

FISICA NUCLEARE (2)

Proprietà del nucleo atomico

- ... dimensioni dei nuclei
- Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei
- Distribuzione della materia in un nucleo
- Energia di legame nucleare

... dimensioni dei nuclei ...

Densità nucleoni e **potenziale nucleare** dipendono similmente da parametri che definiscono dimensioni nuclei, valore \sim **costante** fino a pochi **fm** dal **CM** del nucleo, poi **rapidamente a zero**

- Se simmetria sferica, si caratterizza struttura con due parametri: **raggio medio** fino **(densità nucleo)/2**, **spessore di superficie sfumata**, centrata su raggio medio
- Si vuol descrivere **estensione** della distrib. di **carica** e di **massa**

► **Raggio di carica: atomi muonici**

- Range forze nucleari \ll dimensioni atomiche, **altrimenti effetto su struttura atomica**, ben spiegata da sole forze e.m. (a meno di struttura iperfine ...)
- Distrib. **estesa carica** nucleo \Rightarrow **perturba** livelli atomici **calcolati per nucleo puntiforme**
Spostamenti ΔE livelli per carica Ze unif. distribuita in sfera di raggio R

$$\Delta E = \int \psi_{E_0}^*(\vec{r}) e\Delta V(r) \psi_{E_0}(\vec{r}) d\vec{r} = \int \psi_{E_0}^2(\vec{r}) e\Delta V(r) d\vec{r}$$

$\psi_{E_0}(\vec{r})$ funz. d'onda e atomico su livello imperturbato $E_0 = -Z^2e^2/(8\pi\epsilon_0 a)$,
 $\Delta V(r)$ perturbazione dovuta a diff. fra potenziali di carica distribuita e puntiforme

$$\psi_{E_0}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a}} \Rightarrow \text{con } a = \hbar^2/(me^2) \text{ raggio di Bohr}$$

$$\Delta V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)\right] \Rightarrow \Delta E = 4\pi \int_0^R r^2 \psi_{E_0}^2(r) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)\right] d\vec{r}$$

Poiché $R \ll a$, si approssima funz. d'onda col suo valore $\psi_{E_0}^2(0)$ nell'origine (CM), per cui

$$\Delta E = \frac{1}{5} \frac{Z^2 e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{ZR}{a}\right)^2 \Rightarrow \left|\frac{\Delta E}{E_0}\right| = \frac{4}{5} \left(\frac{ZR}{a}\right)^2$$

Anche con atomo idrogenoide pesante ($^{207}_{82}\text{Pb}$) si ha $\left|\frac{\Delta E}{E_0}\right| \simeq 10^{-4}$, troppo piccolo per misurarlo bene

Atomi muonici $\Rightarrow m_\mu / m_e \simeq 200$; orbita idrogenoide $\simeq 200$ volte piú piccola

Effetto troppo grande per calcolo perturbativo \Rightarrow risolvere eq. Schroedinger

L'effetto scala come (raggio idrogenoide) $^2 \Rightarrow \simeq 10^4$ volte superiore per μ -atomo

Risultati coerenti con:

$$R = R_0 A^{1/3}, \text{ con } R_0 \simeq 1.16 \text{ fm}$$

► **Raggio di carica: nuclei speculari ...**

... isobari che si differenziano per scambio fra corrispondenti numeri di p e n

Simmetria sferica: si calcola diversa energia di legame imputandola al diverso contributo coulombiano

$$\Delta E_C = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} [Z^2 - (Z-1)^2] \simeq \frac{3}{10\pi\epsilon_0} \frac{e^2 Z}{R_0 A^{1/3}}$$

Confronto con valori sperimentali $\Rightarrow R_0$ nell'ipotesi che i due nuclei speculari abbiano \sim ugual raggio di carica

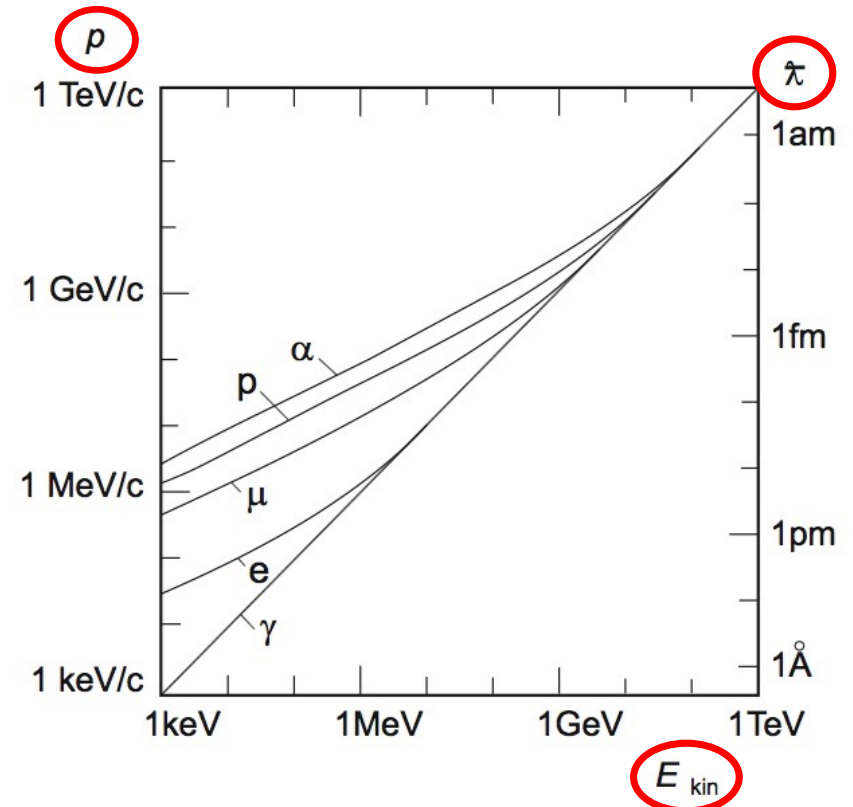
► **Raggio di carica: diffusione diffrattiva ... di leptoni**

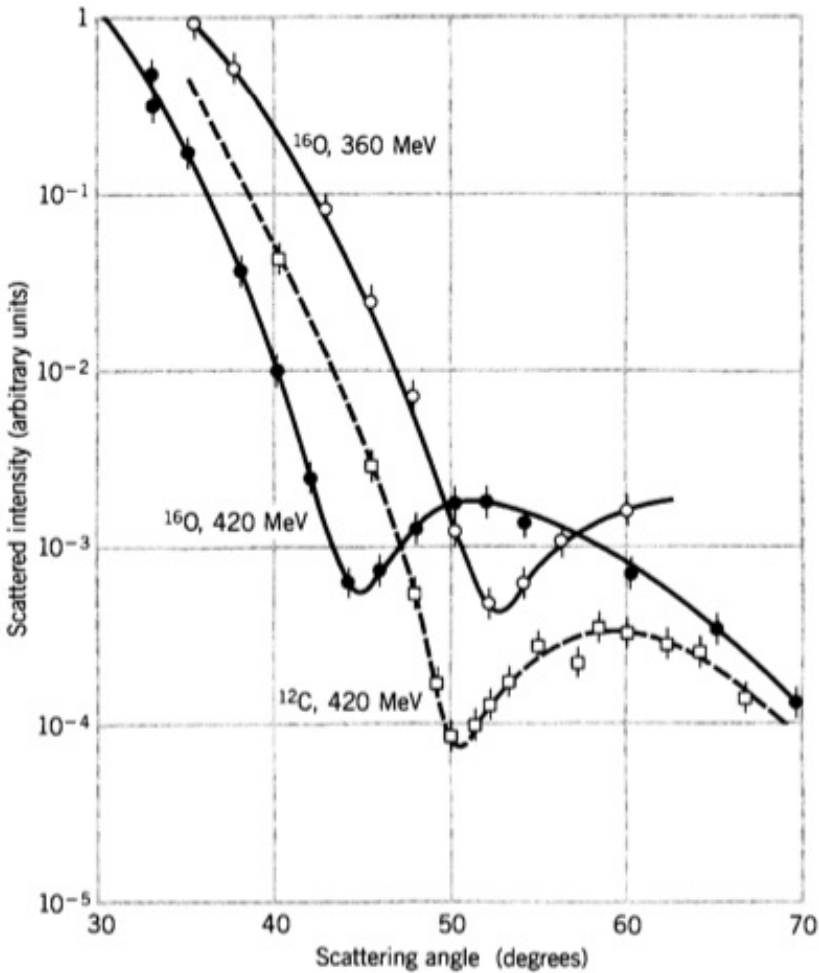
Sonde per esplorare dimensioni nucleari con buona risoluz.

$\Rightarrow \lambda$ di De Broglie $\lesssim R$

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2 E_k + E_k^2}} \approx \begin{cases} \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_k}} & \text{per } E_k \ll mc^2 \\ \frac{\hbar c}{E_k} \approx \frac{\hbar c}{E} & \text{per } E_k \gg mc^2 \end{cases}$$

Per risolvere tipiche dimensioni nucleari (alcuni fm),
particelle con impulsi di alcune decine di MeV/c





Diff. elastica e^- su ^{16}O e ^{12}C ; primi minimi diffrattivi non raggiungono 0,
 \Rightarrow **nucleo non ha bordi netti**

• Brutalmente: $R \propto \lambda / (2 \sin \vartheta)$, ma ...

e^- incidente \Rightarrow partic. libera con $\mathbf{p}_i = \hbar \mathbf{k}_i$ e $\psi_i \sim e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$

e^- diffuso: $\mathbf{p}_f = \hbar \mathbf{k}_f$ e $\psi_f \sim e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}}$

Interaz. con $V(r)$ trasforma onda incidente in diffusa e prob. trans. $\propto |F|^2$

con $F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \int \psi_f^* V(r) \psi_i dv$ che posto $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ diventa

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(r) dv \quad (*)$$

$V(r)$ dipende da densità carica $Z e \rho_e(r')$, r' varia nel nucleo e ρ_e descrive distribuzione di carica

Un e^- in \mathbf{r} ha energia:
$$E(r) = -\frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho_e(\mathbf{r}') dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Integrando su \mathbf{r} , da (*) $\Rightarrow F(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} \rho_e(\mathbf{r}') dv'$

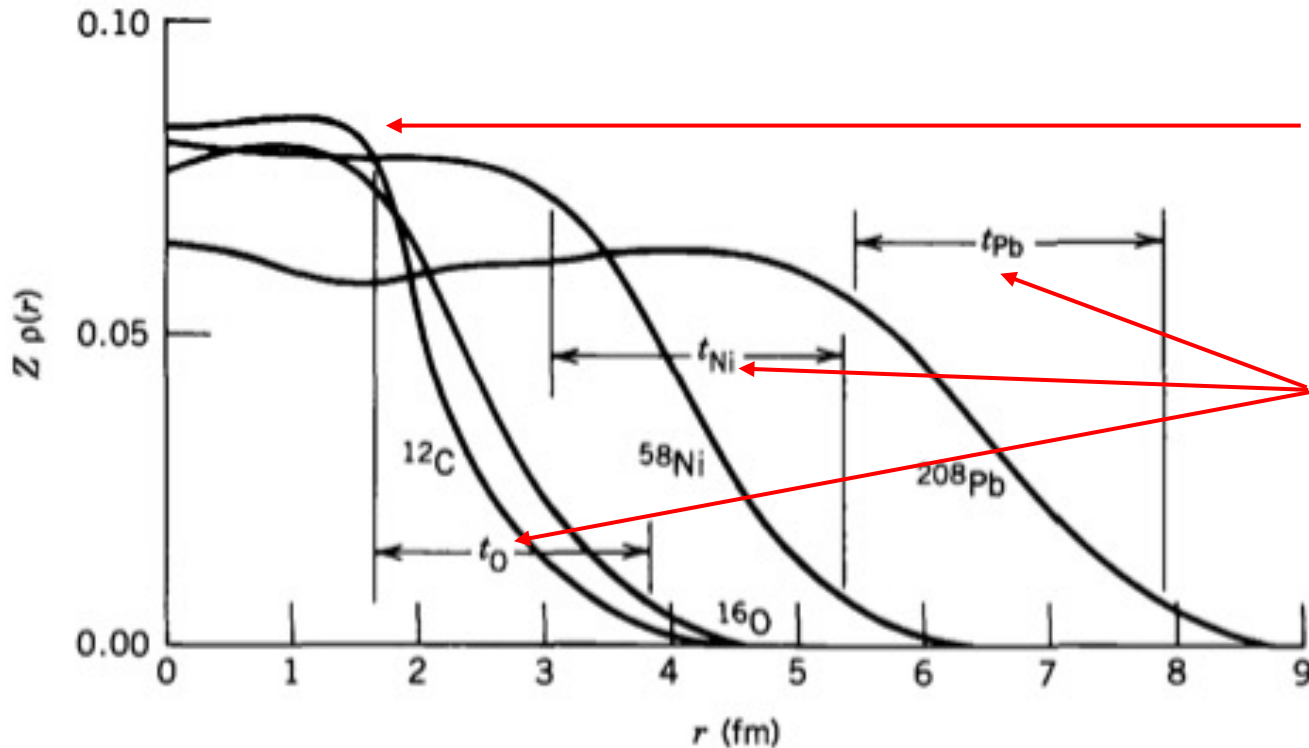
che, se $\rho_e(\mathbf{r}')$ dipende solo dal modulo r' , diventa

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int \sin(qr') \rho_e(r') r' dr' \quad (**)$$

- **Elasticità interazione** $\Rightarrow |p_i| = |p_f| \Rightarrow q$ funz. ang. diff. α fra p_i e p_f : $q = (2p/\hbar) \sin(\alpha/2)$

Misurare prob. diffusione in funzione di α dà dipendenza da q della (**)

- **$F(q) \rightarrow$ fattore di forma**. Inversione numerica (**Fourier trasf.**) della (**) dà $\rho_e(r')$



- Densità carica in zona centrale leggermente maggiore nei nuclei più leggeri
- I nucleoni non si addensano al centro dei nuclei
- Alla superficie nucleare densità sfuma in intervallo di spessore **\sim indep. da taglia nucleo, per $A \gtrsim 16$**

Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei

- Forza nucleare ha piccolissimo raggio d'azione:
 - struttura atomica ben spiegata da sole interazioni e. m. ;
 - $B/A \sim \text{cost. (satura)} \sim \text{indip. da } A \text{ per } A \lesssim 12$: se raggio d'azione ampio, ci sarebbero $A(A - 1)/2$ coppie d'interazioni fra nucleoni, e $B/A \propto (A-1) \simeq A$ crescerebbe con A , **contro evidenza**
- Forza nucleare garantisce coesione del nucleo \Rightarrow **essenzialmente attrattiva**
- È però fortemente repulsiva a dist. ≈ 0.7 fm, garantendo che nucleo **non collassi**

Distribuzione materia in un nucleo

- Diff. di **ioni** su nuclei: finché separazione $> (R_{ione} + R_X)$, fra i due solo forza coulomb (*Rutherford*)
Accrescendo energia ione si raggiungono distanze dove agiscono forze nucleari
Approccio Rutherford non spiega più i risultati sperimentali

- **Decadimento α**

Suo studio da' informazioni su dimensioni del nucleo *genitore* e di quello residuo (*figlio*)
Metodo adatto per A grandi, tipicamente $140 \lesssim A \lesssim 250$

- **Atomo pionico**

Si sfruttano X emessi da cascata con π^- in orbita idrogenoide
Rispetto μ -atomo, π^- interagisce anche fortemente con nucleoni. Progredendo nella cascata fra orbitali idrogenoidi s'avvicina al nucleo e le funz. d'onda cominciano a sovrapporsi favorendo assorbimento del π^- , e conseguente stop ad emissione di X da orbitali idrogenoidi più interni

– **Rateo di scomparsa pionica** legato a raggio di materia del nucleo

Raggio di materia d'ogni nucleo coincide \approx col suo raggio di carica, a meno di ≈ 0.1 fm

Anche raggi di materia $\propto A^{1/3}$, con cost. di prop. $R_0 \approx 1.2$ fm

Energia di legame nucleare

- Nucleoni d'un nucleo: troppi per descriverlo risolvendo equazioni del loro moto; troppo pochi per pieno uso di metodi statistici
- **Modelli ad hoc** descrivono particolari aspetti della fenomenologia.

Modello più semplice: **goccia sferica di liquido**, volume $V = 4\pi R^3/3$, con $A = (Z+N)$ nucleoni unif. distribuiti con densità $\rho(r)$ costante e indep. da A

$$\begin{cases} \rho(r) = 3A/4\pi R^3 \equiv \rho_0 & \text{con } r \leq R \\ \rho(r) = 0 & \text{con } r > R \end{cases}$$

Ipotesi:

- energia interazione fra due nucleoni **indep.** da tipo e numero di altri nucleoni presenti
- interaz. attrattiva a breve range r_{int} , come gocce di liquido in cui molecole interagiscono dip-dip
- per distanze $r \ll r_{int}$, interazione fra nucleoni fortemente repulsiva
- energia totale legame un nucleo \propto numero dei suoi nucleoni

Questo implicana **saturazione densità** , ogni nucleone interagisce solo con primi vicini e

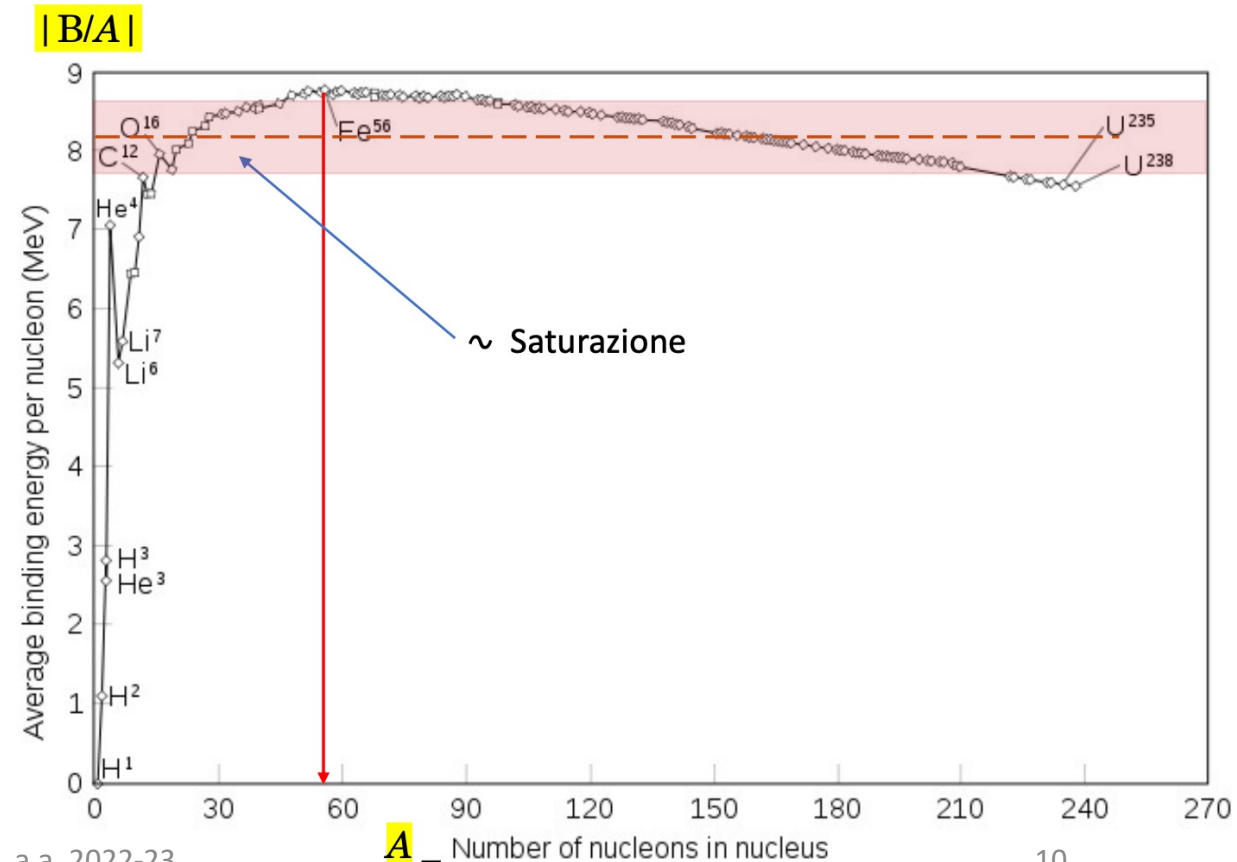
$$R = \left(\frac{3A}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3}$$

$$r_0 \simeq [3/(4\pi\rho_0)]^{1/3}$$

Weizsäcker: modello a goccia semi-empirico per descrivere **energia media di legame per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$**

Dipendenza $\langle B \rangle \equiv |B/A|$ da A e Z evidenzia due distinti contributi a $B(A, Z)$:

- volume $B_V(A)$ a **carattere universale** , assicura debole dipendenza da A e Z di $|B/A|$ per i diversi nuclei
- contributo $B_i(A, Z)$ articolato su specifiche vari nuclidi:
 - **repuls.** fra gli Z p^+ del nucleo ne riduce legame;
 - **dimensioni finite** \Rightarrow nucleoni **periferici** meno legati;
 - **eccesso neutronico** riduce legame;
 - **natura pari o dispari di A e Z** dá variazioni di massa (en. legame) nelle sequenze isobariche



- **Riduzione energia legame**: dimensioni finite, **energia di superficie** $B_S(A) \propto S = 4\pi R_0^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$
nucleoni superficiali hanno meno primi vicini e quindi meno interazioni leganti rispetto agli interni

$$B_S(A) = b_S A^{2/3}$$

Energia $|B/A|$ minore per nuclei più leggeri, con maggior rapporto **superficie/volume** $\propto 1/R$

- **Riduzione energia legame**: **repulsione coulombiana**, $B_C(A, Z)$ da distrib. a simm. sferica della carica, descritta da $\rho_Z(r)$
 $V_C(r)$ en. pot. elettrostatica di p^+ nel campo degli altri $(Z - 1)$. $E_{r'}$ è comp. radiale del campo alla superficie $S(r') = 4\pi r'^2$, contenente la carica $Q(r')$

$$E_{r'} = \frac{Q(r')}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \int_0^{r'} 4\pi\rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr''$$

Per conservatività del campo $E_{r'} = -dV_C(r')/dr'$, da cui

$$V_C(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr''$$

che $\rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$

En. pot. coulomb. del nucleo

$$B_C = \frac{1}{2} \int \rho_Z(r) V_C(r) d^3r$$

Se ρ_Z uniforme nel nucleo e nulla fuori

$$\begin{cases} \rho_Z(r) = 3Ze/4\pi R_0^3 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho_Z(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{2R_0} \left(3 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) & \text{con } r \leq R_0 \\ V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{con } r > R_0 \end{cases}, \text{ e sostituendo}$$

$$B_C(A, Z) = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0} = b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$

$$b_C = 3e^2/(20\pi\epsilon_0 r_0)$$

– Vale anche per carica non unif. distribuita nel nucleo, purché a simmetria sferica: cambia solo b_C

- **Riduzione** energia legame per eccesso neutronico, **energia di simmetria** $B_{\text{sim}}(A, Z)$.

$B_{\text{sim}}(A, Z)$: ogni n in eccesso riduce en. legame per nucleone \propto frazione $(N-Z)/A$ di n in eccesso;

totale n in eccesso è $(N-Z) \Rightarrow$ effetto $\propto (N-Z)^2/A$

$$B_{sim}(A, Z) = b_{sim} \frac{(N - Z)^2}{A} = b_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

N/Z cresce con A per compensare aumento repulsione coulombiana che anche se più debole della forza nucleare, agendo a **lungo range** renderebbe instabili i nuclei ben prima dell'uranio, se $N = Z$

Quindi perché termine di simmetria slegante ?

⇒ **carattere fermionico dei nucleoni**, principio d'esclusione e struttura a livelli energetici d'un nucleo

- **Termine pari-dispari $B_{ac}(A, Z)$** . Nuclei più stabili se hanno numeri pari di p e/o n . Dipende da come si accoppiano p e n , in base ai momenti orbitali e di spin, a formare mom. ang. tot. J di un nucleo

$$B_{ac}(A, Z) = b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A}$$

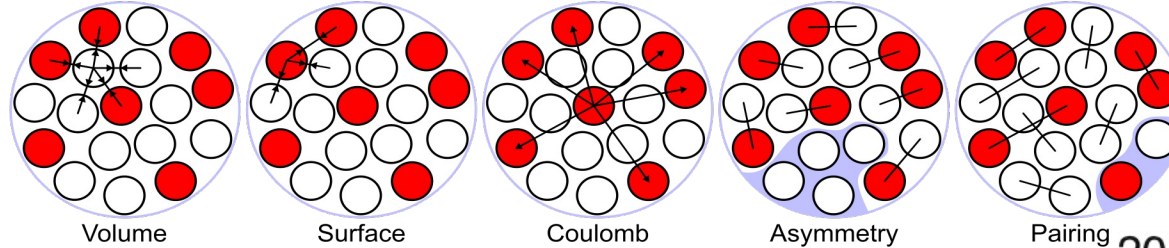
Da sequenze isobariche ⇒ $\delta(A, Z) = -1$ se N e Z pari; $\delta(A, Z) = 0$ se N e Z uno pari e l'altro dispari o viceversa; $\delta(A, Z) = +1$ se N e Z entrambi dispari

$$B_{ac}(A, Z) = -b_{ac} \frac{(-1)^N + (-1)^Z}{2A}$$

- Termine **energia di volume** $B_V(A)$, **legante** espresso come funzione lineare di A

$$B_V(A) = b_V A$$

⇒ b_V indep. da A ; termine cost. dell'en. media di legame che garantisce debole dipendenza da A (per $A \geq 12$)



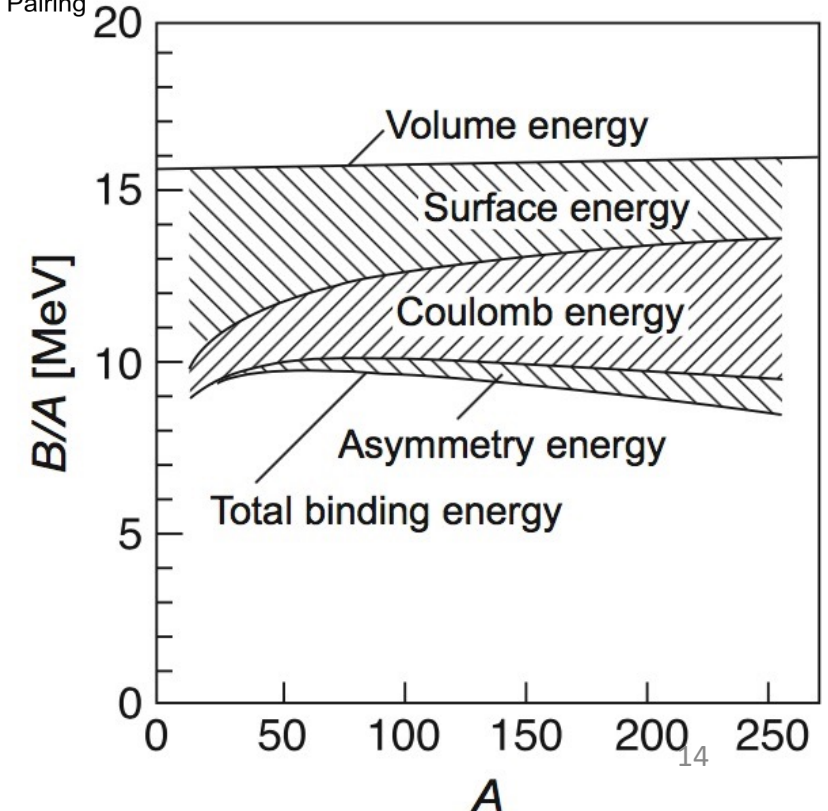
Per en. di legame si ha:

$$B_0(A, Z) = B_V(A) + B_S(A) + B_C(A, Z) + B_{sim}(A, Z) + B_{ac}(A, Z) =$$

$$= b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A}$$

con

$$\begin{cases} b_V = -15.56 & \text{MeV} \\ b_S = +17.23 & \text{MeV} \\ b_C = +0.697 & \text{MeV} \\ b_{sim} = +19.1 & \text{MeV} \\ b_{ac} = +135.0 & \text{MeV} \end{cases} \quad (\text{best fit su dati sperimentali})$$



Massa d'un nucleo \rightarrow $M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{B_0(A, Z)}{c^2}$, attendibile entro $\approx 2 \text{ MeV}/c^2$

Raccogliendo termini

$$M(A, Z) = \alpha Z^2 - \beta Z + \gamma A + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A}$$

ritrovando distrib. \sim parabolica masse per sequenze isobariche

Modello a goccia descrive stabilit  nuclei rispetto decadimento α , **fissione** e decadimento β , ma **sbaglia** nel descrivere moti collettivi rotazionali e vibrazionali

- Limiti:**
- approccio misto semiclassico
 - nucleo sferico
 - saturazione e repulsione a breve range richiedono quark e gluoni ... ;
 - spin e mom. ang. trattati in modo semiclassico

