$= \dots = \begin{cases} A \cdot \frac{1}{1 + \mu} & g = 0 \\ A & g > 0 \end{cases}$$



Compensazione del disturbo in catena diretta è in contrasto con la compensazione del disturbo in retroazione



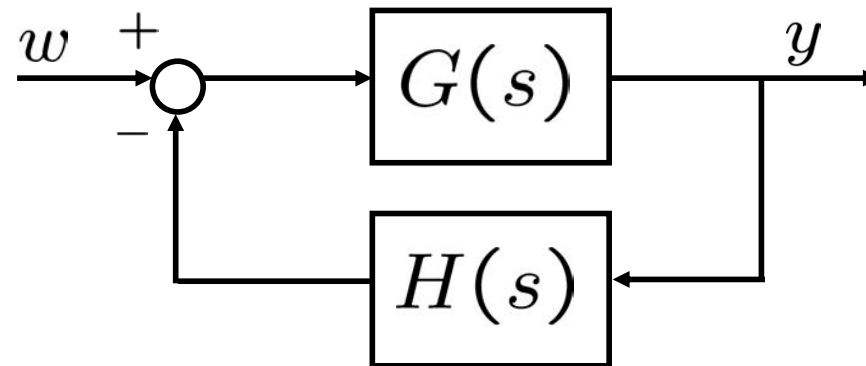
- **Riassunto: attenuazione dei disturbi**



Il sistema in anello chiuso è in grado di attenuare:

- d_1 a bassa frequenza $\omega \ll \omega_c$
- d_2 ad alta frequenza $\omega \gg \omega_c$

- **Estensione**



$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s) \cdot G(s)}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{|G(j\omega)|}{|1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)|}$$

$$\approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{|H(j\omega)|} \quad , \quad |G(j\omega)| \gg \frac{1}{|H(j\omega)|} \\ |G(j\omega)| \quad , \quad |G(j\omega)| \ll \frac{1}{|H(j\omega)|} \end{array} \right.$$

● Esempio

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^2} \quad H(s) = \frac{1}{(1+0.1s)}$$

→ $F(s) = \dots = \frac{10(1+0.1s)}{11 + 2.1s + 1.2s^2 + 0.1s^3}$

$$\mu_F = \frac{10}{11}$$

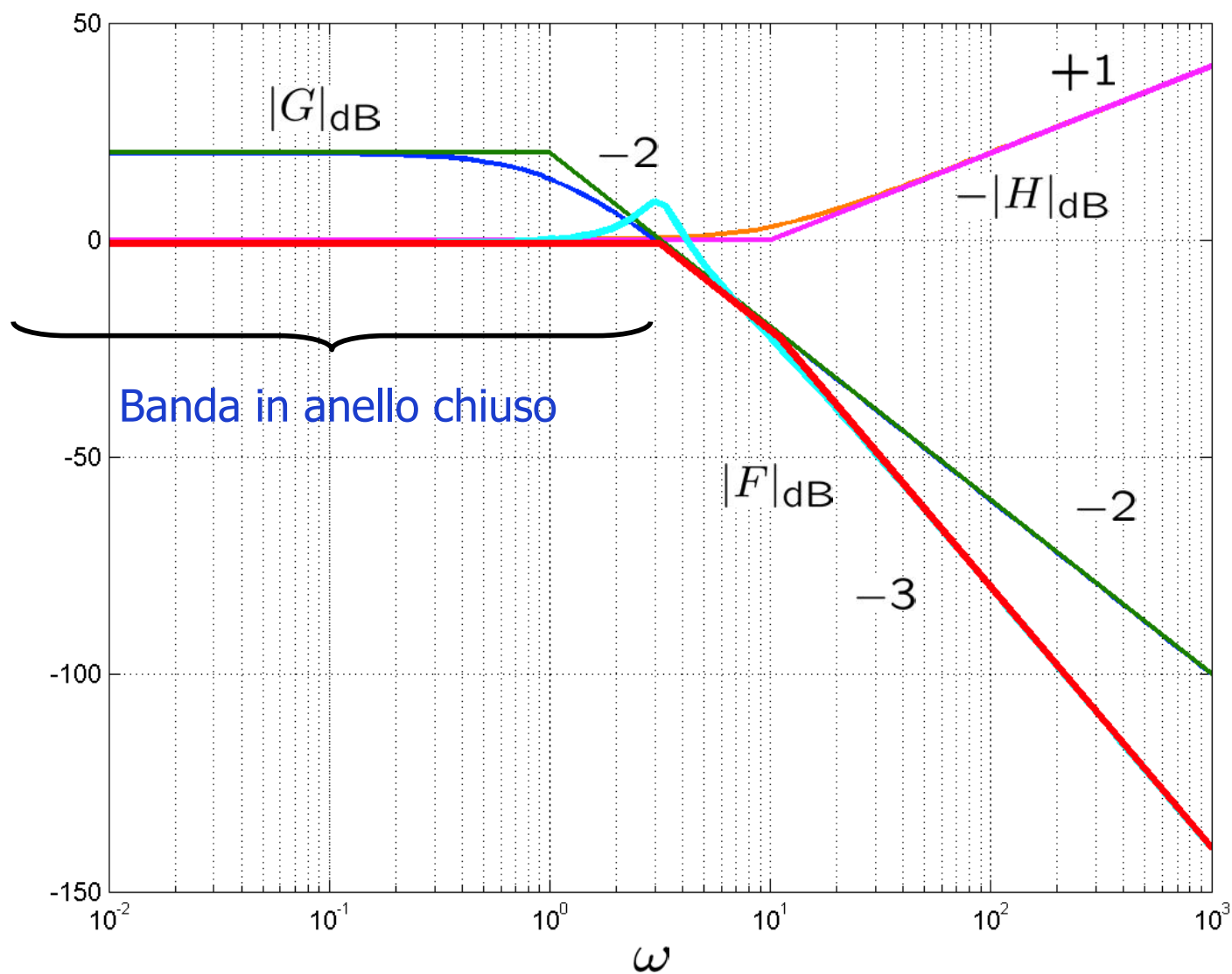
Poli:

$$-11$$

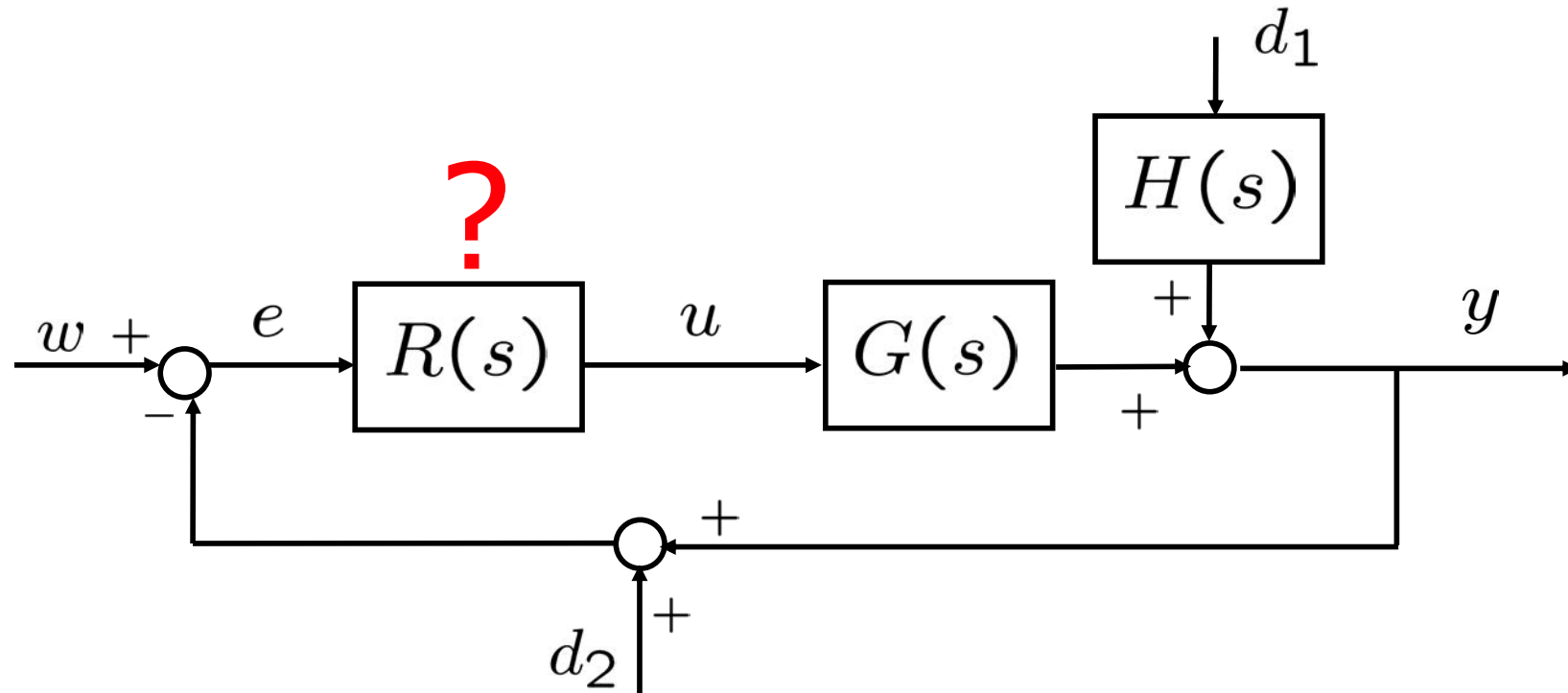
$$\omega_n \simeq 3.16$$

$$-0.5 \pm j3.12$$

$$\xi \simeq 0.16$$



- Problema di progetto del controllore



Determinare $R(s)$ in modo che il sistema soddisfi
alcuni requisiti (specifiche)

● Principali requisiti

- Asintotica Stabilità  $\mu > 0$
 $\varphi_m > 0$ (Bode)

- Precisione statica  $g > 0$ e/o μ elevato

- Precisione dinamica

- velocità di risposta  ω_c elevata

- smorzamento  φ_m elevato

- Attenuazione del disturbo in andata



ω_c elevata

$|L(j\omega)|$ elevato per $\omega \ll \omega_c$

- Attenuazione del disturbo in retroazione



ω_c non troppo elevata

$|L(j\omega)|$ piccolo per $\omega \gg \omega_c$

- Stabilità robusta  φ_m
 K_m elevati
- Moderazione controllo  $|R(j\omega)|$ piccolo per $\omega \gg \omega_c$