COSTANTE DEL MOTO (INTEGRALE PRIMO, INVARIANTE DEL MOTO)

<u>Def.</u> Una funzione $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice COSTANTE DEL MOTO per l'equazione $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ (*)

se $I(\bar{x}(t;\bar{x}_0)) = I(\bar{x}_0)$ $\leftrightarrow$ $\frac{dI(\bar{x}(t;\bar{x}_0))}{dt} = 0$

$\forall t$ e $\forall$ soluzione $\bar{x}(t;\bar{x}_0)$ dell'eq. (*)

è la funz. composta $I \circ \bar{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto I(\bar{x}(t))$

ES. OSC. ARM.

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t$$
$$v(t) = -x_0\omega \sin\omega t + v_0 \cos\omega t$$
$\leftarrow$ soluz. di (*)

$$I(x,v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$
$\leftarrow$ funz. $: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,v) \mapsto I(x,v)$

Verifichiamo che I soddisfi la def. per essere una cost. del moto:

$$I(x(t),v(t)) = \frac{1}{2}\left(\underline{x_0^2\omega^2 \sin^2\omega t} - 2x_0 v_0 \cancel{\omega} \cancel{\sin\omega t\cos\omega t} + \underline{v_0^2\cos^2\omega t} \right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\omega^2\left(\underline{x_0^2\cos^2\omega t} + 2\frac{x_0 v_0}{\omega}\cancel{\cos\omega t\sin\omega t} + \underline{\frac{v_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 x_0^2 + \frac{1}{2}v_0^2 = I(x_0,v_0)$$

Consideriamo una funzione

$$I : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$$

Scriviamo la seguente eq

$$I(\bar{x}) = \rho \qquad \text{dove } \rho \text{ cost. reale} \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^\ell$$

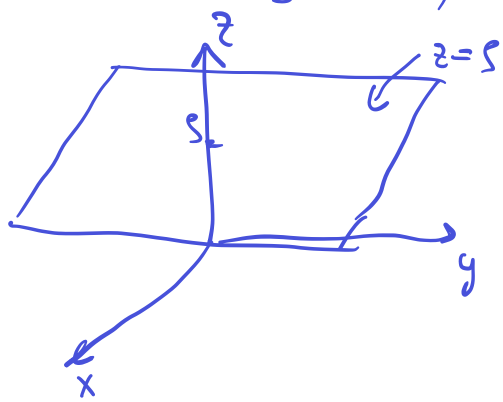
Le solut. di questa eq. appartengono a un SOTTOINSIEME di $\mathbb{R}^\ell$ $\rightsquigarrow$ un' IPERSUPERFICE

ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) \equiv x^2 + y^2 + z^2$

eq. $I(\bar{x}) = R^2 \rightsquigarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \rightsquigarrow$ SFERA

ES. $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ e $I(\bar{x}) = z$

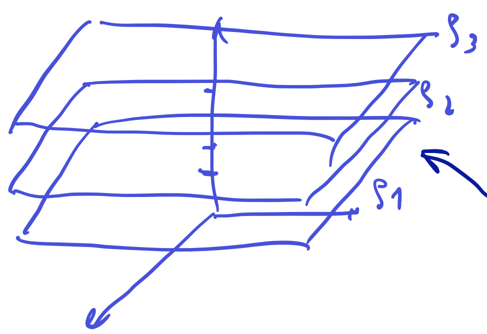
eq. $I(\bar{x}) = \rho \rightsquigarrow z = \rho$



Al variare del parametro ρ, ho una FAMIGLIA di IPERSUPERFICI (disgiunte) che costituisce una FOLIAZIONE (stratificazione) di $\mathbb{R}^\ell$

l'unione di tutte le ipersuperfici è $\mathbb{R}^\ell$ stesso.

ES)



$I(\bar{x}) \equiv z$

"insiemi di livello"

Sia I una COSTANTE del MOTO per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

cioè una funz. $I: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ con

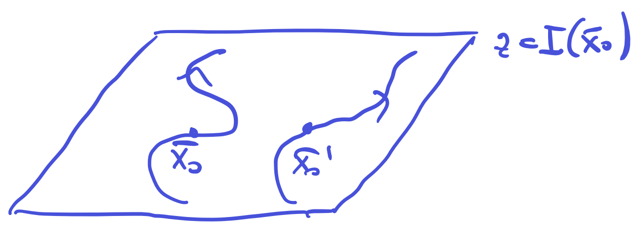
$I(\bar{x}(t)) = I(\bar{x}_0)$ ovvero $\frac{d}{dt} I(\bar{x}(t)) = 0$

$\forall t$ e $\forall \bar{x}(t)$ soluz. di $(*)$

$\Rightarrow$ Tutti i pti di una traiettoria che risolve $(*)$ giacciono su un'ipersuperficie, in qto caso

$$I(\bar{x}) = I(\bar{x}_0)$$

ES] Immaginiamo che $I(\bar{x}) = z$ sia cost. del moto per $(*)$



$\to$ le traiettorie giacciono su un piano (parallelo al piano xy) $\Rightarrow$ si può ridurre il problema da tridimensionale a un probl. piano.

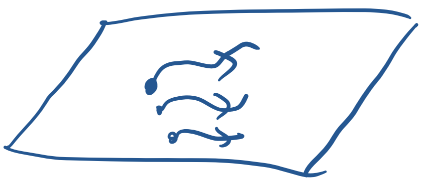
$\Rightarrow$ le cost. del moto permettono di ridurre il problema originario (cioè risolvere $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ in $\mathbb{R}^\ell$) a un problema con un MINOR NUMERO di VARIABILI e di EQ. DIFF.

Servono dei criteri per individuare le cost. del moto prima di risolvere le eq. $(*)$.

Un insieme $A \subset \mathbb{R}^\ell$ si dice INVARIANTE per l'eq. $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ se il suo evoluto $\varphi^t(A)$ coincide con A $\forall t$

Se $\exists$ cost. del moto I, allora l'ipersup. $I(\bar{x}) = \rho$ è un insieme invariante

ES.



$\forall \bar{x} \in A \quad \varphi^t(\bar{x}) \in A$

ES.) osc. ARM. $\mathbb{R}^\ell \equiv \mathbb{R}^2$ con coor. (x, v)

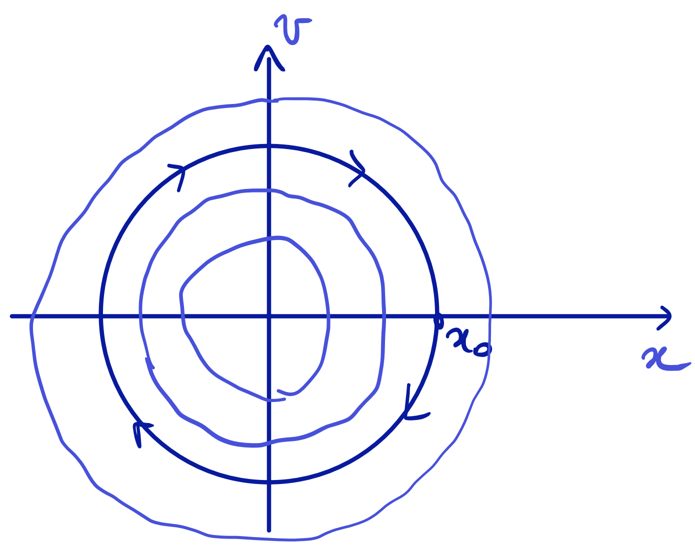
$\omega = 1$, $m = 1$

$$x(t) = x_0 \cos t + v_0 \operatorname{sen} t$$
$$v(t) = -x_0 \operatorname{sen} t + v_0 \cos t$$

Prendiamo come dato iniz. $(x_0, 0)$ (cioè $v_0 = 0$)

$$x(t) = x_0 \cos t$$
$$v(t) = -x_0 \operatorname{sen} t$$

descrizione parametrica di una circonf. di raggio x_0



Cost. del moto $I(x, v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} x^2$

Insiemi di livello sono $I(x, v) = I(x_0, v_0)$

cioè le "sup." $v^2 + x^2 = x_0^2$

ES. DI COST. del MOTO :

ENERGIA in sist. meccanici a 1 grado di libertà, autonomi e con forze puramente posizionali:

$$f(x,v) = f(x) \qquad f = \frac{F}{m}$$

$\Downarrow$

$\exists$ una primitiva di F ($\bar{F} = -\bar{\nabla} V$)

$\exists V(x)$ t.c. $F = -V'$

$\frac{\partial E}{\partial x} = V'(x)$

$\frac{\partial E}{\partial v} = mv$

$\ddot{x} = f(x)$

$$E(x,v) = \underbrace{\tfrac{1}{2} m v^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{en. potenziale}}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases} \quad (*)$$

è una cost. del moto

solut. di eq. del moto

Dim.
$$\frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) =$$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}(x(t),v(t))\, \dot{x}(t) + \frac{\partial E}{\partial v}(x(t),v(t))\, \dot{v}(t)$$

$x(t), v(t)$ è solut. di $(*)$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}(\cdot)\, v(t) + \frac{\partial E}{\partial v}(\dots)\, f(x(t))$$

$mf = F$

$V' = -F$

$$= V'(x(t))\, v(t) + m v(t)\, f(x(t))$$

$$= -F(x(t))\, v(t) + v(t)\, F(x(t)) = 0 \quad //$$

DERIVATA DI LIE

Data una funzione $G : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ (detta VARIABILE DINAMICA),
consideriamo la derivata totale di
G lungo una traiettoria $\bar{x}(t)$ che soddisfa $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$

$$\frac{d}{dt} G(\bar{x}(t)) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot \dot{x}_i(t)$$

soluz. di $(*)$

$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot f_i(\bar{x}(t)) \quad \leftarrow \bar{\nabla} G \cdot \bar{f}$$

$(dG[\bar{f}])$

È significativo introdurre una nuova variabile dinamica

$\mathcal{L}_{\bar{f}} G : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ detta DERIVATA DI LIE di G rispetto al campo vett. $\bar{f}$

def. da

$$(\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{l} f_i(\bar{x}) \frac{\partial G}{\partial x_i}(\bar{x})$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{d}{dt} G(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{solut. di } (*)}}{\bar{x}(t)}) = (\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}(t))$$

Prop. $G : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ è una COST. del MOTO per $(*)$ $\iff$ $\mathcal{L}_{\bar{f}} G = 0$

Dim

$(\Leftarrow)$: $\frac{d}{dt} G(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{solut. di } (*)}}{\bar{x}(t)}) = (\mathcal{L}_{\bar{f}} G)(\bar{x}(t)) = 0$ //
($\mathcal{L}_{\bar{f}} G = 0$)

$(\Rightarrow)$: $\forall \bar{x}_0$ $\exists!$ solut. $\bar{x}(t)$ che passa per esso:
$\forall \bar{x}_0$ $\quad \mathcal{L}_{\bar{f}} G(\bar{x}_0) = \mathcal{L}_{\bar{f}} G(\bar{x}(t_0)) = 0$ //

SOLUZIONI DI EQUILIBRIO

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (*) \quad \leftarrow \quad \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t)) \quad \text{vero } \forall t$$

Delle soluzioni particolari sono FUNZIONI COSTANTI

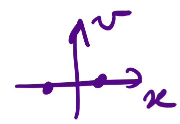
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{cost. indip. da } t}}{\bar{x}(t) = \bar{c}} \qquad \bar{c} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{con } \bar{c} \text{ t.c. } \bar{f}(\bar{c}) = 0$$

Tali solut. particolari sono dette "punti di EQUILIBRIO" le cui traiettorie sono pti.

<u>Prop</u>. I PUNTI DI EQUIL. dell'eq. $(*)$ sono tutti e soli i pti dove $\bar{f}(\bar{x})$ si azzera. ("Pti singolari" del campo vettoriale)

<u>Corollario</u>. Nel sistema meccanico $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$, $\leftarrow \bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v) \end{pmatrix}$

i pti singolari o di equilibrio sono del tipo



$$\bar{c} = (\underset{\nearrow\, x}{c}, \underset{\nearrow\, v}{0}) \quad \text{con } f(c, 0) = 0$$

$\leftarrow$ Nel piano di fase i pti di equil. giacciono sull'asse delle ascisse

<u>Dim</u>. Pti equil. sono gli zeri di $\bar{f}(x,v)$, cioè solut. di equaz.

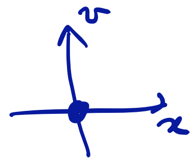
$$\begin{cases} f_1(x,v) = 0 \\ f_2(x,v) = 0 \end{cases} \quad \underset{\text{sist. mecc.}}{\longleftrightarrow} \quad \begin{cases} v = 0 \\ f(x,0) = 0 \end{cases} \quad //$$

(Nei pti di equil. $(c,0)$ la risultante delle forze si annulla)

ES. PARTICELLA LIBERA $\ddot{x} = 0$ $\quad f$ è identicam. nulla e quindi i pti di equil. sono $(c, 0)$ $\forall c \in \mathbb{R}$

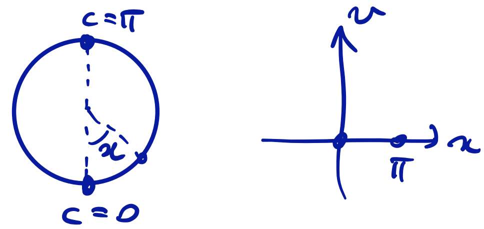
ES. OSCILL. ARM. $f(x,v) = -\omega^2 x$

→ pti equil. $c=0$



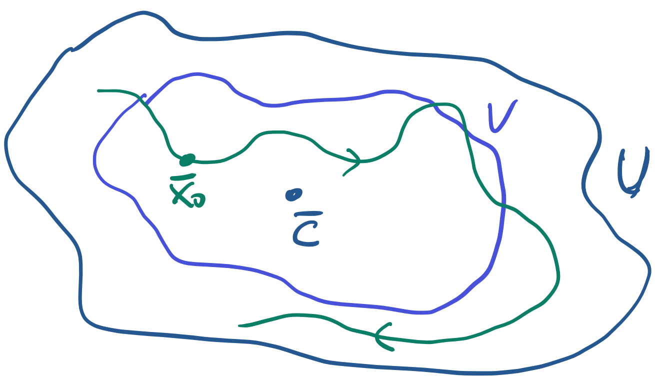
ES. PENDOLO $f(x,v) = -\operatorname{sen} x$ $(\omega=1)$

→ pti equil. $c = 0, \pi$



Attorno ai pti di equilibrio possiamo avere informazioni APPROSSIMATE sulle solut., anche per sistemi complicati.

Def. Un pto di equil. $\bar c$ di $\dot{\bar x} = \bar f(\bar x)$ $(\bar f(\bar c) = 0)$ è detto STABILE (o stab. nel futuro, o stab. nel passato) se $\forall$ intorno U di $\bar c$, $\exists$ intorno V di $\bar c$, t.c. ogni movimento $\bar x(t; \bar x_0)$ con $\bar x_0 \in V$ resta in U $\forall t$ $(\forall t>0$, $\forall t<0)$



($c=0$ è stab. per il pendolo; $c=\pi$ NON è stab.)

Def. $\bar c$ è INSTABILE se non è stabile.

Def. $\bar c$ è ASINTOTICAM. STAB. per tempi positivi (negativi) quando

a) è stab. per $t \geq 0$ $(t \leq 0)$ e

b) $\exists B$ intorno di $\bar c$ (BACINO DI ATTRAZIONE) t.c.

$\forall \bar x_0 \in B$ $\bar x(t; \bar x_0) \to \bar c$ per $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$

TEOREMA DI LJAPUNOV (Punti d'equil.)

Se conosciamo la solut. di $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ $(*)$, possiamo dire se un pto è di equil. è stabile o no.

Ma se non siamo in grado di risolvere $(*)$?

Prop. Sia $\bar{c}$ un pto di equil. per $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ in $\mathbb{R}^l$ (cioè $\bar{f}(\bar{c}) = 0$).

Se in un intorno U_0 di $\bar{c}$ $\exists$ una variabile dinamica $W : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ ("funz. di Ljapunov") t.c.

a) W ha un MIN. stretto in $\bar{c}$ (cioè $W(x) > W(\bar{c})$ in $U_0 \setminus \{\bar{c}\}$)

b) $\mathcal{L}_{\bar{f}} W \leq 0$ in U_0 (cioè W è non-crescente lungo ogni moto in U_0 per t crescente)
$(\geq)$ $(=)$

$\Rightarrow$ $\bar{c}$ è un pto di equil. STABILE per tempi positivi (negativi) (per tutti i tempi)

Teor. di Ljapunov permette di ottenere informaz. sulla stabilità del pto di equil. in modo rapido, senza risolvere $(*)$.

Corollario. Si consideri un sist. meccanico con forze puramente posizionali

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x) \end{cases}$$

Se l'en. potenziale $V(x)$ ha un MIN. ISOLATO in $x^* \in \mathbb{R}$, allora $\bar{c} = (x^*, 0) \in \mathbb{R}^2$ è un pto d'equil. STABILE.

Dim. Se $V(x)$ ha min. stretto in x^*, allora

$$f(x^*) = -\frac{V'(x^*)}{m} = 0 \ ;$$

inoltre $E(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$ ha anch'esso un min. isolato, e si trova in $\bar{z} = (x^*, 0) \Rightarrow$ a) del teor. di Ljap.

Inoltre E è una cost. del moto $\Rightarrow L_{\bar{f}} E = 0 \Rightarrow$ b) //

Il risultato del corollario si estende a tutti i sist. meccanici a più gradi di libertà per i quali si può scrivere l'en. totale come somma di $\underbrace{\text{en. cin.}}_{\text{def. positiva}}$ e en. pot.

Stabilità nel futuro persiste anche se aggiungiamo alle forze un termine dissipativo

ES. $\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu\dot{x}$ $\qquad V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x - 2\mu v \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1 \\ \leftarrow f_2 \end{matrix}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$L_{\bar{f}} E = \frac{\partial E}{\partial x} f_1 + \frac{\partial E}{\partial v} f_2 = \cancel{m\omega^2 x} \cdot v + {} + mv \cdot (-\cancel{\omega^2 x} - 2\mu v)$$

$$= -2\mu m v^2 \leq 0$$

STUDIO ATTORNO AI PTI di EQUIL.

Linearizzazione : studio locale attorno al pto di equil., nel quale si approssima il sistema non-lineare ("difficile") con un sistema lineare ("facile")

Sistema lineare in $\mathbb{R}^\ell$ è un sist. di eq. diff. lineari del tipo $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ $\bar{x}$ a valori in $\mathbb{R}^\ell$ e A una matrice $\ell \times \ell$

Partiamo da un sistema autonomo

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) \qquad \bar{x} \text{ in } \mathbb{R}^\ell \qquad \bar{f}: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$$

t.c. $\bar{f}$ ha un pto singolare (pto equil.) in $\bar{c}$ ($\bar{f}(\bar{c})=0$)

Siccome vogliamo studiare le soluz. $\bar{x}(t)$, quando passano per più vicini a $\bar{c}$, ci interessa il comportamento di $\bar{f}$ attorno a $\bar{c}$, cioè per $\|\bar{x}-\bar{c}\| \ll 1$

$\rightsquigarrow$ esp. di Taylor attorno a $\bar{c}$

$$f_i(\bar{x}) = \underbrace{\cancel{f_1(\bar{c})}}_{=0} + \sum_{j=1}^{\ell} \underbrace{\frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j}}_{A_{ij}} (x_j - c_j) + O(\|\bar{x}-\bar{c}\|^2)$$

Attorno a $\bar{c}$ la funz. $\bar{f}$ è ben approssimata da

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}) = A \cdot (\bar{x}-\bar{c}) + \dots \quad \text{con} \quad A_{ij} = \frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j}$$

Def. $\bar{\xi} = \bar{x} - \bar{c}$

$\bar{\xi}(t) = \bar{x}(t) - \bar{c}$ soddisfa eq. lineare

$$\dot{\bar{\xi}} = \dot{\bar{x}} = A \cdot (\bar{x}-\bar{c}) + O(\|\bar{x}-\bar{c}\|^2) = A \cdot \bar{\xi} + O(\|\bar{\xi}\|^2)$$

$$\downarrow$$

$$\dot{\bar{\xi}} = A \cdot \bar{\xi} + \underbrace{\cancel{O(\|\bar{\xi}\|^2)}}_{\text{trascuriamo}}$$

$\leftarrow$ eq. lineare che approssima bene $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ per $\|\bar{x}-\bar{c}\| \ll 1$

(risolto, otteniamo $\bar{\xi}(t) \Rightarrow \bar{x}(t) = \bar{\xi}(t) + \bar{c}$).

Se il sist. autonomo viene da

$$\ddot{x} = f(x) \qquad \bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(c) & 0 \end{pmatrix}$$

$\dot{\bar\xi} = A\,\bar\xi$ $\quad$ ← sistema di eq. diff. LINEARE del 1° ordine, OMOGENEA

$(*')$

⇓

soluzione generale sarà combinaz. lineare di l soluz. particolari indipendenti

Cerchiamo soluz. particolari della forma

$$\bar\xi(t) = \rho(t)\cdot\bar u \qquad \bar u \in \mathbb{R}^l \text{ vett. cost.} \qquad (\star)$$

- ci interessano soluz. non-banali $\Rightarrow$ $\bar\xi(t)$ non si annulla mai.

($\exists$ soluz. t.c. $\bar\xi(t_0) = 0$ e questa è la soluz. $\bar\xi(t) = 0$ $\forall t$ $\Rightarrow$ le altre traiettorie non possono passare per $\bar\xi = 0$)

- sostituiamo $(\star)$ in $(*)$:

$$\underline{\underline{\dot\rho(t)\cdot\bar u}} = A\,(\rho(t)\cdot\bar u) = \underline{\underline{\rho(t)}}\,A\bar u$$

l'uguaglianza è possibile solo se $\bar u$ e $A\bar u$ sono vett. paralleli ⇝ $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\boxed{A\bar u = \alpha\,\bar u}$ $(\circ)$

- $\dot\rho(t) = \alpha\,\rho(t) \Rightarrow \rho(t) = c\,e^{\alpha t}$ $\qquad c = \rho(0)$

- $(\circ)$ ci dice che $\bar u$ è un AUTOVETT. di A con AUTOVAL. α.

Prop. Eq. lin. $\dot{\bar{\xi}} = A\bar{\xi}$ ha soluz. particolari

$$\bar{\xi}(t) = C e^{\alpha t} \cdot \bar{u}$$

dove $\bar{u}$ è autov. di A con autoval. α.

Per risolvere $(*!)$ uno deve diagonalizzare A.

Se $\exists$ una base di autovettori (A diagonalizzabile) allora posso scrivere la soluz. generale come

$$\bar{\xi}(t) = \sum_{j=1}^{\ell} C_j \, e^{\alpha_j t} \, \bar{u}_j$$

autoval. autovett.

ASIDE: tornerai dopo aver studiato Sist. Lagrangiani

Sist. Lagrangiano $L = \frac{1}{2}\dot{\bar{x}} \cdot A\dot{\bar{x}} - \frac{1}{2}\bar{x} \cdot B\bar{x}$

eq: $A\ddot{\bar{x}} = -B\bar{x}$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} A\dot{\bar{v}} = -B\bar{x} \\ \dot{\bar{x}} = \bar{v} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \dot{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{v} \\ -A^{-1}B\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -A^{-1}B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

Soluz. generale:

- autovalori $0 = \det \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{1} & -\mathbb{1} \\ A^{-1}B & \lambda\mathbb{1} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ A^{-1}B + \lambda^2\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$

$$= \det A^{-1} \det(B + \lambda^2 A)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -A^{-1}B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$$

$$\bar{w} = \lambda\bar{u}$$

$$-A^{-1}B\bar{u} = \lambda\bar{w} \Rightarrow \begin{cases} B\bar{u} = -\lambda^2 A\bar{u} \\ \bar{w} = \lambda\bar{u} \end{cases} \rightarrow$$

Inoltre se A e B sono def. pos. l'eq. $\det(B + \lambda^2 A) = 0$ ha solut. solo se $\lambda^2 < 0$ cioè λ immaginario

$\lambda = \pm i\omega \leftarrow$ in coppie perché matrici reali

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \left[C_j e^{i\omega_j} \begin{pmatrix} \bar{u}_j \\ i\omega_j \bar{u}_j \end{pmatrix} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solut. reali}}}{C_j^*} e^{-i\omega_j} \begin{pmatrix} \bar{u}_j \\ -i\omega_j \bar{u}_j \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} u_j \\ i\omega_j u_j \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} u_j \\ -i\omega_j u_j \end{pmatrix}$$

due soluz. indip. relative a un λ^2

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} C_j e^{i\omega_j t} \bar{u}_j + \sum_j C_j^* e^{-i\omega_j t} \bar{u}_j$$

$$\bar{v} = \sum_{j=1}^{n} C_j i\omega_j e^{i\omega_j t} \bar{u}_j + \sum_j C_j^* (-i\omega_j) e^{-i\omega_j t} \bar{u}_j$$