Metodi Numerici per la Meccanica dei Solidi

Marco Rossi

MECCANICA COMPUTAZIONALE delle STRUTTURE

– METODO AGLI ELEMENTI FINITI –

* STORIA e FILOSOFIA dei METODI NUMERICI
* PROBLEMI NELLA MECCANICA dei SOLIDI
* FEM: FORMULAZIONI GENERALI
* EF PER BIELLE (TRUSS)
* EF PER TRAVI (BEAM)
* INTRODUZIONE A MATLAB
* CODICE di CALCOLO FEM

"Science is the study of what is, Engineering builds what will be. The scientist merely explores that which exists, while the engineer creates what has never existed before"

Theodore von Kármán

$\boxed{\text{MODELLO FISICO}}$ (REALE) ⟿ PROBLEMA REALE, ESISTE NELLA REALTÀ FISICA, BISOGNA DEFINIRE LE GRANDEZZE FISICHE IN GIOCO NEL PROBLEMA

↓

$\boxed{\text{MODELLO MATEMATICO}}$ (FORMALE) ⟿ DERIVA dallo STUDIO della FISICA MATEMATICA SISTEMA di EQUAZIONI DIFFERENZIALI alle DERIVATE PARZIALI

$$\begin{cases} \underline{A}\left(\underline{x}, t, \underline{u}(\underline{x}), \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}, \dots, \dfrac{\partial^m u_i}{\partial x_i}, \dots \dot{u}_i\right) = 0 & \text{su } \Omega \times T \\ \underline{B}\left(\underline{x}, t, \underline{u}, \dots \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \dots\right) = 0 & \text{su } \partial\Omega \quad \text{COND. CONTORNO} \\ \underline{C}\left(\underline{x}, t, \underline{u}, \dot{u}\right) = 0 & \text{in } t = 0 \quad \text{COND. INIZIALI} \end{cases}$$

(RARAMENTE C'È SOLUZIONE!!!)

NOI SIAMO QUI

↓

$\boxed{\text{MODELLO COMPUTAZIONALE}}$ (VIRTUALE) ⟿ SISTEMA di EQUAZIONI ALGEBRICHE

$$\boxed{\underline{\underline{K}}\ \underline{u} = \underline{f}} \rightarrow$$ QUESTO è SEMPRE RISOLVIBILE

MODELLO COMPUTAZIONALE → MODELLO VIRTUALE che PERMETTE DI RISOLVERE UN PROBLEMA FISICO

↓

L'ALTERNATIVA SAREBBE UN MODELLO IN SCALA

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{f}$$

$\underline{\underline{K}}$ → MATRICE DI SISTEMA

$\underline{u}$ → INCOGNITE

$\underline{f}$ → VETTORE dei DATI

($\underline{\underline{K}}(\underline{u})$ PER PROBLEMI NON LINEARI)

MECCANICA COMPUTAZIONALE → IL NOSTRO FOCUS è SUL PASSAGGIO DA MODELLO MATEMATICO a MODELLO COMPUTAZIONALE

↳ SI INTRODUCE APPROSSIMAZIONE

L'APPROSSIMAZIONE DERIVA da:

1) "OPERAZIONI" nel DOMINIO
2) "OPERAZIONI" sulle FUNZIONI

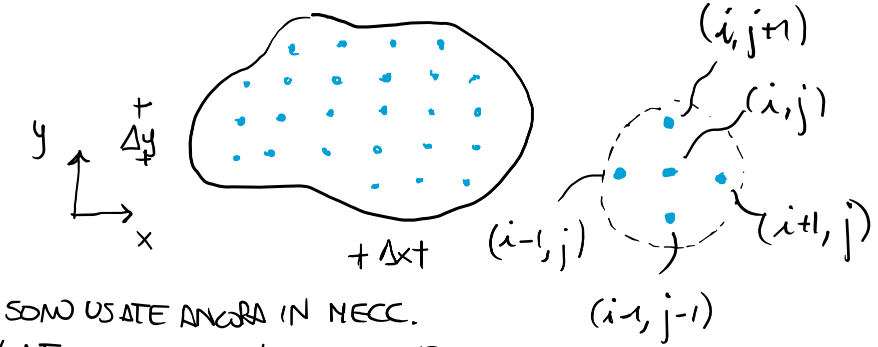
} SUL PROBLEMA

3) "APPROSSIMAZIONE" dei METODI di CALCOLO
4) "APPROSSIMAZIONE" degli STRUMENTI di CALCOLO

} SUL CALCOLATORE

I PUNTI (1) e (2) DEFINISCONO IL METODO NUMERICO:

1) METODO delle DIFFERENZE FINITE (fine '800)

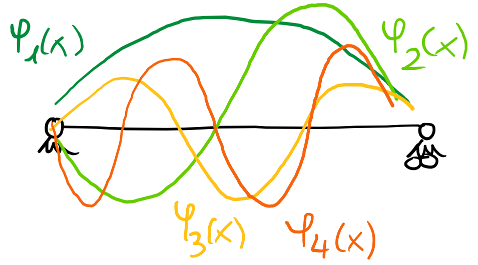


$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j+1} - u_i}{\Delta x} \quad \forall_{i,j}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{j+1,i} - u_j}{\Delta y}$$

SONO USATE ANCORA IN MECC. dei FLUIDI O PER L'INTEGRAZIONE TEMPORALE IN DINAMICA

2) METODO di RAYLEIGH - RITZ (inizio '900)



SI APPROSSIMA IL CAMPO INCOGNITO COME:

$$u(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \alpha_3\varphi_3(x) + \alpha_4\varphi_4(x)$$

α_i: PESI delle COMBINAZIONE (COEFF. di RITZ)

INSERITA IN FORMA VARIAZIONALE...

LE INCOGNITE DEL PROBLEMA SONO I COEFFICIENTI di COMBINAZIONE α_i

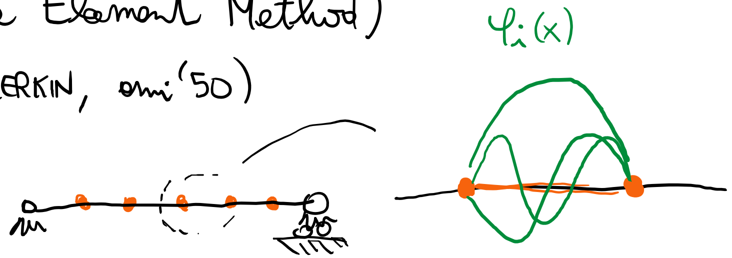
PER MIGLIORARE L'APPROSSIMAZIONE BASTA "AGGIUNGERE" TERMINI E NUOVE FUNZIONI → CON DOMINI COMPLICATI È DIFFICILE TROVARE LE $\varphi(x)$ CHE SODDISFANO LE C. CONTORNO

3) METODO AGLI ELEMENTI FINITI

(FEM - Finite Element Method)

(anni '20 GALERKIN, anni '50)

ESTENSIONE del METODO di RAYLEIGH RITZ



SI DIVIDE IL DOMINIO IN PARTI (ELEMENTI FINITI)
E SU CIASCUNA SI APPROSSIMA IL CAMPO INCOGNITO
COME PER RAYLEIGH - RITZ

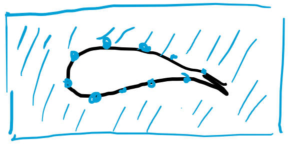
$$u(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots$$

2 ORDINI di APPROSSIMAZIONI
- i) GEOMETRICA ⇝ SCOMPOSIZIONE del DOMINIO (MESH)
- ii) ANALITICA ⇝ FUNZIONE APPROSSIMATA CON COMBO. LINEARE

LE INCOGNITE SONO LE α_i, $\forall$ ELEMENTO FINITO!! → LE α_i SI POSSONO COLLEGARE A QUANTITÀ CINEMATICHE O STATICHE

ALTRI METODI....

4) BEM - BOUNDARY ELEMENT METHOD



5) FVM - FINITE VOLUME METHOD

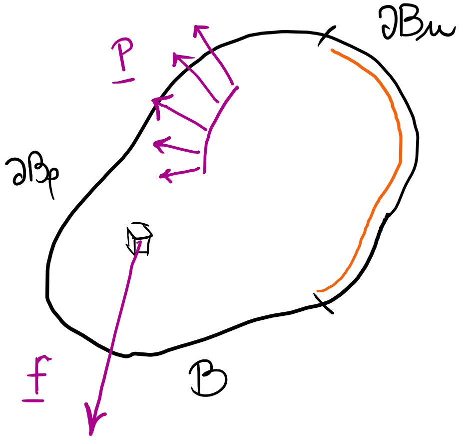
⋮

TIPOLOGIE DI PROBLEMI

	LINEARE	NON-LINEARE
STATICA	1) STATICA LINEARE $\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{F}$ 2) Pb. STABILITÀ INIZIALE $[\underline{\underline{K}}_M + \underline{\underline{K}}_G(P)]\,\underline{u} = \underline{0}$ (autovalori)	1) STATICA NON LINEARE (NON LINEARITÀ MECCANICA) $\underline{\underline{K}}(\underline{u})\,\underline{u} = \underline{f}(\underline{u}) \quad (\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}_M)$ 2) ANALISI di BUCKLING (COMPLETA) $[\underline{\underline{K}}_M + \lambda \underline{\underline{K}}_G(\underline{u})]\,\underline{u} = \underline{0}$ (autovalori NL)
DINAMICA	1) MODI DI VIBRARE $[\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}]\,\underline{u} = 0$ (autovalori) 2) ANALISI DINAMICA LINEARE $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{u}} + \underline{\underline{C}}\,\dot{\underline{u}} + \underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{F}$ INTEGRAZIONE DIRETTA delle FUNZIONI $u(t)$	ANALISI DINAMICA NON LINEARE $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{u}} + \underline{\Phi}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}, \dots) = 0$ (ANALISI PIÙ GENERALE POSSIBILE)

TUTTI I PROBLEMI NEL CAMPO DELLA MECCANICA SONO IN QUESTA "TASSONOMIA"

ELEMENTI FINITI NELLA MECCANICA dei SOLIDI



INCOGNITE $u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ (15)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 & (3) \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) & (6) \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} & (6) \end{cases} \quad \text{su } \Omega$$

$\partial B \equiv \partial B_p \cup \partial B_u$

C.C. NATURALI — C.C. ESSENZIALI

C.CONTORNO $\begin{cases} u_i = u_i^0 & \text{su } \partial B_u \\ \sigma_{ij} n_j = p_i^0 & \text{su } \partial B_p \end{cases}$

N.B. NON NECESSARIAMENTE LE INCOGNITE DEL PROBLEMA SONO SEMPRE 15, MA SI POSSONO AVERE ALTRE FORMULAZIONI

i) FORMULAZIONE alla "NAVIER", LE INCOGNITE SONO GLI SPOSTAMENTI (3, u_i)

→ ELEMENTI FINITI CON FORMULAZIONE agli SPOSTAMENTI (EPT)

ii) FORMULAZIONE alla "BELTRAMI-MITCHELL", LE INCOGNITE SONO GLI SFORZI (6, σ_{ij})

→ ELEMENTI FINITI CON FORMULAZIONE agli SFORZI (ECT)

iii) FORMULAZIONE "MISTA", LE INCOGNITE SONO SPOSTAMENTI e SFORZI (3 u_i, 6 σ_{ij})

→ FORMULAZIONE agli ELEMENTI FINITI MISTA (FUNZIONALE di HELLINGER-REISSNER)

iv) FORMULAZIONE "COMPLETA", LE INCOGNITE SONO (15, $u_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$)

→ (FUNZIONALE di HU-WASHIZU)

- TIPICAMENTE LA FORMULAZIONE "CLASSICA" È QUELLA AGLI SPOSTAMENTI
- LA FORMULAZIONE MISTA È UTILE PER PROBLEMI CON MATERIALI INCOMPRIMIBILI, PROBLEMI DI CONTATTO

DA MODELLO MATEMATICO a MODELLO COMPUTAZIONALE

METODO FEM → BISOGNA TROVARE UNA FORMULAZIONE "GLOBALE" del PROBLEMA DESCRITTO dalle PDE ("LOCALI")

PDE (LOCALE) ⟺ FORMULAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE (GLOBALE)

3 METODI PER TROVARE FORMULAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE

1) WEIGHTED RESIDUAL (RESIDUO PONDERATO)
2) PRINCIPI VARIAZIONALI
3) PRINCIPIO dei LAVORI VIRTUALI

1) METODO del RESIDUO PESATO (WEIGHTED RESIDUAL)

– METODO di GALERKIN –

METODO PIÙ GENERALE, BASATO sul CALCOLO delle VARIAZIONI, PERMETTE DI PASSARE dal SISTEMA di PDE (FORMA FORTE) ALLA FORMA INTEGRO-DIFFERENZIALE (FORMA DEBOLE)

Vediamo il metodo in un esempio generale:

$u(x) : \underset{(\Omega)}{[a,b]} \to \mathbb{R}$

PDE: $\begin{cases} u''(x) + f(x) = 0 \text{ in } \Omega \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases} \Big] \text{C.C.}$

FORMULAZIONE FORTE del PROBLEMA DIFFERENZIALE (LOCALE)

CERCHIAMO UNA FORMULAZIONE MEDIA CHE VALGA SUL DOMINIO INTERO Ω

$$\int_a^b [u''(x) + f(x)] \cdot v(x) = 0 \quad , \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

FORMULAZIONE DEBOLE DEL PROBLEMA DIFFERENZIALE

$\equiv$

BISOGNA AGGIUNGERE QUESTO, FONDAMENTALE, PER IL LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO delle VARIAZIONI

v : FUNZIONE TEST

$v(x)$ DEVE ESSERE "BUONA"! $\to v(x) \in H_0^1(\Omega)$

$H(\Omega)$ è SPAZIO di SOBOLEV

$$H_0^m(\Omega) = \{ v : \Omega \to \mathbb{R}, v \in L_2(\Omega), v' \in L_2(\Omega), \dots v^{(m)} \in L_2, v(\partial\Omega) = 0 \}$$

$$L_2 = \left\{ g : \int_\Omega |g|^2 d\Omega < +\infty \right\}$$ SPAZIO delle FUNZIONI QUADRATO-INTEGRABILI

PER IL LEMMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI LE DUE FORMULAZIONI SONO EQUIVALENTI

$$u''(x) + f(x) = 0 + \text{C. CONTORNO} \iff \int_a^b (u'' + f) v \, dx = 0, \ \forall v \in H_0^1$$

– RIDUZIONE dell'ORDINE di DERIVAZIONE

$$\int_a^b \underbrace{u''}_{\text{DERIVATA SECONDA}} \underbrace{v}_{\text{DERIVATA ORDINE ZERO}} + f v =$$

USO INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int_a^b u'' v = \underbrace{\int_a^b (u'v)'}_{\text{Th di GAUSS } [u'v]_a^b} - \int_a^b u'v'$$

$$\int_a^b u''v + fv = \underbrace{-\int_a^b u'v' dx}_{\text{FORMA BILINEARE } a[u,v]} + \underbrace{[u'v]_a^b + \int_a^b fv}_{\text{FORMA LINEARE } \ell[v]} = 0$$

$$\boxed{a[u,v] = \ell[v]}$$

$a[u,v]$ è BILINEARE

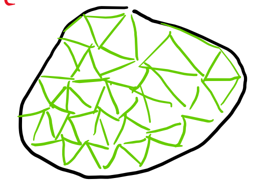
$a[\alpha u, \beta v] = \alpha a[u, \beta v] = \beta a[\alpha u, v]$

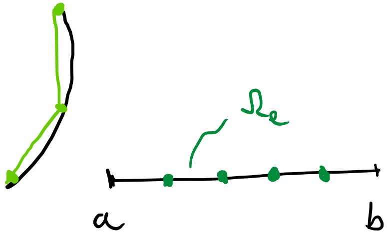
SIMMETRICA

$a[u,v] = a[v,u]$

- DISCRETIZZAZIONE

$$\Omega \approx \sum_{e=1}^{m_e} \Omega_e$$





$$\int_a^b v\,[u''+f]\,dx \approx \sum_{e=1}^{m_e} \int_{\Omega_e} v\,[u''+f]\,dx$$

QUINDI I PASSAGGI SONO

FORMA FORTE $\longrightarrow$ FORMA DEBOLE $\longrightarrow$ FORMA DISCRETIZZATA

FORMA DISCRETIZZATA

LA FUNZIONE TEST È OMOGENEA AL BORDO dell'EF

$$\sum_{e=1}^{m_e} \left\{ -\int_0^{l_e} u_e'(x)\,v_e'(x) + \cancel{[u'v]_0^{l_e}} + \int_0^{l_e} f_e\,v_e \right\} = 0$$

APPROSSIMAZIONE ANALITICA

F. INCOGNITA $\quad u_e(x) = N_j(x)\,U_j^{(e)}$

F. TEST $\quad v_e(x) = H_i(x)\,V_i^{(e)}$

SE USO LE STESSE FUNZIONI di FORMA $\quad \boxed{H_i(x) = N_i(x)}$ METODO di GALERKIN

GUARDIAMO IL SINGOLO EF

$$\int_0^{l_e} u_e' v_e' - \int_0^{l_e} f_e\, v_e = 0,\ \forall v_e \longrightarrow \int_0^{l_e} N_i' N_j' U_j V_i - \int_0^{l_e} f N_i(x) V_i = 0,\ \forall V_i$$

$$V_i \left\{ \underbrace{\left(\int_0^{l_e} N_i'(x) N_j'(x)\,dx \right)}_{K_{ij}} U_j - \underbrace{\int_0^{l_e} f(x) N_i(x)\,dx}_{F_i} \right\} = 0 \quad \forall V_i$$

$\forall V_i \rightarrow$ SI PUÒ ELIMINARE

K_{ij} MATRICE DI RIGIDEZZA

F_i VETTORE FORZE NODALI GENERALIZZATE

$$\boxed{\begin{aligned} K_{ij}^e U_j^e &= F_i^e \\ \underline{K}\,\underline{U}^e &= \underline{F}^e \end{aligned}}$$

FORMA DISCRETIZZATA SUL SINGOLO EF

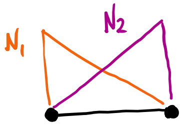
$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} \int N_1'N_1' & \int N_1'N_2' & \cdots \\ \int N_2'N_1' & \int N_2'N_2' & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \underline{F}^e = \begin{Bmatrix} \int f N_1 \\ \int f N_2 \\ \vdots \\ \int f N_m \end{Bmatrix}$$

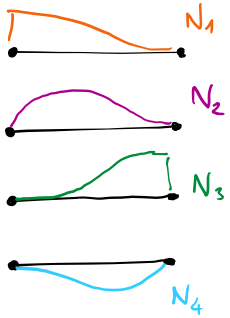
$\underline{K} \in Sym \rightarrow$ DERIVA DA FORMA BILINEARE SIMMETRICA

PROPRIETÀ FUNZIONI di FORMA

" $N_i(x_j) = \delta_{ij}$ "

VALGONO 1 SE CALCOLATI NEL PUNTO RELATIVO AL gdl CONSIDERATO e 0 ALTROVE





N.B. : VARI TIPI di APPROSSIMAZIONE

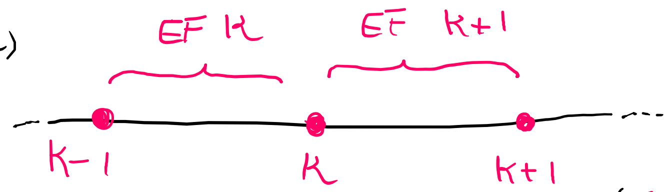
$u(x) = \varphi_j(x)\,\alpha_j$ — SOLO SIGNIFICATO ALGEBRICO — COEFF. di RITZ-GALERKIN

$u(x) = N_j(x)\,U_j$ — SIGNIFICATO MECCANICO, DI SOLITO QUESTO È PIÙ UTILE, IMMEDIATO. U_j è SPOSTAMENTO, GRADO DI LIBERTÀ (gdl)

ASSEMBLAGGIO

LA FORMA DISCRETIZZATA TROVATA È RELATIVA AL SINGOLO EF

$$K_{ij}^{(e)} U_j^{(e)} = F_i^{(e)}$$



$$e = K \rightarrow \underline{\underline{K}}^{(K)} \underline{U}^{(K)} = \underline{F}^{(K)}, \quad \underline{U}^{(K)} = \begin{Bmatrix} U_{K-1} \\ U_K \end{Bmatrix}, \quad \underline{F}^{K} = \begin{Bmatrix} F_{K-1} \\ F_K \end{Bmatrix}$$

$$e = K+1 \rightarrow \underline{\underline{K}}^{(K+1)} \underline{U}^{(K+1)} = \underline{F}^{(K+1)}, \quad \underline{U}^{(K+1)} = \begin{Bmatrix} U_{K} \\ U_{K+1} \end{Bmatrix}, \quad \underline{F}^{(K+1)} = \begin{Bmatrix} F_{K} \\ F_{K+1} \end{Bmatrix}$$

ALCUNI gdl SONO COMUNI A PIÙ EF,
SI POSSONO ACCORPARE I GRADI DI LIBERTÀ COMUNI

↳ QUESTA OPERAZIONE SI CHIAMA ASSEMBLAGGIO

VETTORE DEI gdl GLOBALE $\quad \underline{U} = \{U_1, U_2, \dots\dots, U_N\}^T \quad$ (N NODI)

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} K^{(1)} & & & 0 \\ & K^{(2)} & & \\ & & K^{(3)} & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

MATRICE di RIGIDEZZA GLOBALE

PROBLEMA FINALE

$$\boxed{\underline{\underline{K}}\,\underline{U} = \underline{F}}$$

E... LE CONDIZIONI AL CONTORNO?

LA MATRICE di RIGIDEZZA COMPLETA HA DETERMINANTE NULLO $\quad \det(\underline{\underline{K}}) = 0 \rightarrow$ IL SISTEMA HA ∞^n SOLUZIONI, NON HA SOLUZIONE UNICA (MOTO RIGIDO!!!)

BISOGNA "ELIMINARE" I gdl ASSOCIATI AI MOTI RIGIDI, SERVE APPLICARE C. CONTORNO

- C. CONTORNO ESSENZIALI: SPOSTAMENTI NOTI u_U — FORZE INCOGNITE (REAZIONI) F_U
- C. CONTORNO NATURALI: SPOSTAMENTI INCOGNITI u_F — FORZE NOTE F_F

$\underline{U}$ e $\underline{F}$ SI POSSONO PARTIZIONARE IN QUESTO MODO

$$\underline{U} = \{u_U^T, u_F^T\}^T, \quad \underline{F} = \{F_U^T, F_F^T\}^T \quad \text{e ANCHE } \underline{\underline{K}} \dots$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{UU} & \underline{\underline{K}}_{UF} \\ \underline{\underline{K}}_{FU} & \underline{\underline{K}}_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_U \\ U_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_U \\ F_F \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \underline{F}_U &= \underline{\underline{K}}_{UU} \underline{U}_U + \underline{\underline{K}}_{UF} \overbrace{\underline{U}_F}^{\text{INCOGNITE}} \\ \underline{F}_F &= \underline{\underline{K}}_{FU} \underline{U}_U + \underline{\underline{K}}_{FF} \underbrace{\underline{U}_F}_{\text{INCOGNITE}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{\underline{K}}_{FF} \underbrace{\underline{U}_F}_{\text{INCOGNITA}} = \underline{F}_F - \underbrace{\underline{\underline{K}}_{FU} \underline{U}_U}_{\text{FORZA DOVUTA AI CEDIMENTI}}}$$

ALLA FINE È QUESTO IL PROBLEMA DA RISOLVERE CON U_F INCOGNITA

NOTO U_F, A POSTERIORI SI CALCOLANO LE REAZIONI $\rightarrow \boxed{\underline{F}_U = \underline{\underline{K}}_{UU} \underline{U}_U + \underline{\underline{K}}_{UF} \underline{U}_F}$

2) METODI VARIAZIONALI

SI PUÒ OTTENERE UNA FORMA INTEGRO-DIFFERENZIALE (FORMA DEBOLE) ANCHE ATTRAVERSO LA STAZIONARIETÀ di UN FUNZIONALE

SI SFRUTTA LA PARTICOLARITÀ del SISTEMA FISICO che SI STA STUDIANDO e SI USANO DEI FUNZIONALI NOTI DEFINITI PER LO SPECIFICO PROBLEMA

ESEMPIO: MINIMO dell'ENERGIA POTENZIALE TOTALE PER SISTEMI MECCANICI

CALCOLO delle VARIAZIONI

$u : [a,b] \to R$

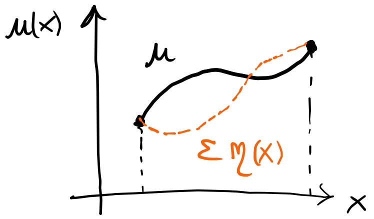
$$I[u] = \int_a^b F(x, u, u', u'', \dots)\,dx$$

SCALARE

FUNZIONALE (FUNZIONE DI FUNZIONI)

$$\bar{u}(x) = u(x) + \varepsilon\eta(x)$$

FUNZIONE VARIATA $(\varepsilon \in R)$



VARIAZIONE AMMISSIBILE $\delta u(x) = \bar{u}(x) - u(x) = \varepsilon\eta(x)$

DEVE RISPETTARE STESSE C.C. della FUNZIONE BASE

DERIVATA di UN FUNZIONALE

$$I'[u]_\eta = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I[\bar{u}] - I[u]}{\varepsilon}$$

($\eta(x)$ è ANALOGA AD UNA DIREZIONE)

$\Delta I = I[\bar{u}] - I[u]$ $\quad \Delta I = \delta I[u] + O(\varepsilon^2)$ $\quad \Delta F = \underbrace{\varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial u'}\eta'\right)}_{\delta F} + O(\varepsilon^2)$

$$\delta I[u] = \int_a^b \delta F = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u}\varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial u'}\varepsilon\eta'\right)dx$$

EQUAZIONI di EULERO-LAGRANGE

STAZIONARIETÀ FUNZIONALE		PROBLEMA di CAUCHY
$\delta I = 0, \ \forall\eta$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial u'}\varepsilon\eta\Big\vert_a^b = 0$

UN PROBLEMA DIFFERENZIALE IN FORMULAZIONE FORTE SI PUÒ RISCRIVERE COME UN PROBLEMA di STAZIONARIETÀ di UN FUNZIONALE

SI PUÒ INTRODURRE L'APPROSSIMAZIONE

$$u(x) = N_j(x)U_j \rightarrow I[u] \approx \tilde{I}[U_j]$$

(FUNZIONE !!)

$$\delta I \approx \delta\tilde{I} = \frac{\partial \tilde{I}}{\partial U_1}\delta U_1 + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial U_2}\delta U_2 + \dots + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial U_m}\delta U_m = 0, \ \forall \delta U$$

STAZIONARIETÀ IN OGNI DIREZIONE

$$\delta\tilde{I} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\tilde{I}}{\partial U_1} \\ \frac{\partial\tilde{I}}{\partial U_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\tilde{I}}{\partial U_m} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \\ \vdots \\ \delta U_m \end{Bmatrix} = 0, \ \forall \delta U$$

ARBITRARIO

QUESTO SI DEVE ANNULLARE

$$\boxed{\delta I = 0 \ \Updownarrow \ \frac{\partial\tilde{I}}{\partial U_i} = 0}$$

STAZIONARIETÀ ENERGIA POTENZIALE TOTALE $\longrightarrow$ EF con FORMULAZ. SPOSTAMENTI

$$\Pi[\underline{u}] = \underbrace{\frac{1}{8}\int_\Omega (u_{i,j}+u_{j,i})\, C_{ijkl}\,(u_{k,l}+u_{l,k})}_{\text{ENERGIA POTENZIALE ELASTICA}} \underbrace{- \int_\Omega f_i u_i - \int_{\partial\Omega} p_i u_i}_{\text{POTENZIALE DEI CARICHI (− LAVORO CARICHI ESTERNI)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \varepsilon_{ij}\, C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} - \int_\Omega f_i u_i - \int_{\partial\Omega} p_i u_i \qquad (\text{con } \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\underline{u}))$$

APPROSSIMAZIONE GEOMETRICA

$$\Pi[u] \approx \sum_e \Pi^e[u] \longrightarrow$$ L'ADDITIVITÀ È COMODISSIMA, SI PUÒ STUDIARE L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE del SINGOLO EF E POI SEMPLICEMENTE SOMMARE

APPROSSIMAZIONE ANALITICA

$\forall$EF, $u_i^e(\underline{x}) = N_{ip} U_p^e \rightarrow \varepsilon_{ij}^e = B_{ijp} U_p^e$ TENSORE STRAIN-DISPLACEMENT

ALLORA

$$\tilde{\Pi}_e[U] = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} B_{ijp} U_p^e\, C_{ijkl}\, B_{klq} U_q^e - \int_{\Omega_e} f_i N_{ip} U_p^e - \int_{\partial\Omega_e} p_i N_{ip} U_p^e =$$

$$= \frac{1}{2} U_p^e \underbrace{\left(\int_{\Omega_e} B_{ijp}\, C_{ijkl}\, B_{klq}\right)}_{\underline{\underline{K}}^e_{pq}} U_q^e - U_p^e \underbrace{\left(\int_{\Omega_e} f_i N_{ip} + \int_{\partial\Omega_e} p_i N_{ip}\right)}_{F_p^e}$$

$$\tilde{\Pi}^e[\underline{U}] = \frac{1}{2}\underline{U}^e \cdot \underline{\underline{K}}^e \underline{U}^e - \underline{U}^e \cdot \underline{F}^e = \frac{1}{2}\underline{U}^{eT} \underline{\underline{K}}^e \underline{U}^e - \underline{U}^{eT} \underline{F}^e$$

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}^e}{\partial \underline{U}^e} = \underline{\underline{K}}^e \underline{U}^e - \underline{F}^e = 0 \longrightarrow \boxed{\underline{\underline{K}}^e \underline{U}^e = \underline{F}^e}$$

— DA QUI IN AVANTI SI PROCEDE COME GIÀ VISTO —

[. . . . .]

3) PRINCIPIO dei LAVORI VIRTUALI

È UNA FORMA DEBOLE del PROBLEMA BASATA SU UN PRINCIPIO FISICO!!
(È UN MIX DEI METODI VISTI PRIMA)

FORMA DEBOLE $\longleftrightarrow$ PLV

FORMA DEBOLE $\longleftrightarrow$ STAZ. FUNZIONALE

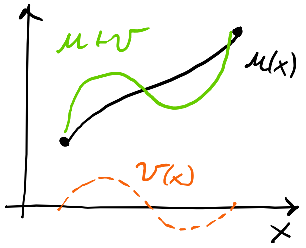
STAZ. FUNZIONALE $\longleftrightarrow$ PLV $\longrightarrow$ GIÀ VISTA A LEZIONE

PLV è FORMA DEBOLE:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = 0 & \text{in } \Omega \\ \underline{\underline{\sigma}}\,\underline{n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \longrightarrow$$ EQUAZIONI di EQUILIBRIO del SOLIDO ELASTICO (FORMA FORTE)

SI ASSUME che $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}]$, $\underline{u}$ CONGRUENTE

$$\int_\Omega \underline{v} \cdot [\operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}] = 0, \quad \forall \underline{v} \text{ AMMISSIBILE}$$



ASSUMIAMO COME FUNZIONE TEST LA VARIAZIONE $\underline{v} = \delta\underline{u}$
INTERPRETABILE COME UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE

SCRITTO IN INDICI

$$\int_\Omega \delta u_i \left[\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \right] = 0 \,, \quad \forall \delta u_i$$

PER QUESTO v SI PUÒ INTERPRETARE COME SPOST. VIRTUALE

$(\underline{\underline{\sigma}} \in Sym)$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int_\Omega \delta u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \underbrace{\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ij} \delta u_i \right)}_{1} - \underbrace{\int_\Omega \sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i)}_{2}$$

1 Th Gauss: $\int_\Omega div(\underline{v}) = \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n}$

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \delta u_i) = \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} \delta u_i n_j = \int_{\partial\Omega} \delta u_i \sigma_{ij} n_j =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \delta \underline{u} \cdot \underline{t}$$

SIMMETRIA di $\underline{\underline{\sigma}}$

STRAIN VIRTUALE

$$2 \quad \sigma_{ij} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta u_i)}_{\text{TENSORE } 2° \text{ ORDINE}} = \sigma_{ij} \overbrace{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \right]}^{\delta \varepsilon_{ij}}$$

QUINDI LA FORMA DEBOLE delle EQ. di EQUILIBRIO è

$$\underbrace{- \int_\Omega \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}}_{-\mathcal{L}_{VI}} + \underbrace{\int_\Omega f_i \delta u_i + \int_{\partial\Omega} t_i \delta u_i}_{\mathcal{L}_{VE}} = 0 \,, \quad \forall \delta \underline{u}$$

LEGGI: $\forall$ SPOSTAMENTO CHE RISPETTA I VINCOLI CINEMATICI

SLEGATO da $\underline{\underline{\sigma}}$ → SPOST. VIRTUALE

$$\boxed{\mathcal{L}_{VE} = \mathcal{L}_{VI}}$$ PLV !!!

FORMA DEBOLE e PRINCIPI VARIAZIONALI

FORMA DEBOLE $\quad a[u, v] = \ell[v]$ → SE INTERPRETO v (FUNZIONE TEST) COME UNA VARIAZIONE AMMISSIBILE DI u → $v = \delta u$

$$a[u, \delta u] - \ell[\delta u] = 0 \,, \xrightarrow{\forall \delta u} \text{se } a \text{ è SIMMETRICA}$$

$$a[u, \delta u] = \frac{1}{2} \left(a[u, \delta u] + a[u, \delta u] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(a[u, \delta u] + a[\delta u, u] \right) = \frac{1}{2} \delta a[u, u]$$

(FORMA BILINEARE)

ℓ è FORMA LINEARE

$$\ell[\delta u] = \delta \ell[u]$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \delta a[u, u] - \delta \ell[u] = \delta \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2} a[u, u] - \ell[u]}_{\text{È UN FUNZIONALE! } I[u]} \Big\} = 0 \quad \forall \delta u$$

$$\boxed{\delta I[u] = 0 \,, \ \forall \delta u}$$