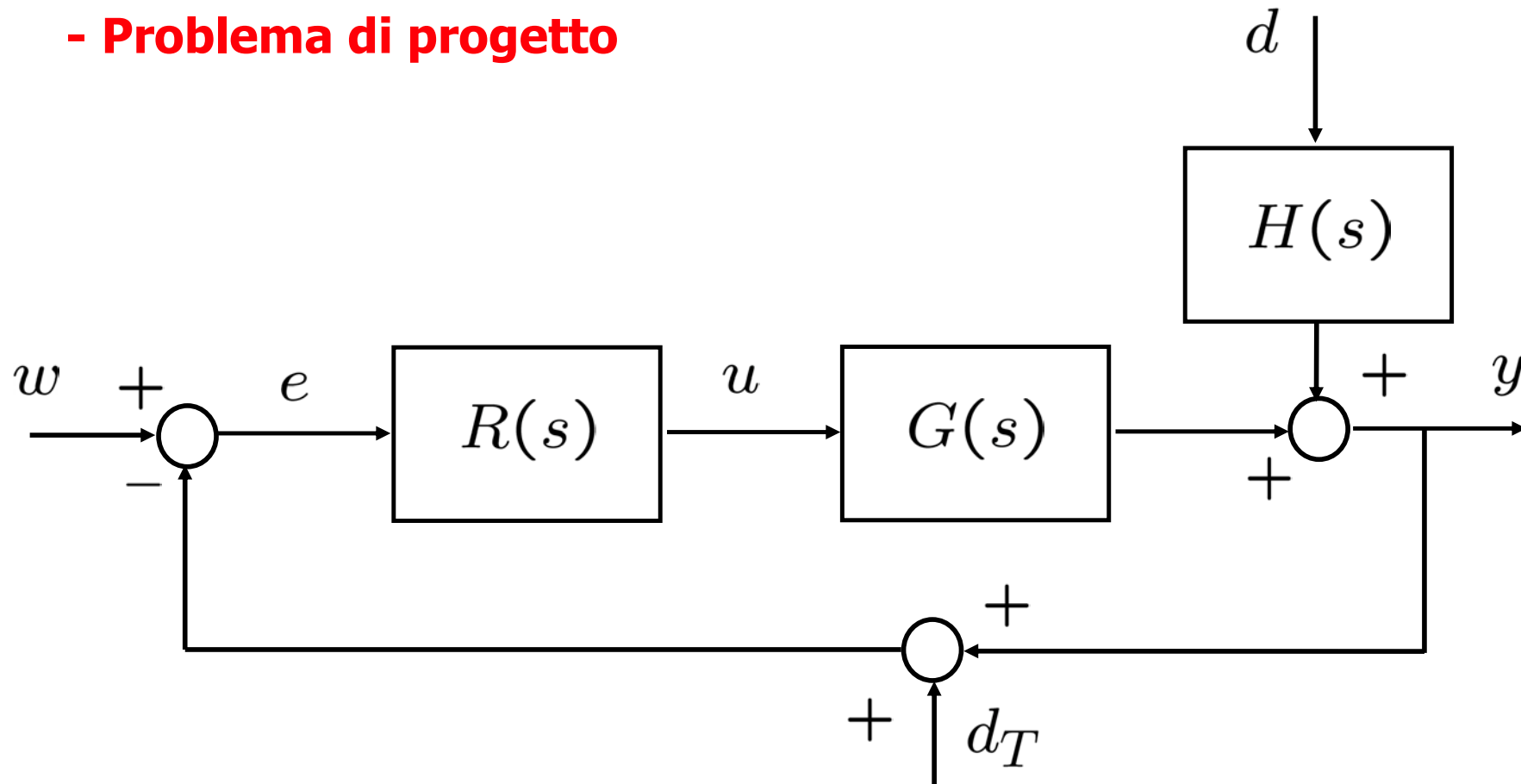


Progetto del controllore

Il caso dei sistemi LTI a tempo continuo

- Problema di progetto



Determinare $R(s)$ in modo che il sistema soddisfi alcuni requisiti

- Principali requisiti e diagrammi di Bode

- Asintotica stabilita`  $\left\{ \begin{array}{l} \mu > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{array} \right.$ (Bode)
- Precisione statica  $\left\{ \begin{array}{l} g > 0 \quad (\text{poli in } 0) \\ e/o \\ \mu \quad \text{elevato} \end{array} \right.$
- Precisione dinamica
 - velocita` di risposta  ω_c elevata
 - smorzamento  φ_m elevato

- Principali requisiti e diagrammi di Bode

- Attenuazione disturbi in andata  $\left\{ \begin{array}{ll} \omega_c & \text{elevata} \\ |L(j\omega)| & \text{elevato per } \omega < \omega_c \end{array} \right.$
- Attenuazione disturbi in retroaz.  $\left\{ \begin{array}{ll} \omega_c & \text{non troppo elevata} \\ |L(j\omega)| & \text{piccolo per } \omega > \omega_c \end{array} \right.$
- Stabilità robusta  $\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_m & \\ k_m & \text{elevati} \end{array} \right.$

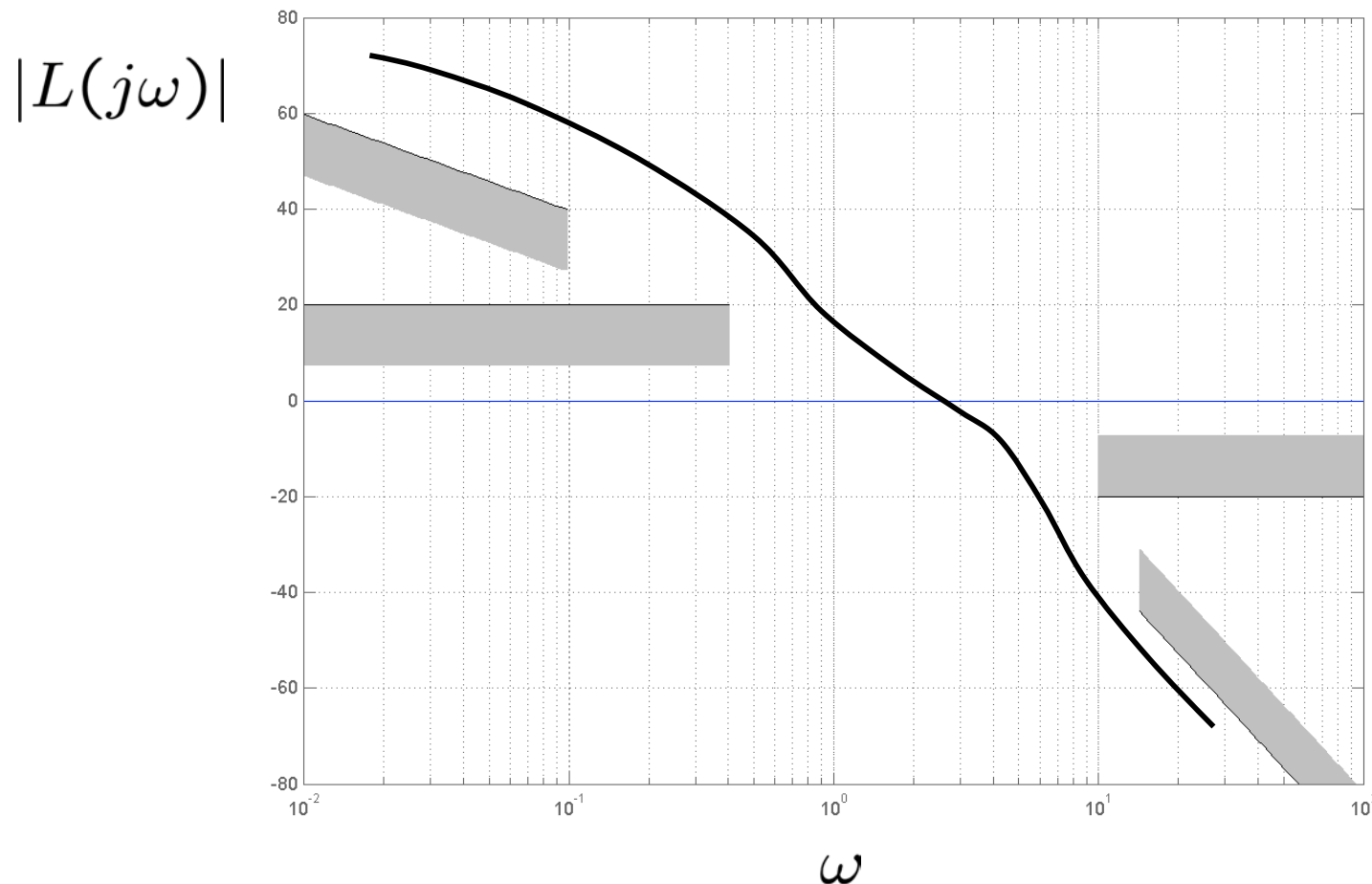
- Tipiche specifiche di progetto sui diagrammi di Bode

A partire dai requisiti si costruiscono opportune specifiche che forniranno vincoli di progetto. Per esempio:

- $|e(\infty)| \leq \bar{e}$ con w, d specificati } Specifica statica
 - Vincoli su $|L(j\omega)|$
 - $\omega_{\min} \leq \omega_c \leq \omega_{\max}$
 - $\varphi_m \geq \bar{\varphi}_m$
 - $k_m \geq \bar{k}_m$
- } Specifiche dinamiche

- Rappresentazione grafica dei vincoli di progetto sui d. di Bode

I vincoli di progetto derivanti dalle specifiche che devono essere soddisfatte a progetto ultimato possono convenientemente essere riportati sui diagrammi di Bode.



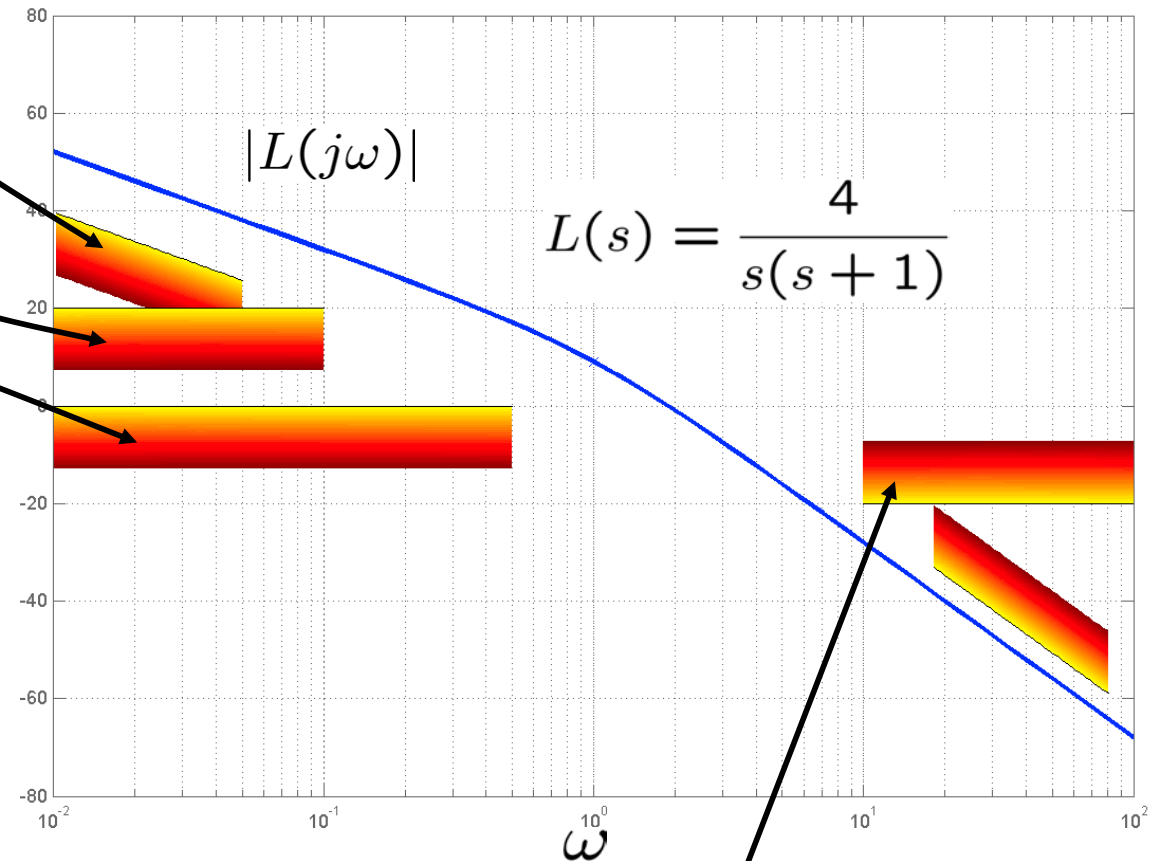
Esempio

$$|e(\infty)| = 0, w(t) = A \cdot 1(t), \forall A$$

$$|S(j\omega)| \leq -20\text{dB}, \omega \in (0, 0.1)$$

$$S\% \leq 3 \rightarrow \xi \geq 0.75$$

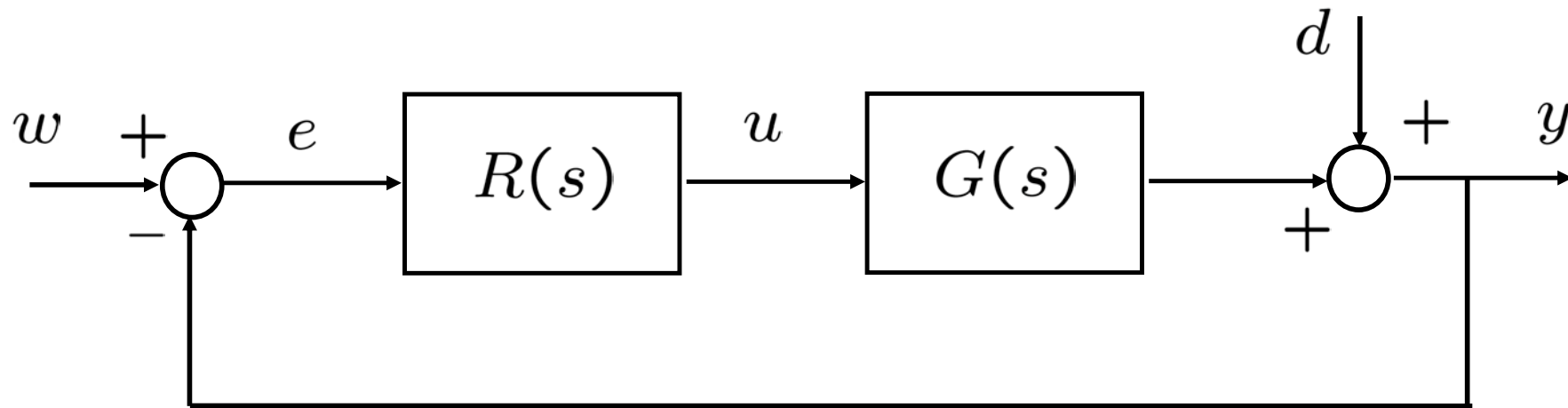
$$T_{a1} \leq 10 \rightarrow \omega_c \geq 0.5$$



$$|F(j\omega)| \leq -20\text{dB}, \omega \in (10, 100)$$

- Progetto "per tentativi"

- Partendo da un controllore $R(s)$ di struttura semplice (per esempio un semplice guadagno $R(s) = \mu_R$) si complica via via la sua funzione di trasferimento finché tutte le specifiche sono **eventualmente** soddisfatte.
- Si può condurre lavorando quindi sul piano s che sui diagrammi di Bode lavorando quindi in frequenza.

- Esempio 1

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

- Specifiche di progetto

- $|e(\infty)| \leq 0.1$ con $\begin{cases} w(t) = A \cdot 1(t), & |A| \leq 1 \\ d(t) = B \cdot 1(t), & |B| \leq 5 \end{cases}$
- $\omega_c \geq 0.2$
- $\varphi_m \geq 60^\circ$

- Controllore

$$R(s) = \underbrace{\frac{\mu_R}{s^r}}_{R_1(s)} \underbrace{\frac{\prod (1 + sT_i)}{\prod (1 + s\tau_i)}}_{R_2(s)}$$

- Progetto statico

$$L(s) = R(s)G(s) = R(s) \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

Il progetto statico non è influenzato da $R_2(s)$ in quanto $R_2(0) = 1$



Guadagno = $10\mu_R > 0$

Tipo = r

Ma: $e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$

dove: $e_w(t) = e(t) |_{d(t)=0}$
 $e_d(t) = e(t) |_{w(t)=0}$ } sovrapposizione
 effetti

$$e(\infty) = e_w(\infty) + e_d(\infty)$$

$$\rightarrow |e(\infty)| \leq |e_w(\infty)| + |e_d(\infty)|$$

Ma:

$$|e_w(\infty)| = \begin{cases} \frac{|A|}{1 + 10\mu_R} \leq \frac{1}{1 + 10\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

$$|e_d(\infty)| = \begin{cases} \frac{|B|}{1 + 10\mu_R} \leq \frac{5}{1 + 10\mu_R} & r = 0 \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

- Con $r = 1$

↳ $e(\infty) = 0, \quad \forall \mu_R \quad \longrightarrow \quad R_1(s) = \frac{\mu_R}{s}$

- Con $r = 0$

↳ $|e(\infty)| \leq \frac{1}{1 + 10\mu_R} + \frac{5}{1 + 10\mu_R} = \frac{6}{1 + 10\mu_R}$

imponendo $|e(\infty)| \leq 0.1$

↳ $\frac{6}{1 + 10\mu_R} \leq 0.1 \quad \longrightarrow \quad \mu_R \geq 5.9$

Potremmo quindi scegliere

$R_1(s) = 8$

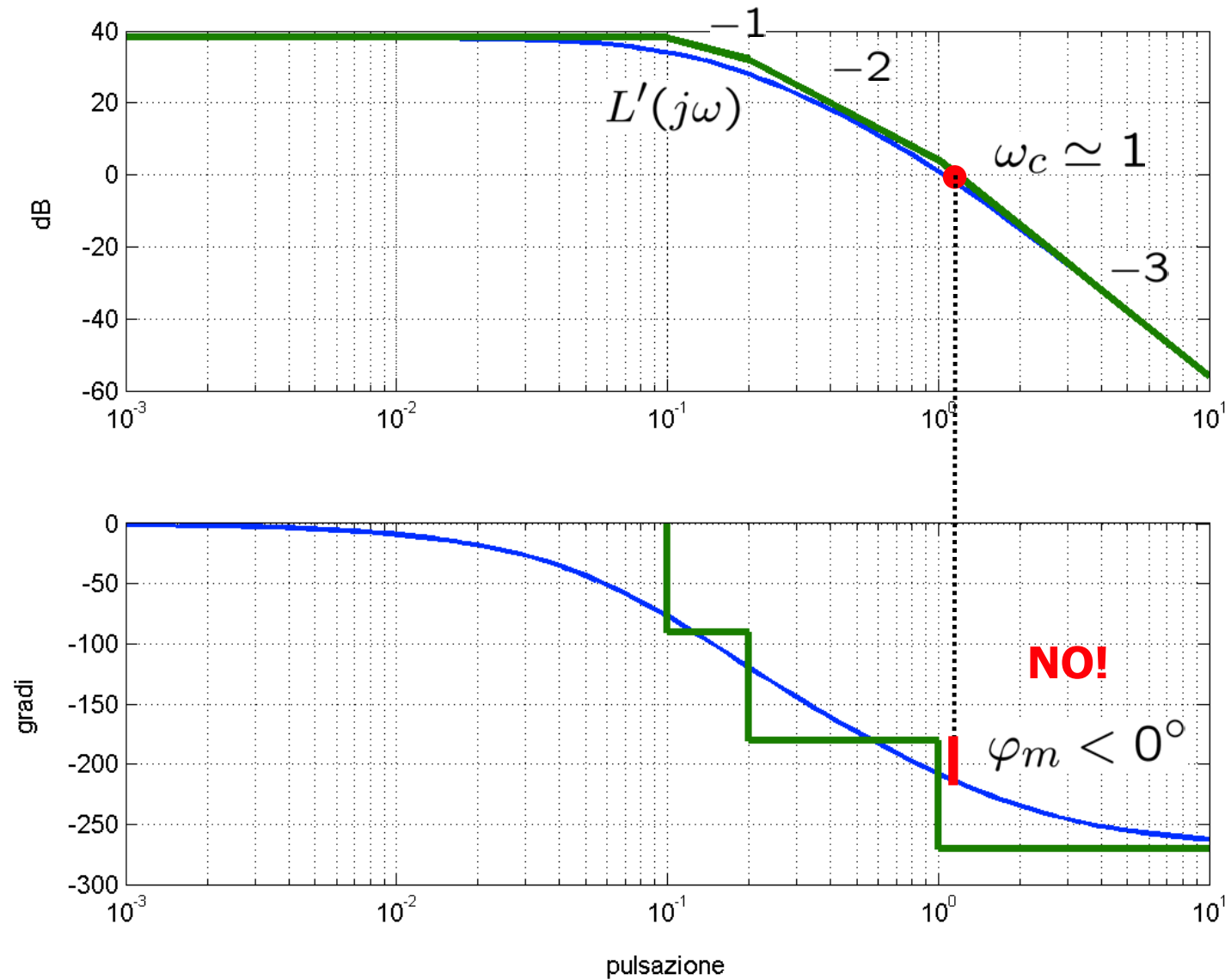
- Progetto dinamico (A)

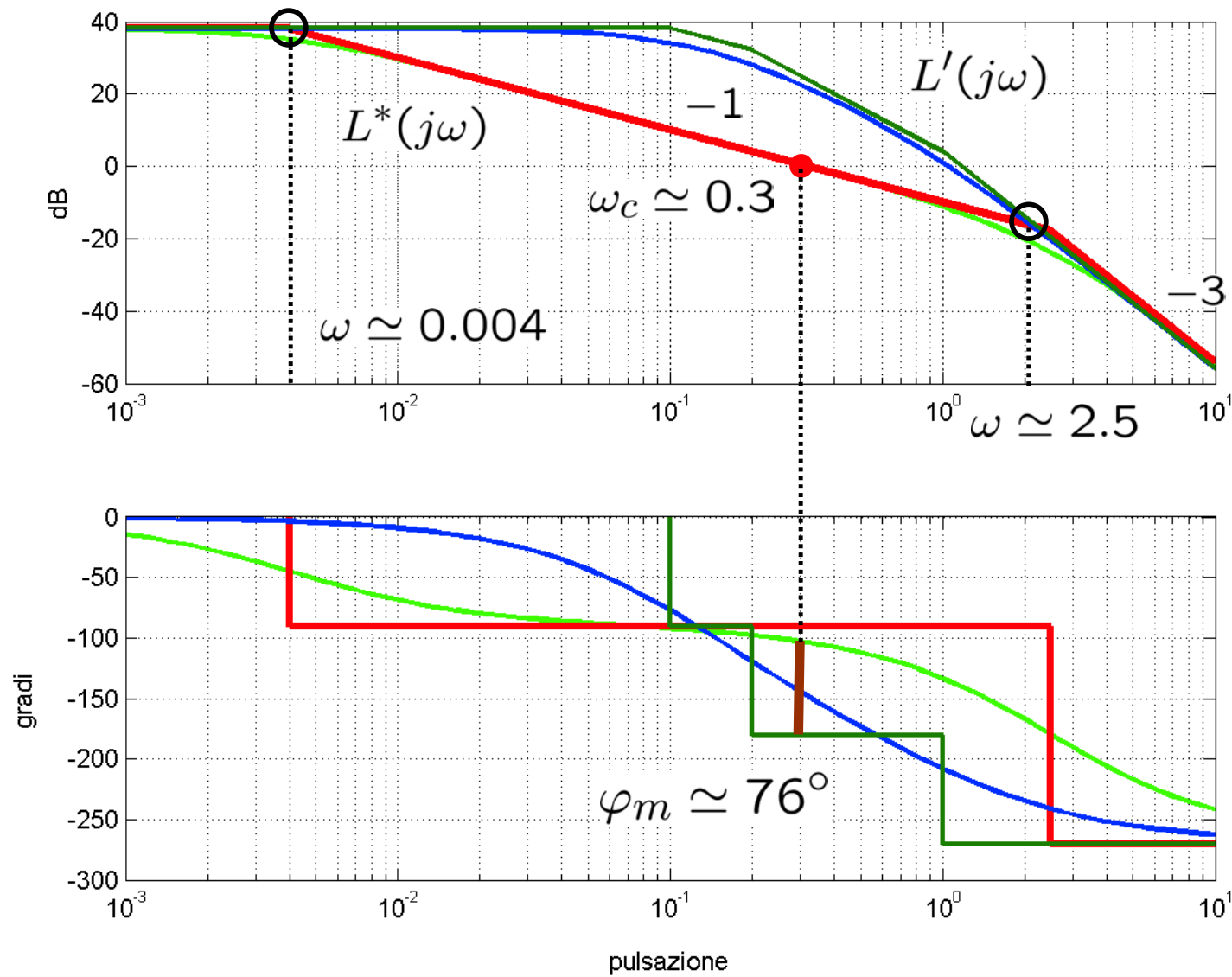
$$R_1(s) = 8$$

$$L(s) = 8 G(s) R_2(s) = L'(s) R_2(s)$$

$$\text{con } L'(s) = \frac{80}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

$$R_2(s) = 1$$





- Procedura seguita nel secondo tentativo del progetto (A):

- Si fissa una pulsazione di taglio soddisfacente: $\omega_c = 0.3 \geq 0.2$
 - Si prende una retta con pendenza -1 , passante per ω_c
e si individuano le pulsazioni corrispondenti alle intersezioni con il diagramma asintotico di L'
 - Si determina quindi la funzione di trasferimento d'anello $L^*(s)$ corrispondente al nuovo diagramma asintotico
 - Essendo evidentemente $L^*(s) = R_2(s)L'(s)$ si ha $R_2(s) = \frac{L^*(s)}{L'(s)}$
 - Nel nostro caso quindi: $L^*(s) = \frac{80}{(1 + s/0.004)(1 + s/2.5)^2}$
- 
 $R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 250s)(1 + 0.4s)^2}$
 e $R(s) = 8R_2(s)$

- Quindi la soluzione (A) presenta le seguenti caratteristiche:

garantisce la precisione statica

$$R(s) = 8 \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 250s)(1 + 0.4s)^2}$$

aumento di $\arg L(j\omega)$

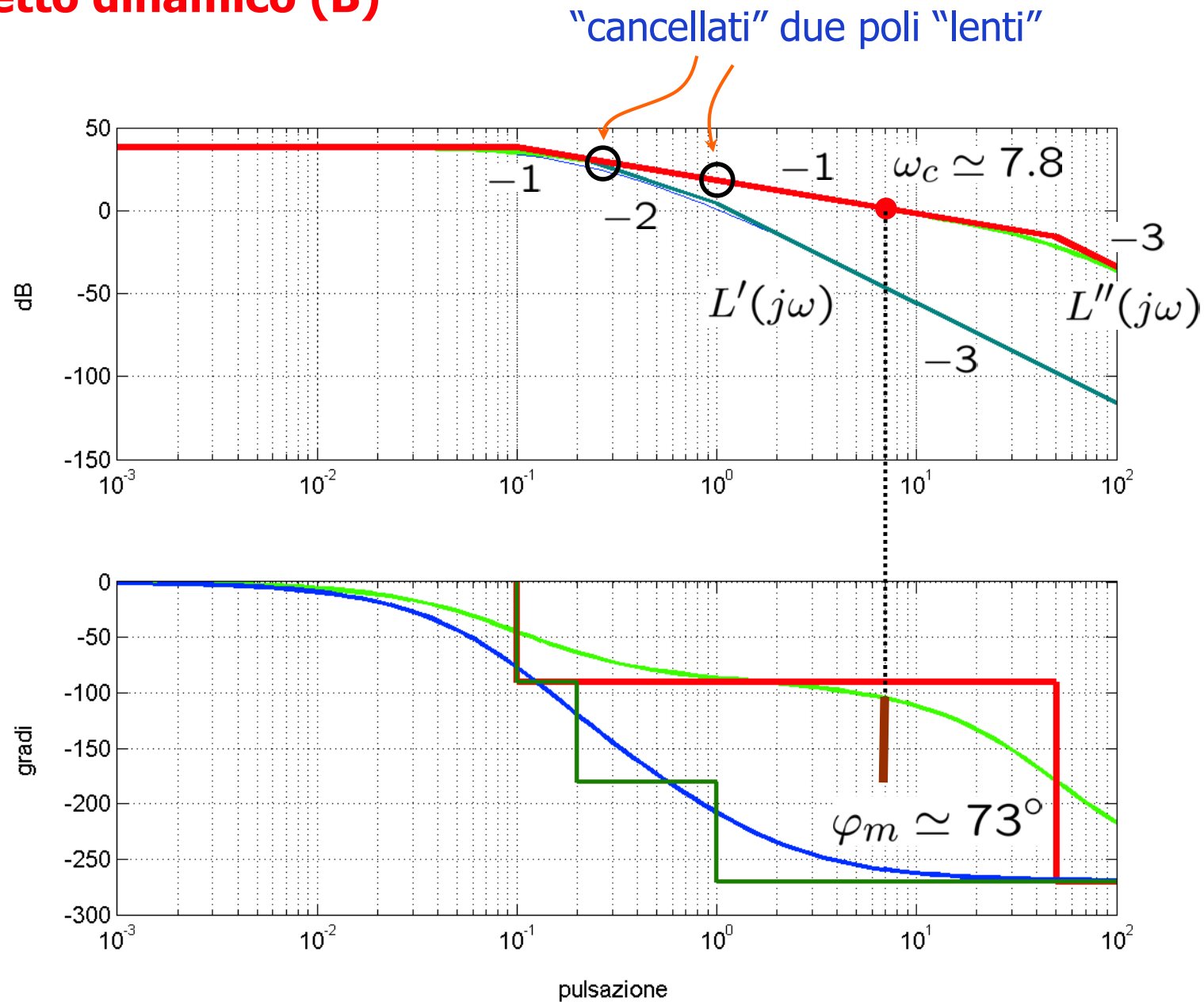
fa scendere $|L(j\omega)|$
a bassa frequenza
(per "tagliare a -1")

- necessari per la realizzabilità
- favoriscono l'attenuazione dei disturbi in retroazione

- Motivazioni dei “raccordi” tra $L'(s)$ e $L^*(s)$

- A bassa frequenza per non alterare il progetto statico
- Ad alta frequenza per la realizzabilità fisica

- Progetto dinamico (B)



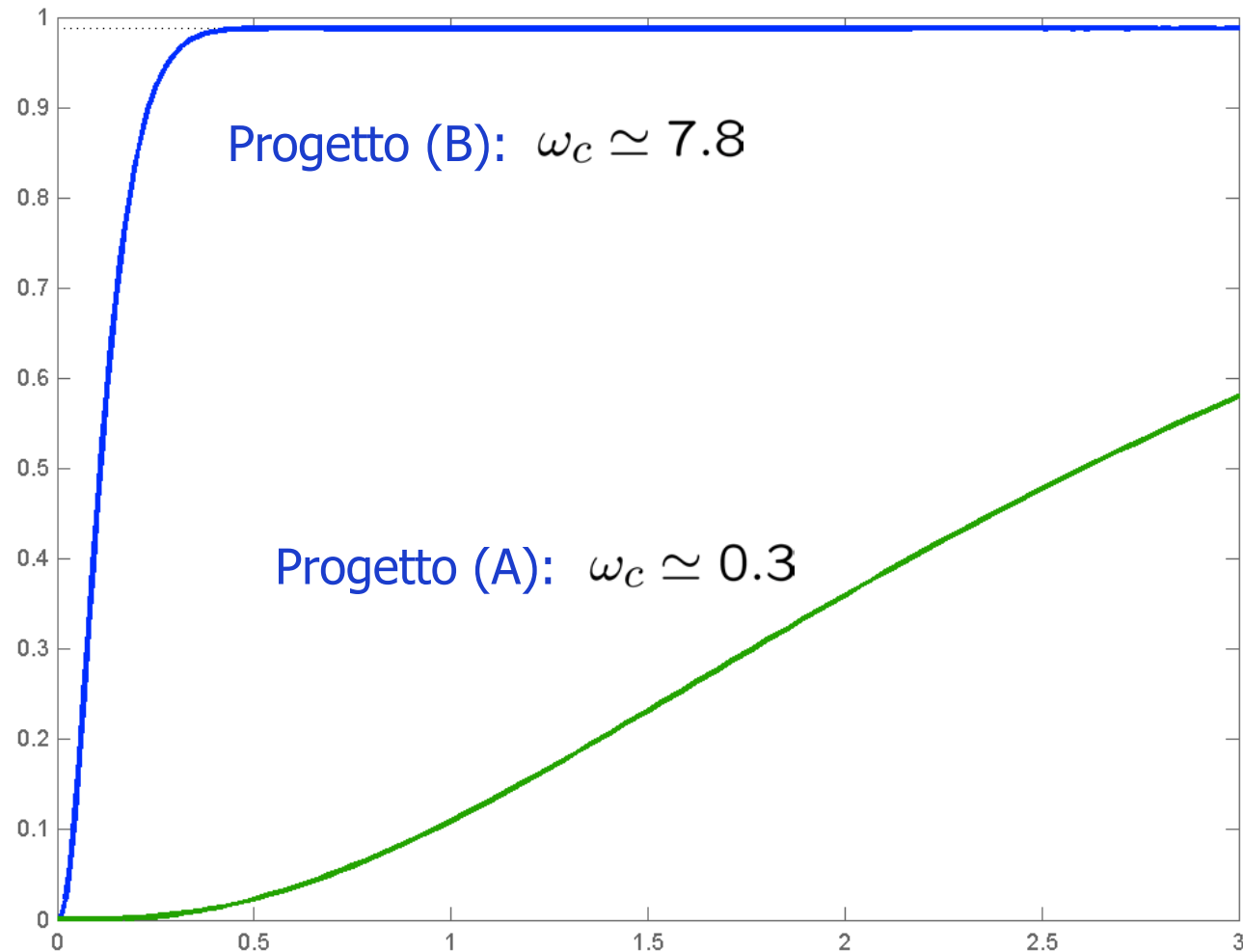
- Procedura seguita nel progetto (B):

- Si ha cura di mantenere invariato il progetto statico
- Si mantiene il polo in -0.1 (cioè quello più "lento") per avere la "discesa" con pendenza -1
- Si cancellano i poli opportuni in modo da attraversare l'asse a 0 dB con pendenza -1
- Si aggiunge un pari numero di poli sufficientemente a destra della pulsazione di taglio ottenuto
- Nel nostro caso quindi:
$$L''(s) = \frac{80}{(1 + 10s)(1 + 0.02s)^2}$$


$$R_2(s) = \frac{(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 0.02s)^2} \quad \text{e} \quad R(s) = 8R_2(s)$$

- Confronto risposte al gradino del sist. in anello chiuso

Nel Progetto (B) la banda passante e' molto maggiore da cui una velocita' di risposta maggiore



- Inconvenienti associati ad ω_c elevata

- Alti valori dei segnali di controllo generati dal controllore
- Scarsa attenuazione dei disturbi in retroazione
- Scarsa robustezza rispetto a:
 - ritardi di tempo (ricordiamo che lo sfasamento in ritardo cresce con ω)
 - incertezze sul modello ad alta frequenza

- Progetto statico e dinamico (C)

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s} \quad (\text{quindi cambiamo anche il progetto statico})$$

$$L(s) = \frac{G(s)}{s} \mu_R R_2(s) = L_1(s) \mu_R R_2(s)$$

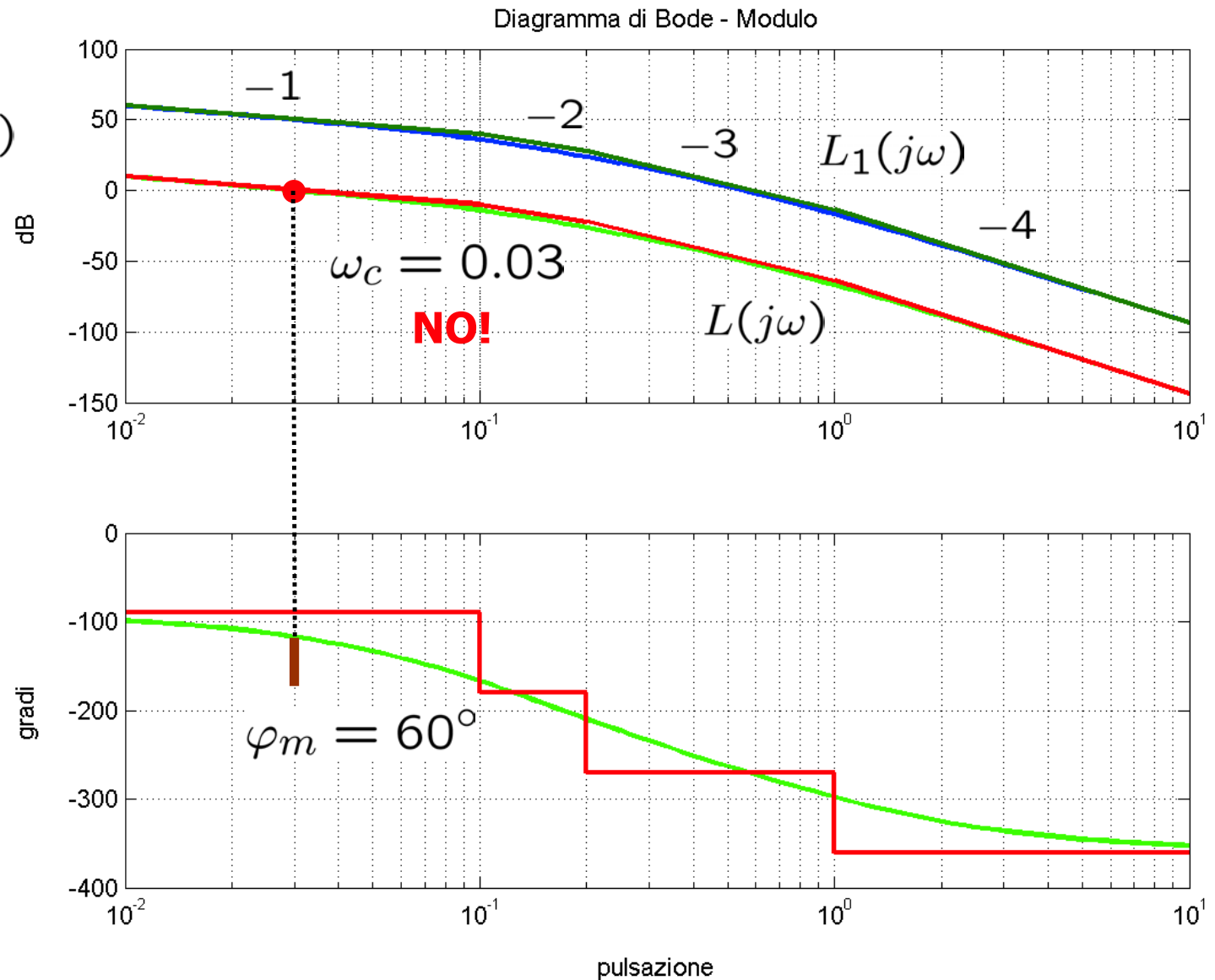
$$\text{con } L_1(s) = \frac{10}{s(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

- Tentativo 1

$$R_2(s) = 1$$

$$L(s) = \mu_R L_1(s)$$

$$\mu_R = 10^{-5/2} \quad \text{dB}$$



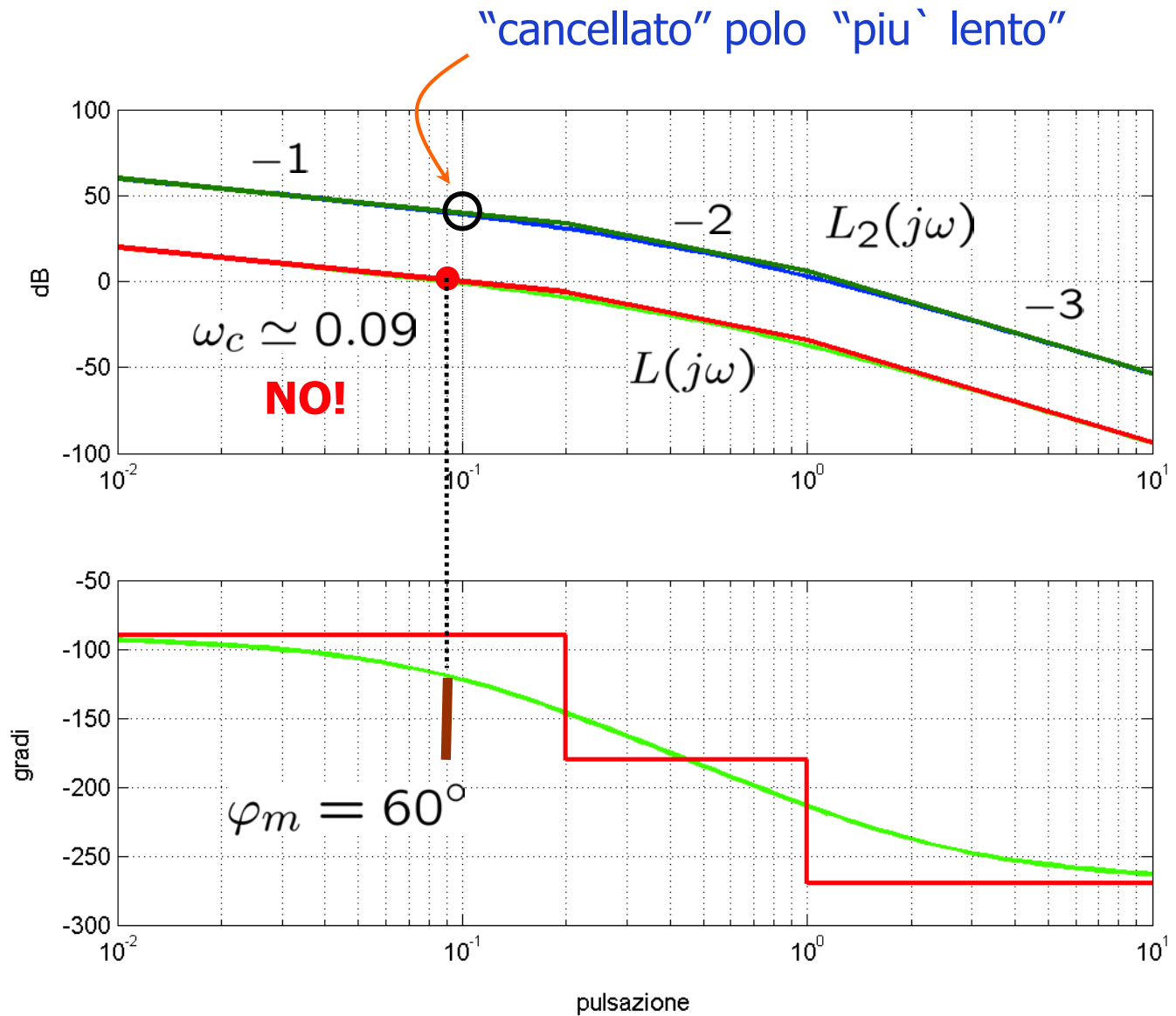
- Tentativo 2

$$R_2(s) = (1 + 10s)$$

$$L(s) = \mu_R L_2(s)$$

$$L_2(s) = \frac{10}{s(1 + 5s)(1 + s)}$$

$$\mu_R \simeq 0.01$$



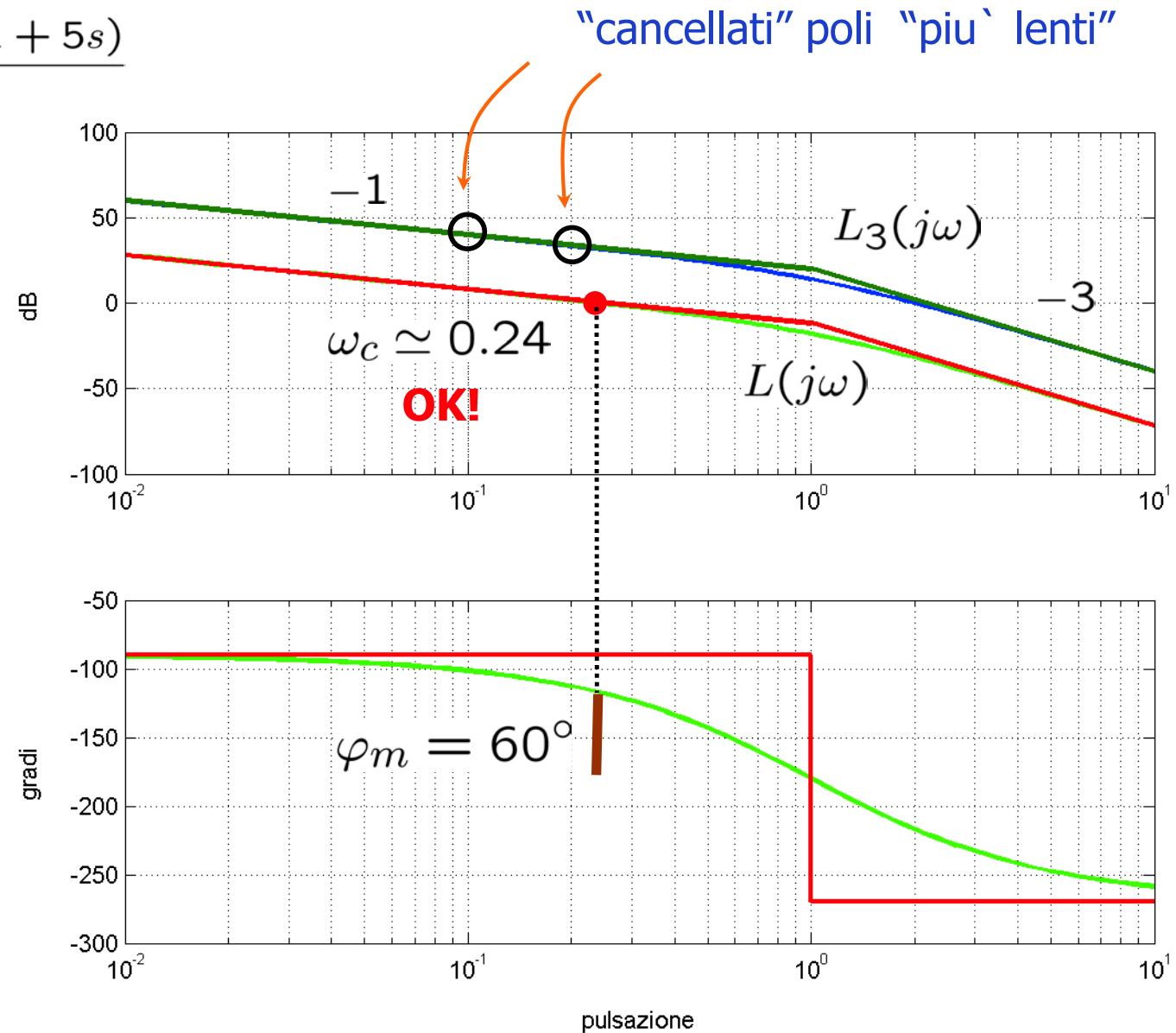
- Tentativo 3

$$R_2(s) = \frac{(1 + 10s)(1 + 5s)}{1 + s}$$

$$L(s) = \mu_R L_3(s)$$

$$L_3(s) = \frac{10}{s(1 + s)^2}$$

$$\mu_R \simeq 0.0254$$

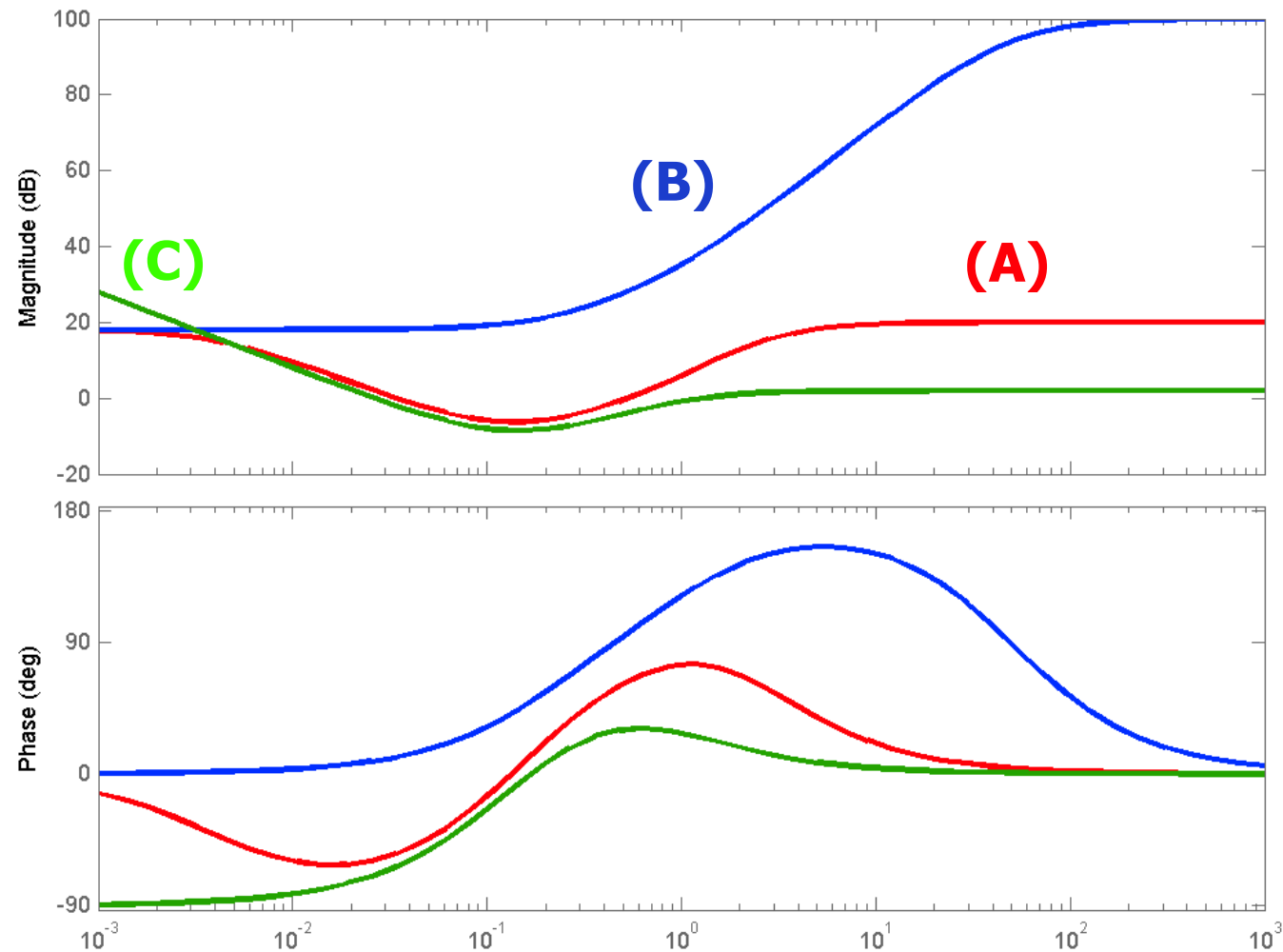


- Riassumendo:

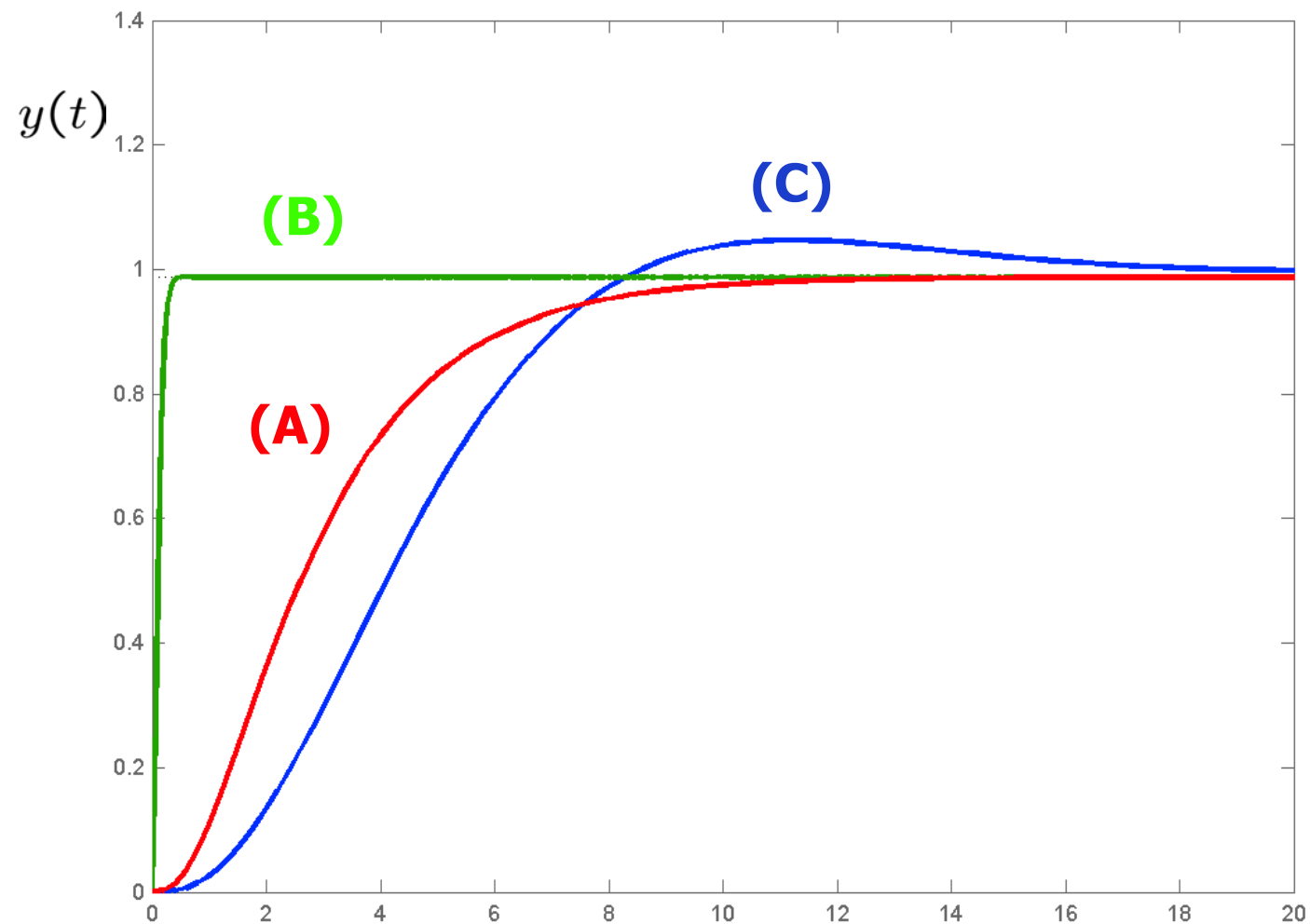
$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}$$

(A):	$R(s) = \frac{8(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 250s)(1 + 0.4s)^2}$	$\omega_c \simeq 0.3$ $\varphi_m \simeq 76^\circ$
(B):	$R(s) = \frac{8(1 + 5s)(1 + s)}{(1 + 0.02s)^2}$	$\omega_c \simeq 7.8$ $\varphi_m \simeq 73^\circ$
(C):	$R(s) = \frac{0.0254(1 + 10s)(1 + 5s)}{s(1 + s)}$	$\omega_c \simeq 0.24$ $\varphi_m \simeq 63^\circ$ $e(\infty) = 0$

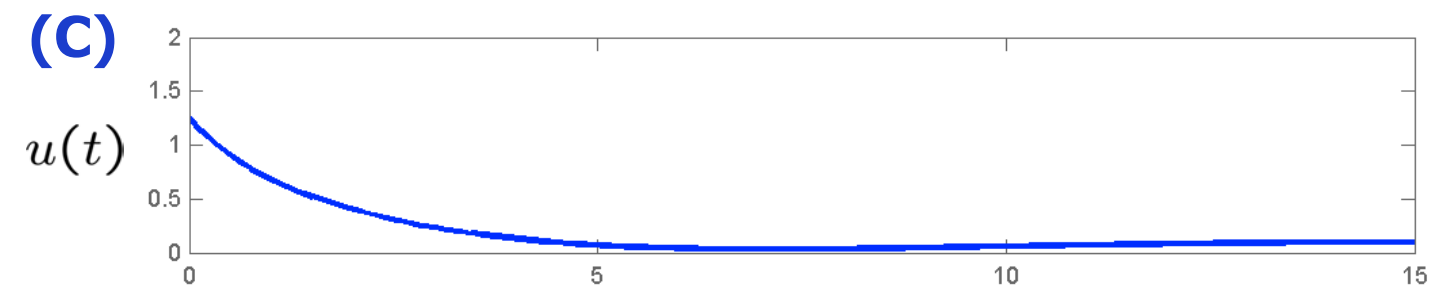
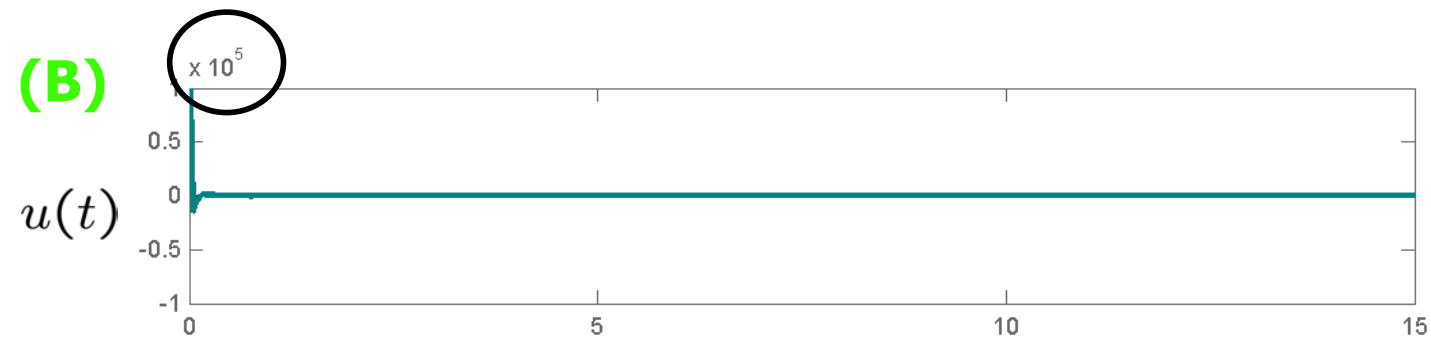
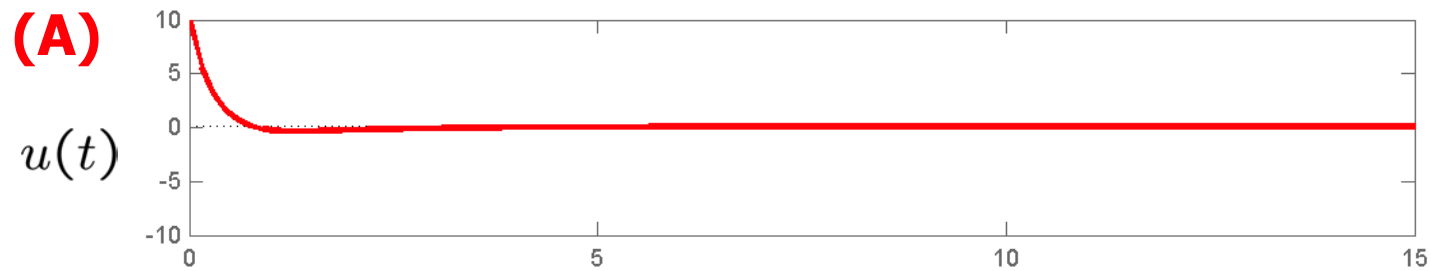
- Diagrammi di Bode dei diversi controllori:



- Risposte al gradino in anello chiuso:

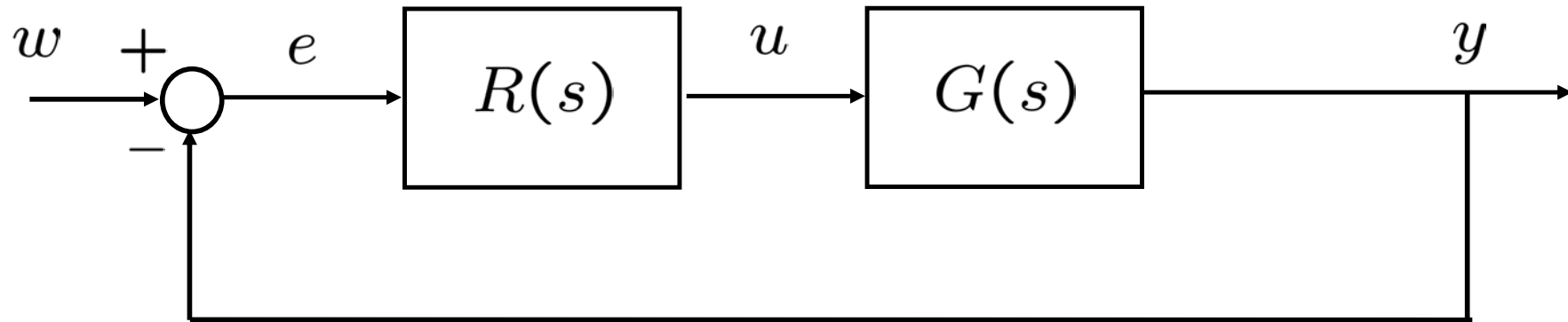


- Segnali di controllo:



- Progetto per sistemi a fase non minima/instabili

- Se il sistema da controllare non è a fase minima o è instabile, non si può utilizzare il criterio di Bode ed inoltre non si possono effettuare cancellazioni di zeri o poli a parte reale positiva quindi il progetto per tentativi va condotto con cautela.
- Inoltre la presenza di tali zeri/poli pone delle limitazioni su ciò che può essere ottenuto in termini di prestazioni

- Esempio 2 (a fase non minima)

$$G(s) = \frac{10(1 - 2s)}{s(1 + 10s)(1 + 0.1s)}$$

- Specifica di progetto: $\varphi_m \geq 40^\circ$

- Il termine $\frac{(1 - 2s)}{s}$

- Non e' cancellabile.
- Da' contributo negativo alla fase: $-90^\circ - \text{arctg}(2\omega)$

in $\omega = 0.5$ tale contributo vale -135°



ω_c

Non potra' superare di molto $\omega = 0.5$



Lo zero a fase non minima da' una limitazione forte alla velocita' di risposta ottenibile a valle del progetto del controllore

- Tentativo 1 $\arg G(j\omega) = -140^\circ$ in $\omega \simeq 0.085$

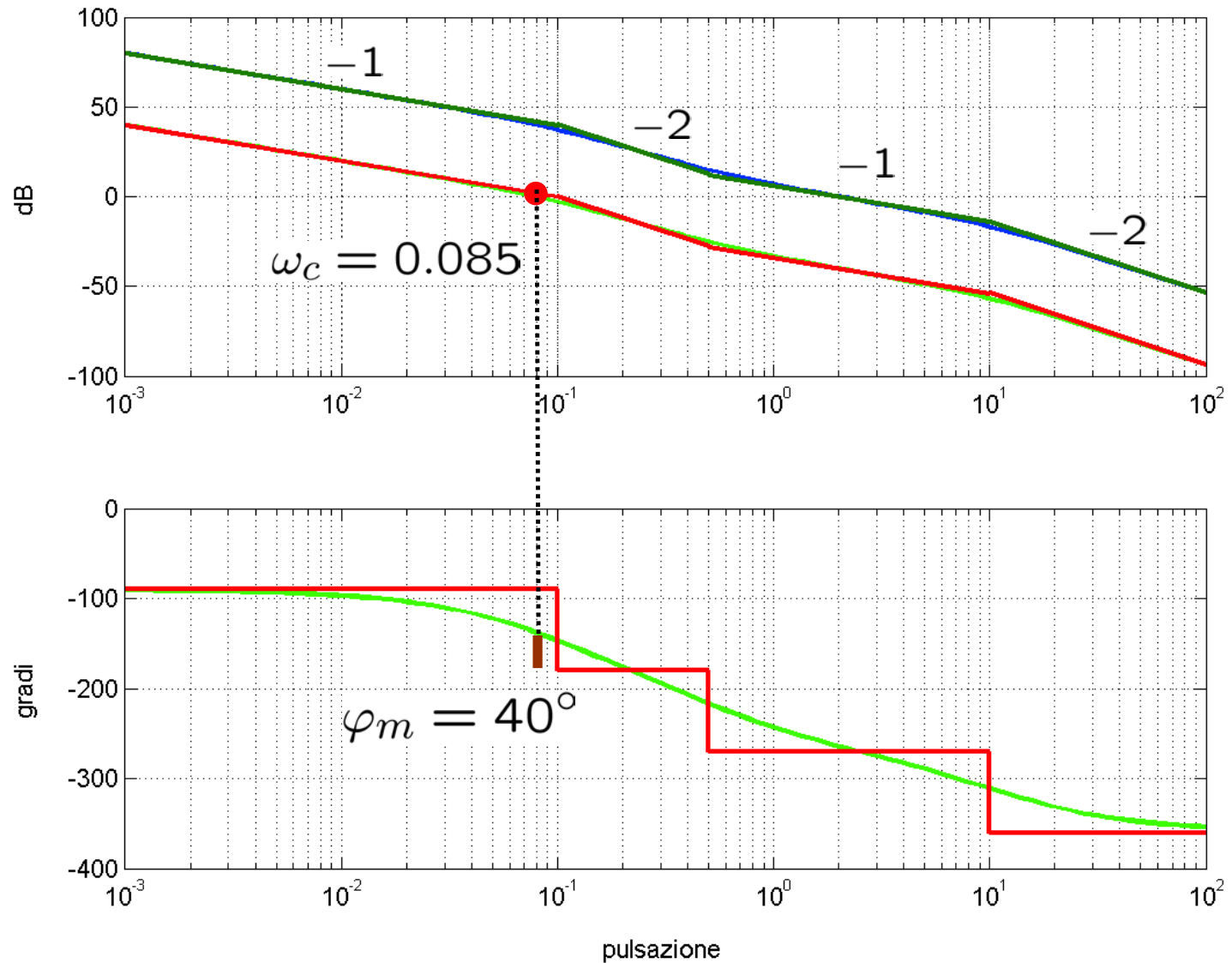
$\omega_{c\max} = 0.085$

$$R(s) = \mu_R$$

$$L(s) = \mu_R G(s)$$

$$\mu_R \simeq 0.01$$

$\omega_c = 0.085$ dB

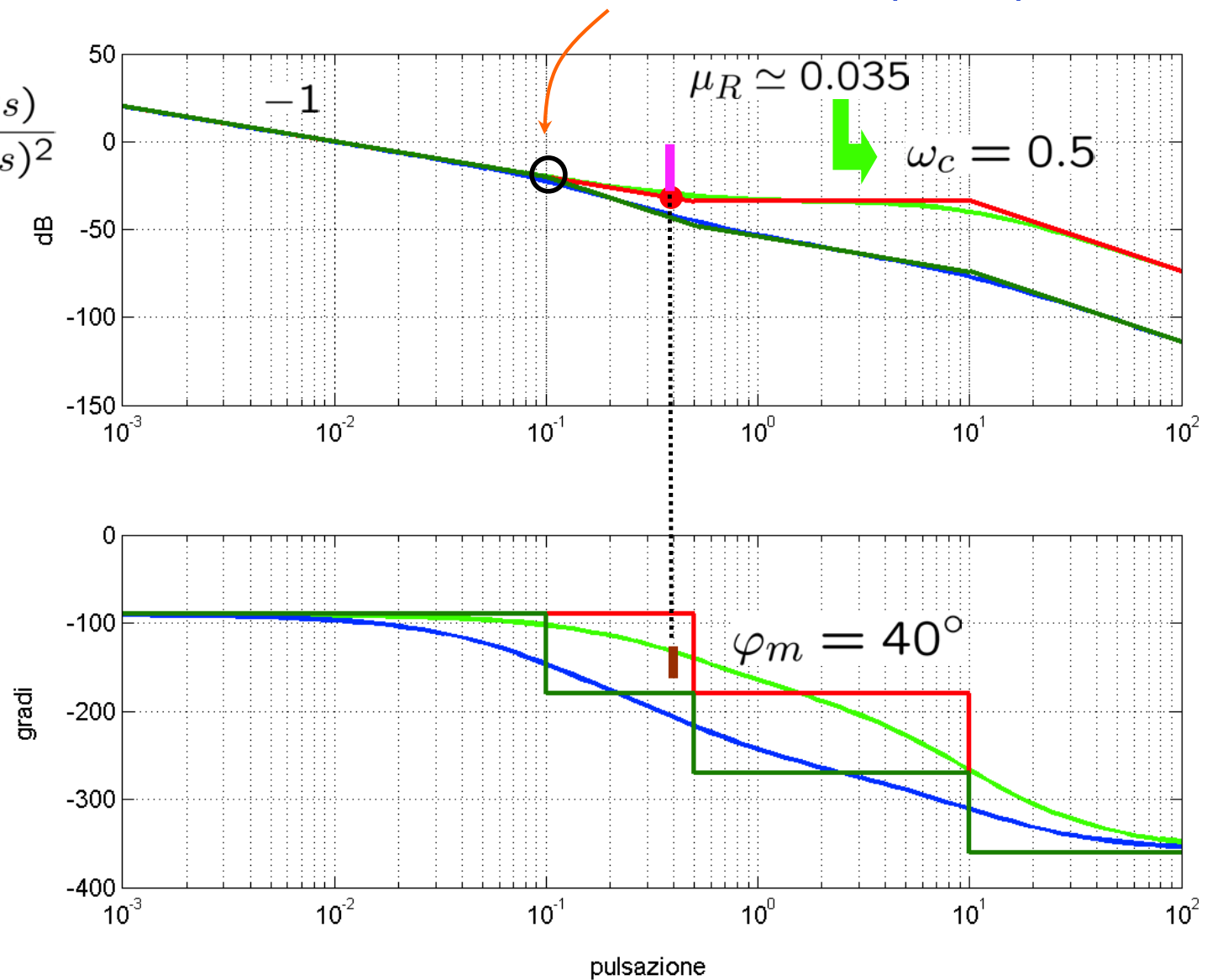


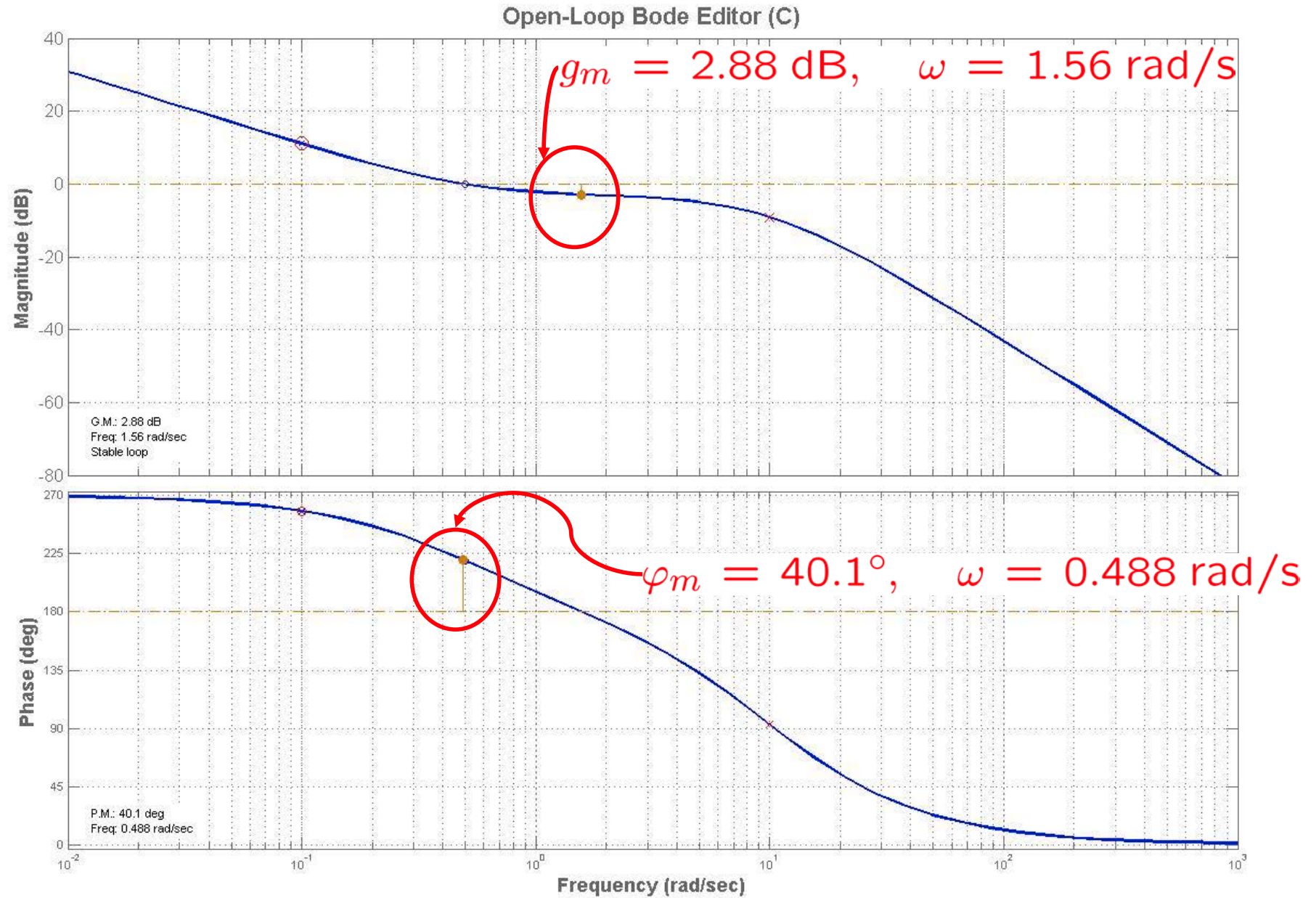
- Tentativo 2 $\arg G(j\omega) = -140^\circ$ in $\omega \simeq 0.5$

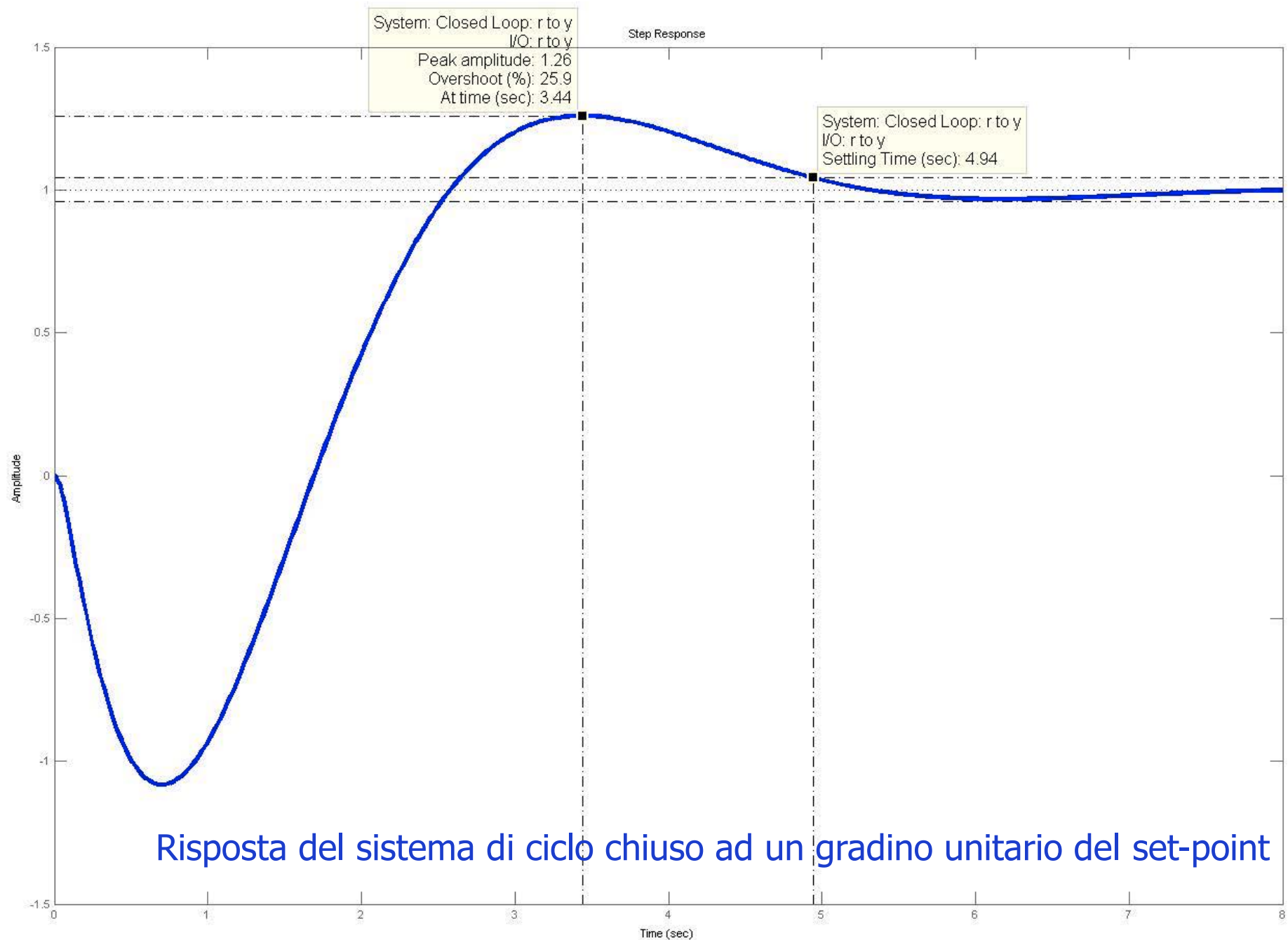
$$R(s) = \mu_R \frac{1 + 10s}{1 + 0.1s}$$

$$L(s) = \mu_R \frac{10(1 - 2s)}{s(1 + 0.1s)^2}$$

"cancellato" polo "piu` lento"

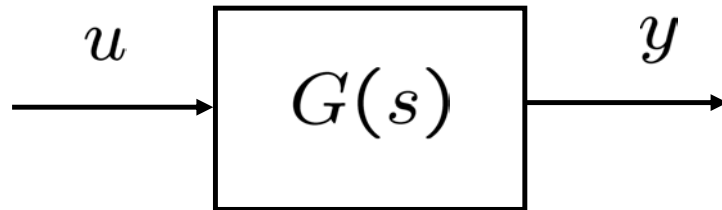






Risposta del sistema di ciclo chiuso ad un gradino unitario del set-point

- Esempio 3 (instabile in anello aperto)

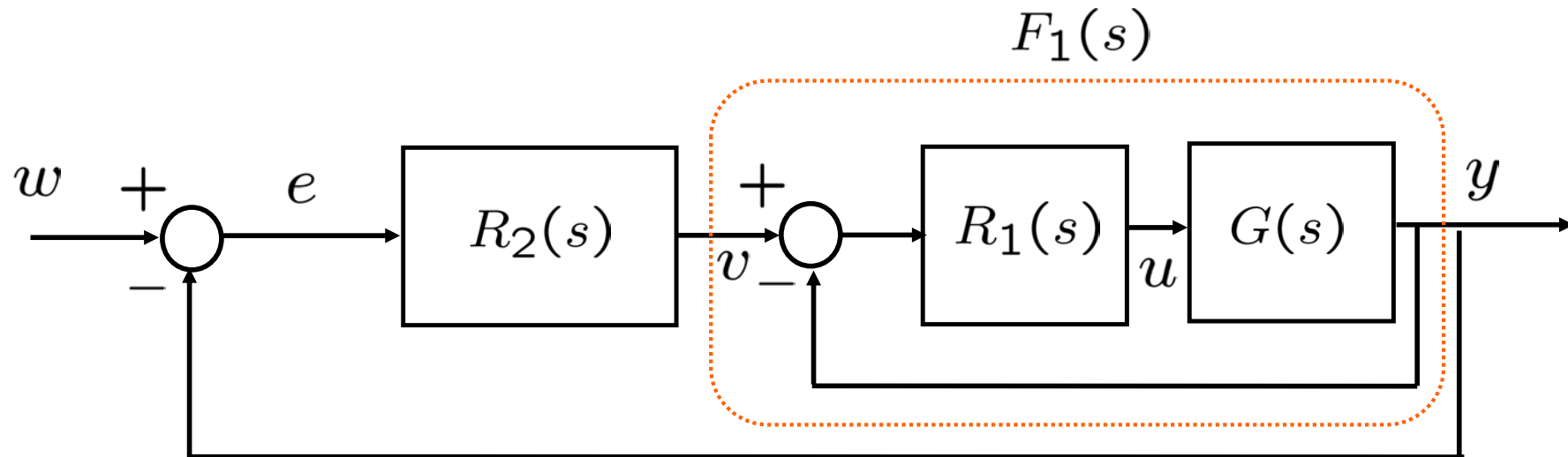


$$G(s) = \frac{1}{s - 1}$$

- Specifiche di progetto:

- $|e(\infty)| = 0$ con $w(t) = A \cdot 1(t)$
- $\omega_c \geq 0.5$
- $\varphi_m \geq 45^\circ$

La via piu` semplice e` utilizzare il cosiddetto **schema a doppio anello**:



$R_1(s)$ ha il compito di stabilizzare il sistema da controllare

$R_2(s)$ ha il compito di far si` che le specifiche di progetto siano soddisfatte

Il progetto di $R_1(s)$ puo` essere condotto semplicemente cosi`:

$$R_1(s) = \mu_1 \quad \longrightarrow \quad L_1(s) = \frac{\mu_1}{s - 1}$$

$$\downarrow \quad F_1(s) = \frac{L_1(s)}{1 + L_1(s)} = \frac{\mu_1}{s - 1 + \mu_1}$$

Scegliendo per esempio $\mu_1 = 11$ si otterrebbe $F_1(s) = \frac{1.1}{1 + 0.1s}$

Il progetto di $R_2(s)$ e' ora molto semplice. Per esempio

$$R_2(s) = \frac{5}{s}$$



$$L_1(s) = \frac{5.5}{s(1 + 0.1s)}$$

- $|e(\infty)| = 0$
- $\omega_c \simeq 5.5$
- $\varphi_m \simeq 61^\circ$

