SISTEMI DINAMICI

Martedì 17 - 19

Mercoledì 16 - 19

SD2022

Sistemi dinamici : sistemi differenziali

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t))$$

sistemi discreti

ESAME : • esercizio

• Teoria

DINAMICA

STATO INIZIALE $\longrightarrow$ NUOVO STATO

POINCARÉ $\longrightarrow$ ASPETTI QUALITATIVI

Problema principale $\longrightarrow$ NON LINEARITÀ

CAOS : • dipendenza da condizioni iniziali

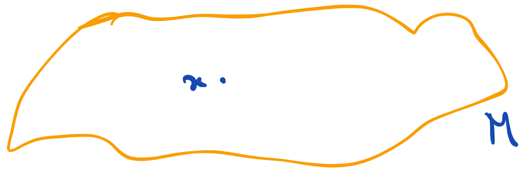
• le traiettorie "vagano un po' ovunque"

Consideriamo $\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f(x(\tau))$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in M$ varietà diff

localmente $M \sim \mathbb{R}^n$

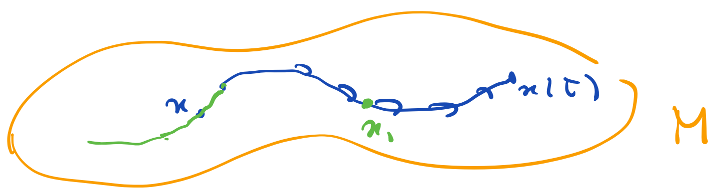
M è chiamato lo spazio delle fasi



x identifica il sistema

$\varphi_\tau : M \longrightarrow M$

$x_0 \longrightarrow \varphi_\tau(x_0) = x(\tau)$



$\Gamma_x = \{ \varphi_\tau(x), \forall \tau \in \mathbb{R} \}$ Traiettoria o orbita

$\Gamma = \{x\}$ punto di equilibrio
punto critico

Orbita periodica : $\gamma : S^1 \hookrightarrow M$

$\exists\, T$ t.c. $\varphi_T(x) = x$

Λ insieme invariante $\varphi_\tau(\Lambda) = \Lambda$

Λ insieme invariante in avanti $\varphi_\tau(\Lambda) \subset \Lambda \quad \forall t > 0$

Def : Un flusso su M è una famiglia ad un parametro di diffeomorfismi [derivabile, invertibile con inversa derivabile]

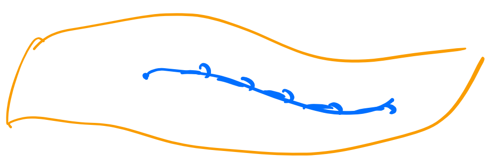
$$\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$$
$$t \quad x \qquad\qquad \varphi_t(x)$$

1. $\varphi_0(x) = x \qquad t=0$

2. $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$

$\to$ struttura di gruppo $\left[\ \varphi_t \circ \varphi_{-t} = id\ \right)$

Campo vettoriale su M: una funzione $f : M \to \mathbb{R}^n$ che ad ogni punto $x \in M$ associa un vettore v



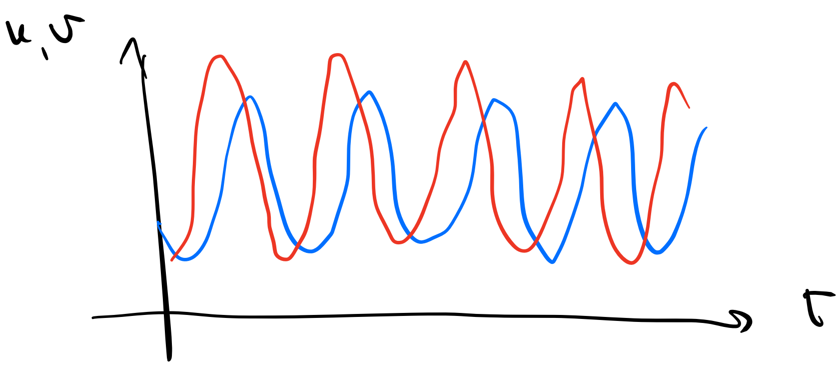
$$\left.\frac{d}{dt}\varphi_t(x)\right|_{t=0} = f(x)$$
$$\Uparrow$$
$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x)$$

$$\begin{cases} u' = \left(r - a\, v(t)\right) u(t) \\ v' = \left(-\mu + \gamma a\, u(t)\right) v(t) \end{cases}$$

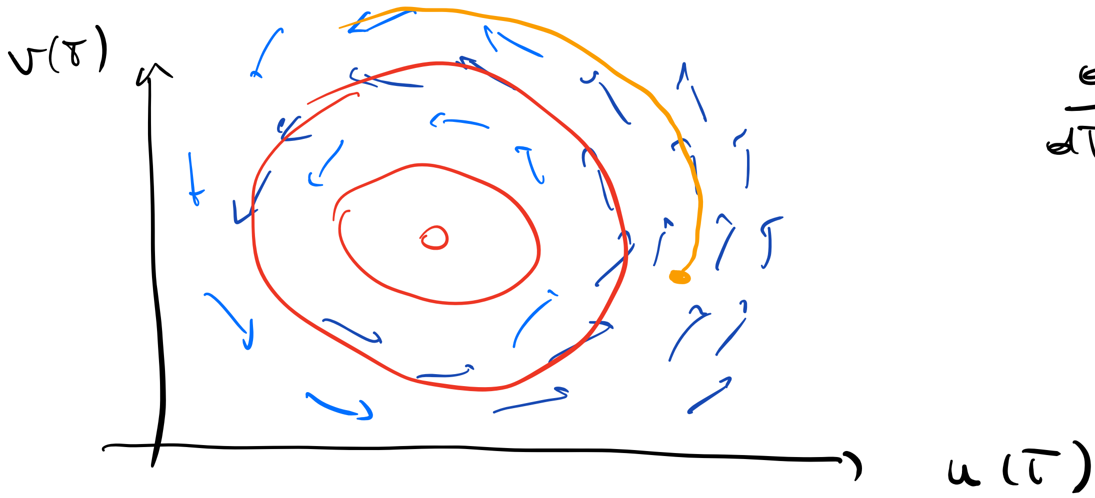
u = prede

v = predatori

$$\underline{\underline{u'}} = \underbrace{r u}_{} - \underbrace{a\, u(t)\, v(t)}_{}$$



$$\Longleftarrow$$



$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f$$

COMMENTO

$\to$ τ variabile discreta

$$x_{t+1} = \varphi(x_\tau) \longrightarrow x_\tau = \varphi^\tau(x_0)$$

$$\varphi^\tau = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\tau}$$

VARIETÀ DIFFERENZIABILE

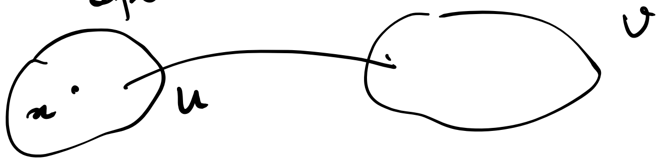
M localmente è $\mathbb{R}^n$

X spazio topologico: è un insieme X dotato di una famiglia di aperti $\mathcal{U}$

$\mathcal{U} \to X, \emptyset, U \cap V$ è aperto

$U_\alpha \subseteq X$ aperti $\longrightarrow$ $\bigcup_\alpha U_\alpha$ aperti

f funzione continua : manda aperti in aperti



X : U_α : $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$ ricoprimento

Definiamo una carta : $\varphi : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$

continua e con inversa continua

$\underbrace{f : U \to \mathbb{R}}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$

$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tali che

le funzioni di transizione $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ $\longrightarrow$ $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ di classe C^∞

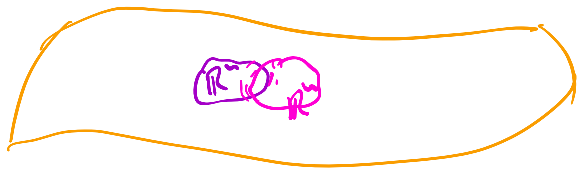
diciamo che M equipaggiato di questa struttura è una varietà differenziabile

$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$

su $V = U_\alpha \cap U_\beta$

$\varphi_\beta : U_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^n$

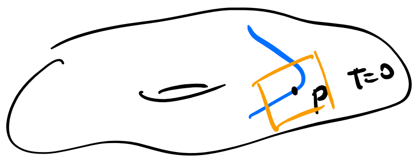
$$f \circ \varphi_\beta^{-1} = \left(f \circ \varphi_\alpha^{-1} \right) \circ \left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \right)$$



CAMPI VETTORIALI

$M \subseteq \mathbb{R}^n$

$\gamma : \overset{\mathbb{R}}{J} \longrightarrow M$ liscia



$\gamma(0) = p$

$v = \dot{\gamma}(0) \longrightarrow$

l'insieme dei vettori velocità si dice spazio tangente T_pM

M varietà diff $\rightsquigarrow$ "derivata direzionale"

Definiamo lo spazio tangente T_pM come l'insieme di tutte le mappe lineari

$$v : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0}$$

per γ una curva liscia $\gamma(0) = p$

$v \in T_pM$ è detto vettore tangente a M in p

Prendiamo $\quad f: M \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \gamma: \mathbb{R} \longrightarrow M$

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\frac{d}{d\tau} f(\gamma(\tau))\Big|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau} f(x^1(\tau), \dots, x^n(\tau))\Big|_{\tau=0}$$

$$= \sum_i^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau} = \Big(\sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{dx^i}{d\tau}}_{v^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big) f$$

$$v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \qquad \gamma(\tau=0) = p$$

$$\frac{d}{d\tau}(fg)\Big|_{\tau=0} = f(p) \frac{d}{d\tau} g(\gamma(\tau))\Big|_{\tau=0} +$$

$$+ \Big(\frac{d}{d\tau} f(\gamma(\tau)) \Big)\Big|_{\tau=0} g(p) \qquad \gamma(\tau=0)=p$$

$$v \in T_pM \Rightarrow v(fg) = f(p)\, v(g) + v(f)\, g(p)$$

<u>Def</u> : T_pM è lo spazio delle mappe lineari $C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$v(fg) = f(p)\, v(g) + v(f)\, g(p)$$

$$\forall f, g \in C^\infty(M)$$

$X_p \in T_p M \longrightarrow$ Campo vettoriale una

famiglia di vettori tangenti $X_p \in T_p M$

che dipende in modo liscio da p

$\forall f \in C^\infty(M)$, la funzione

$$p \longrightarrow X_p(f) \quad \text{è liscia}$$

Spazio dei campi vettoriali lo indichiamo

con $\mathfrak{X}(M)$

<u>Def</u> un campo vettoriale su M è una mappa

lineare $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ che

soddisfa

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

$\forall f, g \in C^\infty(M)$

$$v_{(\alpha)} = \sum v^i_{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Prendiamo $\mathbb{R}^n$ $\quad X = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ $\qquad x^i \longrightarrow y^j$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \qquad \hookrightarrow = \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$w^j = \sum_i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} v^i$$

Commutatore : $X = \frac{\partial}{\partial x}$ $\quad Y = \frac{\partial}{\partial x}$ $\quad X \circ Y = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

parentesi di Lie

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

$$X = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad Y = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \Big(\underbrace{a^j \frac{\partial b^i}{\partial x^j} - b^j \frac{\partial a^i}{\partial x^j}} \Big) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Flussi

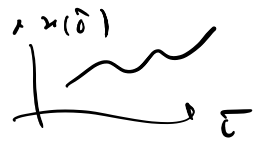
$$\gamma : \underset{[\tau_1,\tau_2]}{J} \longrightarrow M \qquad \dot\gamma(\tau) = \frac{d\gamma}{d\tau} \in T_{\gamma(\tau)} M$$

Def : $X \in \mathfrak{X}(M)$, una curva liscia $\gamma \in C^\infty(J, M)$ è una curva soluzione per X se

$$\dot\gamma(\tau) = X_{\gamma(\tau)}$$

→ al tempo τ il valore del campo vettoriale X in $\gamma(\tau)$ è il vettore velocità di γ al tempo τ

$U \subset \mathbb{R}^n$ $\qquad \gamma(\tau) = (x^1(\tau), \dots, x^n(\tau))$



$$\dot\gamma(\tau)(f) = \frac{d}{d\tau} f(x(\tau)) = \sum_i \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$\dot\gamma(\tau) = \sum \frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

D'altra parte: $X = \sum_i a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$

la condizione $\dot\gamma(\tau) = X_{\gamma(\tau)}$ e'

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} x^i = a^i(x(\tau))}$$

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f(x(\tau)) \qquad \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$$

Teorema di Cauchy