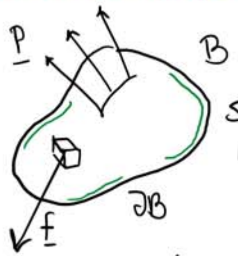
Elementi Finiti nella Meccanica Strutturale

Bielle e strutture reticolari

Marco Rossi

MECCANICA STRUTTURALE

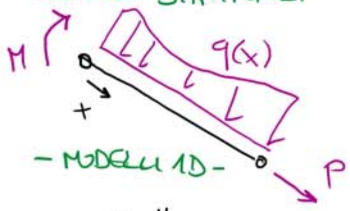


SOLIDO ELASTICO, LINEARE, OMOGENEO, ISOTROPO

EQ. DIFF. "COMPLICATE"

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} + f = 0 \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \dfrac{\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T}{2} \\ \underline{\sigma} = \mathbb{C}\, \underline{\varepsilon} \end{cases}$$

MODELLI STRUTTURALI

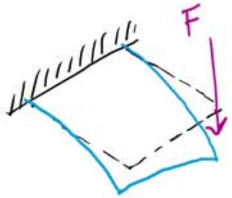


– MODELLI 1D –

$$EA u'' = p(x)$$
$$EJ v^{IV} = q(x)$$

– MODELLI 2D –

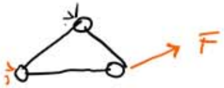
PLANE STRAIN, PLANE STRESS



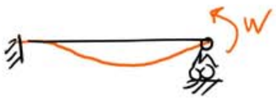
– PIASTRE –

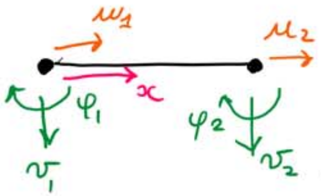
ELEMENTI FINITI PER LA MECCANICA STRUTTURALE:

* MODELLO 1D : i) EF TRUSS per BIELLE



ii) EF BEAM per TRAVI



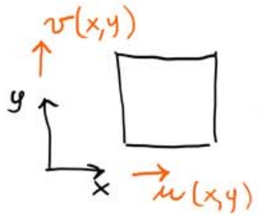


→ TRAVI SNELLE → MODELLO di EULERO-BERNOULLI

→ TRAVI TOZZE → MODELLO di TIMOSHENKO

* MODELLO 2D : i) EF PER PROBLEMI IN STATO PIANO

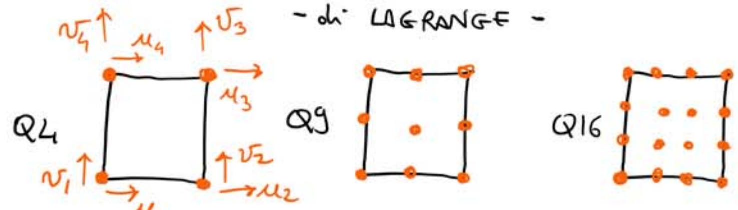
– EF RETTANGOLARI –



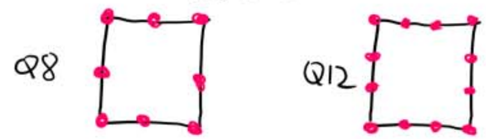
$u = \underline{\underline{N}}\, \underline{U}$

$v = \underline{\underline{N}}\, \underline{V}$

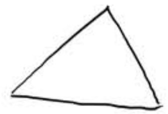
– di LAGRANGE –

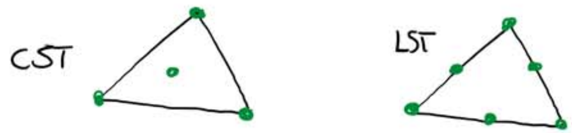


– di SERENDIPITY –

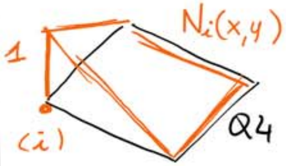


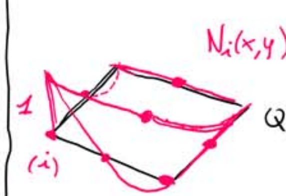
– EF TRIANGOLARI –





MIGLIORI PER MESH COMPLICATE, MA INTRINSECAMENTE NON SIMMETRICI!





1

$x \quad y$ (Q_4)

$x^2 \quad xy \quad y^2$ (Q_9)

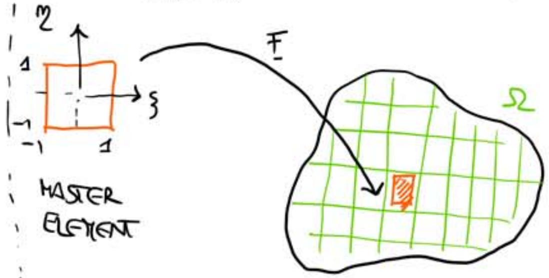
$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$

$x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4$

(LAGRANGE)

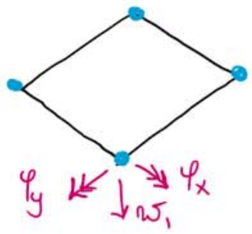
– EF ISOPARAMETRICI –

(RIGUARDA LA MODALITÀ DI SCRITTURA DEL PROBLEMA EF)



MASTER ELEMENT

ii) MODELLI 2D PER PIASTRE



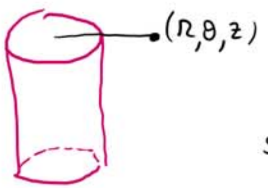
ACM (12 gdl)

BFS (16 gdl)

MOLTO PIÙ COMPLICATI !!

* MODELLI 3D

i) PROBLEMI ASSIAL-SIMMETRICI

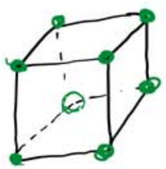


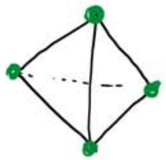
θ NON ENTRA IN GIOCO

↓

SEMPLIFICAZIONE nelle FORMULAZIONE!!

ii) PROBLEMI 3D GENERALI

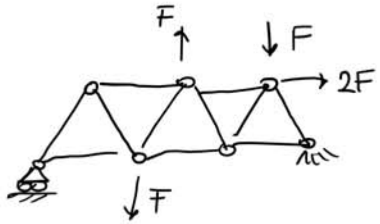




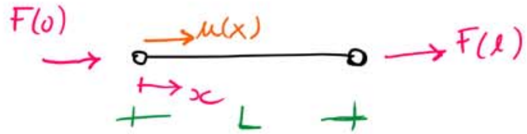
ELEMENTI FINITI TRUSS

BIELLA → ELEMENTO STRUTTURALE SOGGETTO SOLAMENTE A CARICHI ASSIALI

↳ NON SONO ELEMENTI INFLESSI, MA C'È SOLO SFORZO ASSIALE COME UNICA AZIONE INTERNA

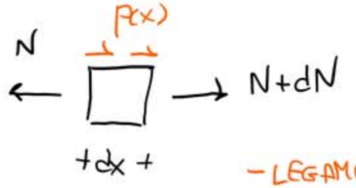


UNA BIELLA È CLASSICO ELEMENTO STRUTTURALE NELLE TRAVI RETICOLARI CARICATE NEI NODI



- EQUILIBRIO INDEFINITO

$$N + \frac{dN}{dx}dx - N + p\,dx = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dN}{dx} = -p(x)}$$



- EQUIVALENZA STATICA $\sigma = \frac{N}{A} \rightarrow \boxed{N = A\sigma}$ ($\sigma = \sigma_x$ UNICA COMPONENTE DI SFORZO)

- LEGAME COSTITUTIVO $\boxed{\sigma = E\varepsilon}$ ε è COMPONENTE DI DEFORMAZIONE ASSIALE

- CONGRUENZA $\boxed{\varepsilon = \frac{du}{dx}}$

UTILIZZANDO TUTTE LE RELAZIONI PRECEDENTI

$$N = A\sigma = AE\varepsilon = EA\frac{du}{dx} \rightarrow$$

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO PER UNA BIELLA (FORM. agli SPOSTAMENTI)

$$\boxed{\left[EA\,u'(x)\right]' + p(x) = 0}$$

sul DOMINIO $x \in [0,L]$

NEL CASO CLASSICO IN CUI EA = cost, SI PUÒ PORTARE FUORI dalla DERIVATA

$$\boxed{EA\,u''(x) + p(x) = 0}\;, x \in [0,L]$$

MANCANO LE C. CONTORNO:

- ESSENZIALI: $u(0) = u^0$, $u(L) = u^\ell$
- NATURALI: su $u'(0)$ e $u'(L)$ → $N(0) = -F(0)$, $N(L) = F(L)$

$EA\,u'(0) = -F(0)$

$EA\,u'(L) = F(\ell)$

ENERGIA POTENZIALE TOTALE

$$\Pi[u] = \mathcal{E}[u] - \mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L EA(u')^2}_{\substack{\mathcal{E}[u] \\ \text{ENERGIA POTENZIALE} \\ \text{ELASTICA}}} - \underbrace{\int_0^L pu - F(0)u(0) - F(L)u(L)}_{\substack{\text{POTENZIALE DEI CARICHI} \\ \text{ESTERNI} \\ (-\text{ LAVORO})}}$$

($u(x)$ è ASSUNTA <u>CONGRUENTE</u>!)

SOLUZIONE $u(x)$ EQUILIBRATA $\iff$ STAZIONARIETÀ dell'EPT

SUPPONIAMO che $\tilde{u}(x)$ SIA LA SOLUZIONE CONGRUENTE ED EQUILIBRATA $\longrightarrow$ LA SOLUZIONE VARIATA $\tilde{u} + \delta u(x)$ è TALE che LA VARIAZIONE è NULLA AL BORDO (così $\tilde{u}$ e VARIATA HANNO LE STESSE c.c.)

$$EA\tilde{u}''(x) + p(x) = 0$$

$$\begin{cases} \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}(L) = \tilde{u}_L \end{cases} \quad \text{OPPURE} \quad \begin{cases} u'(0) = -\dfrac{F(0)}{EA} \\ u'(L) = \dfrac{F(L)}{EA} \end{cases}$$

(DIPENDE COSA SI FISSA....)

$$\delta u(0) = 0 \quad \text{e/o} \quad \delta u(L) = 0$$

L'EPT VARIATA DIVENTA:

$$\Pi[\tilde{u} + \delta u] = \frac{1}{2}\int_0^L EA(u' + \delta u')^2 - \int_0^L p(\tilde{u} + \delta u) - F(0)\left(\tilde{u}(0) + \delta u(0)\right) - F(L)\left(\tilde{u}(L) + \delta u(L)\right)$$

$$= \left.\frac{1}{2}\int_0^L EA\tilde{u}'^2 - \int_0^L p\tilde{u} - F(0)\tilde{u}(0) - F(L)\tilde{u}(L) + \right\} \Pi[\tilde{u}]$$

$$+ \int_0^L EAu'\delta u' + \frac{1}{2}\int_0^L EA\delta u'^2 - \int_0^L p\delta u - F(0)\delta u(0) - F(L)\delta u(L)$$

INTEGRANDO PER PARTI:

$$\tilde{u}'\delta u' = (\tilde{u}'\delta u)' - \tilde{u}''\delta u$$

$$EA\int_0^L \tilde{u}'\delta u' = EA\left[\tilde{u}'(L)\delta u(L) - \tilde{u}'(0)\delta u(0)\right] - \int_0^L EA\tilde{u}''\delta u$$

$$= F(\ell)\delta u(\ell) + F(0)\delta u(0) - \int_0^L EA\tilde{u}''\delta u$$

QUINDI

$$\Pi[\tilde{u} + \delta u] = \Pi[\tilde{u}] + F(L)\delta u(L) + F(0)\delta u(0) - \int_0^L (EA\tilde{u}'' + p)\delta u +$$
$$- F(L)\delta u(L) - F(0)\delta u(0) + \frac{1}{2}\int_0^L EA(\delta u')^2$$

$$\Pi[\tilde{u} + \delta u] = \Pi[\tilde{u}] - \underbrace{\int_0^L (EA\tilde{u} + p)\delta u}_{\substack{\delta\Pi = 0 \\ \text{VARIAZIONE} \\ \text{PRIMA}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L EA\,\delta u'^2}_{\substack{\delta\Pi^2 \\ \text{VARIAZIONE} \\ \text{SECONDA}}}$$

$\tilde{u}$ è EQUILIBRATA, QUINDI QUESTO è NULLO $\leftarrow$ VARIAZIONE PRIMA

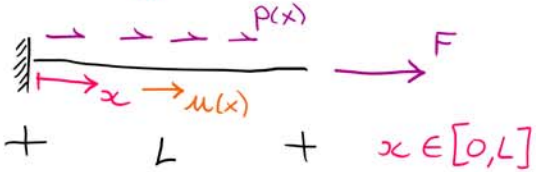
VARIAZIONE SECONDA $\rightarrow$ SEMPRE POSITIVA

$$\Pi[\tilde{u} + \delta u] - \Pi[\tilde{u}] = \frac{1}{2}\int_0^L EA\,\delta u'^2 \begin{cases} \geq 0, & \forall \delta u \text{ AMMISSIBILE} \\ = 0 & \text{sse } \delta u = 0 \text{ (SOLUZIONE EQUILIBRATA)} \end{cases}$$

SIGNIFICA che

$\Pi[\tilde{u}]$ è UN <u>PUNTO di MINIMO</u>

FORMULAZIONE agli ELEMENTI FINITI



UTILIZZIAMO COME FORMA INTEGRO-DIFFERENZIALE L'EPT

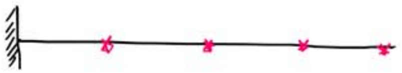
$$\Pi[u] = \frac{1}{2}\int_0^L EA(u')^2 - \int_0^L pu - F(0)u(0) - F(L)u(L)$$

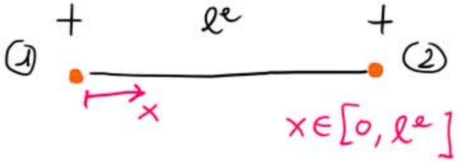
$u(x)$ t.c. $u \in L^2([0,L])$ PERCHÈ ABBIANO SENSO GLI INTEGRALI NELLA EPT

PRENDO $u(x) \in C^1$ → FUNZIONI CONTINUE e DERIVABILI

1) DISCRETIZZAZIONE

: LA BIELLA VA DIVISA IN ELEMENTI FINITI e VA STUDIATO IL SINGOLO EF





e-ESIMO EF

ATTRAVERSO LA DISCRETIZZAZIONE, L'EPT SI PUÒ CALCOLARE COME

$$\Pi[u(x)] = \sum_{e=1}^{n_e} \Pi^e[u^e(x)]$$ → ADDITIVITÀ SEMPLIFICA I CALCOLI

2) APPROSSIMAZIONE ANALITICA

IL CAMPO INCOGNITO nel SINGOLO EF è $u(x)$, t.c.

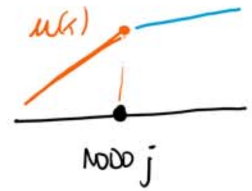
- $u(x) \in C^1$ → DENTRO IL DOMINIO della FUNZIONE
- $u(x) \in C^0$ → AL BORDO $(x=0, x=\ell^e)$

$u(x) \in C^1$ se $x \in]0, L_e[$

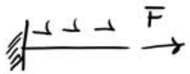
$u(x) \in C^0$ se $x=0 \vee x=L$

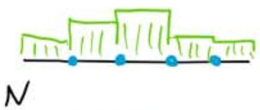
↓

CON QUESTA SCELTA è GARANTITA LA CONTINUITÀ del CAMPO PRIMARIO INCOGNITO $u(x)$ MA NON DELLA DERIVATA PRIMA → APPROSSIMAZIONE CONSENTITA PER QUESTO TIPO DI PROBLEMI



↳ SIGNIFICA che C'È CONTINUITÀ DI SPOSTAMENTO, MA NON DI SFORZI





N.B. NEL METODO AGLI ELEMENTI FINITI, L'APPROSSIMAZIONE DEI CAMPI DERIVATI (STRAIN, STRESS) È SEMPRE PEGGIORE RISPETTO AL CAMPO PRIMARIO INCOGNITO

↳ PER MIGLIORARE L'APPROSSIMAZIONE POSSO

i) INFITTIRE LA MESH, ma LA SOLUZIONE SARÀ COMUNQUE SEMPRE APPROSSIMATA

ii) AUMENTARE L'ORDINE dell'EF; cioè PRENDERE $u(x) \in C^m$ $(m>1)$, IN MODO DA ARRICCHIRE LA FORMULAZIONE E AVERE DERIVATE CONTINUE

LE FUNZIONI di FORMA che SCEGLIERE, DEFINISCONO IL GRADO DI CONTINUITÀ

N.B. BISOGNA SCEGLIERE BASE FUNZIONALE COMPLETA

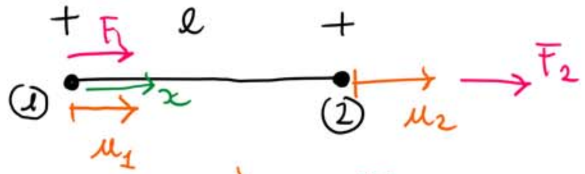
$$\lim_{K\to\infty}\left[u(x) - \sum_{i=1}^{K} \alpha_i \varphi_i(x)\right] = 0$$ → BISOGNA PRENDERE TUTTI I TERMINI del POLINOMIO SOTTO AL GRADO STABILITO

ELEMENTO FINITO TRUSS LINEARE

$$u(x) = \alpha_i \varphi_i(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \rightarrow$$ CAMPO di SPOSTAMENTO LINEARE nel SINGOLO EF

APPROCCIO alla RITZ-GALERKIN,
$u(x)$ FUNZIONE di COORDINATE α_i GENERICHE

CONVIENE PASSARE ad una RAPPRESENTAZIONE "FISICA",
DOVE LE INCOGNITE SONO GLI SPOSTAMENTI NODALI (gdl)



u_1, u_2 : GRADI DI LIBERTÀ NODALI

F_1, F_2 : FORZE NODALI GENERALIZZATE (EQUIVALENTI)

IL PASSAGGIO da RITZ-GALERKIN a GDL NODALI è

$$\begin{cases} u(0) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 = u_1 \\ u(L) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot L = u_2 \end{cases} \rightarrow \quad \alpha_1 = u_1 \qquad \alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{\ell}$$

QUINDI

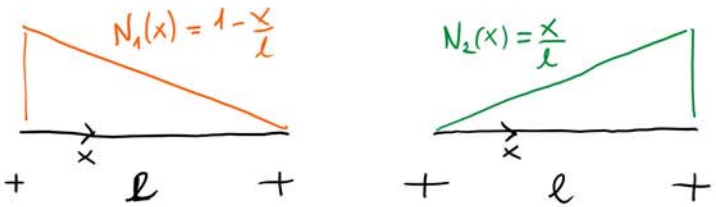
$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{\ell} x = u_1 \underbrace{\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}_{N_1(x)} + u_2 \underbrace{\left(\frac{x}{\ell}\right)}_{N_2(x)}$$

$u(x) = N_i(x) u_i \qquad i = 1,2$

2gdl NODALI

FUNZIONI di FORMA (SHAPE FUNCTIONS)

MODELLO LINEARE : $N_1(x) = 1 - \frac{x}{\ell}$, $N_2(x) = \frac{x}{\ell}$



LE FUNZIONI DI FORMA VALGONO 1 SE CALCOLATE NEL NODO, 0 ALTRIMENTI

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}$$

INOLTRE $N_1(x) + N_2(x) = 1 - \frac{x}{\ell} + \frac{x}{\ell} = 1 \rightarrow$ PERCHÈ È NECESSARIO che ANCHE UN ATTO DI MOTO RIGIDO sia RAPPRESENTATO

MOTO RIGIDO $\quad u(x) = \bar{u} \quad u_1 = u_2 = \bar{u}$

$$u(x) = \bar{u} N_1 + \bar{u} N_2 = \bar{u}(N_1 + N_2) \rightarrow \text{NECESSARIAMENTE } N_1 + N_2 = 1$$

SI PUÒ USARE NOTAZIONE MATRICIALE

$$u(x) = N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}}_{\text{MATRICE delle FUNZ. di FORMA}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}}_{\text{VETTORE dei gdl NODALI}} = \underline{\underline{N}}\, \underline{U}$$

QUESTO MODELLO VALE $\forall$ EF

$$u^e(x) = \underline{\underline{N}}^e(x^e)\, \underline{U}_e = \underline{\underline{N}}(x^e)\, \underline{U}_e$$ (IN REALTÀ LE $\underline{\underline{N}}$ SONO UGUALI $\forall e$)

DEFORMAZIONE:

$$\varepsilon(x) = u'(x) = \frac{d}{dx}\left[N_1(x) u_1 + N_2(x) u_2 \right] = N_1'(x) u_1 + N_2'(x) u_2 =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} N_1'(x) & N_2'(x) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{B}}\, \underline{U}_e$$

MATRICE STRAIN-DISPLACEMENTS

$B_1 + B_2 = 0 \rightarrow$ SERVE PER ATTO DI MOTO RIGIDO

$u(x) = \bar{u} \rightarrow \varepsilon = 0 = \bar{u}(B_1 + B_2)$

QUINDI L'APPROSSIMAZIONE ANALITICA dei CAMPI INCOGNITI SI PUÒ SEMPRE FARE IN FORMA MATRICIALE

$$u(x) = \underline{\underline{N}}(x)\,\underline{U} \qquad \varepsilon(x) = \underline{\underline{B}}(x)\,\underline{U}$$

$\underline{\underline{N}}, \underline{\underline{B}}$ CAMBIANO IN BASE alla FORMULAZIONE

3) FORMA DEBOLE / MINIMO FUNZIONALE

PER IL SINGOLO EF, L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE È

$$\Pi^e[u] = \frac{1}{2}\int_0^\ell EA^e (u')^2 - \int_0^\ell p u - \tilde{\tilde{F}}_1 u_1 - \tilde{\tilde{F}}_2 u_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\ell (u')^T EA (u') - \int_0^\ell (u')^T p - \tilde{\tilde{F}}_1 u_1 - \tilde{\tilde{F}}_2 u_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\ell \underline{U}^T \underline{\underline{B}}^T(x) EA\, \underline{\underline{B}}(x)\,\underline{U} - \int_0^\ell \underline{U}^T \underline{\underline{N}}^T(x)\, p - u_1\tilde{\tilde{F}}_1 - u_2\tilde{\tilde{F}}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\underline{U}^T \underbrace{\left(\int_0^\ell \underline{\underline{B}}^T(x) EA\, \underline{\underline{B}}(x)\right)}_{\underline{\underline{K}}\ \text{MATRICE DI RIGIDEZZA}} \underline{U} \underbrace{- \underline{U}^T\left(\int_0^\ell \underline{\underline{N}}^T(x) p(x)\right) - U_1\tilde{\tilde{F}}_1 - U_2\tilde{\tilde{F}}_2}_{-\underline{U}^T\underline{F}}$$

$$-\underline{U}^T\underline{F} = -\underline{U}^T \underbrace{\left[\int_0^\ell \underline{\underline{N}}^T p + \begin{Bmatrix}\tilde{\tilde{F}}_1 \\ \tilde{\tilde{F}}_2\end{Bmatrix}\right]}_{\underline{F}}$$

$\underline{F}$ VETTORE FORZE NODALI EQUIVALENTI

QUINDI $\Pi^e[u] = \frac{1}{2}\underline{U}^{e^T}\underline{\underline{K}}^e\underline{U}^e - \underline{U}^{e^T}\underline{F}^e$ ← è una FUNZIONE delle INCOGNITE NODALI $\underline{U}^e$

MATRICE di RIGIDEZZA

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{\ell}\{-1, 1\}$$

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_0^\ell \underline{\underline{B}}^T(x) EA\, \underline{\underline{B}} = \int_0^\ell \frac{EA}{\ell^2}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}\{-1, 1\} = \frac{EA}{\ell^2}\int_0^\ell \begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}dx = \frac{EA}{\ell^2}\begin{bmatrix}\ell & -\ell\\-\ell & \ell\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{EF. con FORMULAZIONE LINEARE} \qquad \underline{\underline{K}}^e = \frac{EA^e}{\ell_e}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}}$$

← RISULTATO FONDAMENTALE, è FUNZIONE di EA e ℓ del SINGOLO EF

VETTORE CARICHI NODALI

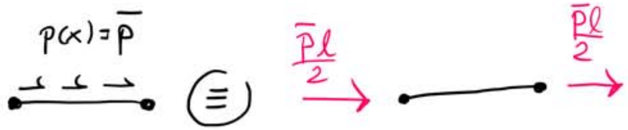
$$\int_0^\ell \underline{\underline{N}}^T p(x) = \int_0^\ell \begin{Bmatrix}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)p(x)\\ \frac{x}{\ell}p(x)\end{Bmatrix}dx \longrightarrow$$

RAPPRESENTA UN CARICO NODALE EQUIVALENTE dal PUNTO DI VISTA ENERGETICO AL CARICO SUL DOMINIO (STESSO CONTRIBUTO nell'EPT!)

– CARICO COSTANTE

$$p(x) = \bar{p} = \text{cost}$$

$$\underline{F} = \bar{p}\int_0^\ell \begin{Bmatrix}1-\frac{x}{\ell}\\ \frac{x}{\ell}\end{Bmatrix}dx = \begin{Bmatrix}\frac{\bar{p}\ell}{2}\\ \frac{\bar{p}\ell}{2}\end{Bmatrix}$$



– CARICO LINEARE

$$p(x) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{\ell}x, \quad \underline{F} = \int_0^{\ell_e}\begin{Bmatrix}1-\frac{x}{\ell}\\ \frac{x}{\ell}\end{Bmatrix}\left(p_1 - \frac{p_2-p_1}{\ell}x\right)dx = \begin{Bmatrix}\frac{p_1\ell}{3} + \frac{p_2\ell}{6}\\ \frac{p_1\ell}{6} + \frac{p_2\ell}{3}\end{Bmatrix}$$

PRINCIPIO di MINIMO dell'EPT

$$\underset{\text{FUNZIONALE}}{\Pi[u(x)]} \approx \underset{\text{FUNZIONE delle INCOGNITE } \underline{U}}{\Pi(\underline{U})} \approx \underset{\text{DISCRETIZZAZIONE}}{\sum_e \Pi^e(\underline{U}^e)}$$

$\delta\Pi[u]=0, \ \forall \delta u$ è la CONDIZIONE di STAZIONARIETÀ che VA IMPOSTA

SICCOME DEVE VALERE PER OGNI VARIAZIONE, SIGNIFICA IMPORRE LA STAZIONARIETÀ $\forall$ ELEMENTO FINITO $\rightarrow$ $\boxed{\text{MINIMO di } \Pi^e(\underline{U}^e) \ \forall \text{ EF}}$

$$\frac{\partial \Pi^e(\underline{U})}{\partial \underline{U}}=0, \quad \Pi^e(\underline{U}) = \frac{1}{2}\underline{U}_e^T \underline{\underline{K}}_e \underline{U}_e - \underline{U}_e^T \underline{F}_e$$

IN INDICI

$$\Pi = \frac{1}{2} K_{ij} U_i U_j - U_i F_i$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_k} = \frac{1}{2} K_{ij} \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial U_k} U_j + \frac{\partial U_j}{\partial U_k} U_i \right\} - F_i \frac{\partial U_i}{\partial U_k}$$

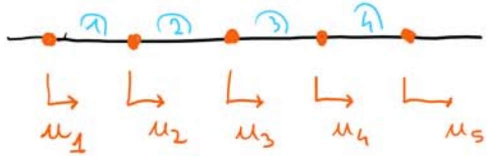
$$= \frac{1}{2} K_{ij} \left(2 \frac{\partial U_i}{\partial U_k} U_j \right) - F_i \delta_{ik}$$

$$= K_{ij} \delta_{ik} U_j - F_i \delta_{ik} = K_{kj} U_j - F_k = 0$$

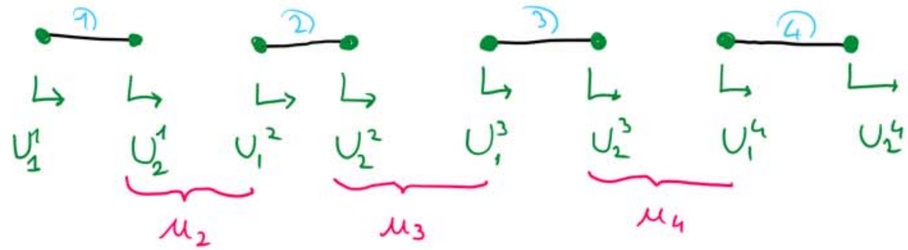
$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \underline{U}} = \underline{\underline{K}}_e \underline{U}_e - \underline{F}_e = 0 \rightarrow \boxed{\underline{\underline{K}}_e \underline{U}_e = \underline{F}_e}$$

EQUAZIONI di EQUILIBRIO SUL SINGOLO ELEMENTO FINITO

ASSEMBLAGGIO



QUESTI CONCETTI VALGONO ANCHE CONSIDERANDO LE FORZE !!!



SUL SINGOLO EF LE INCOGNITE CINEMATICHE SONO SEMPRE DUE $\rightarrow$ GUARDANDO AL PROBLEMA DAL PUNTO DI VISTA GLOBALE, LE INCOGNITE DIMINUISCONO $\rightarrow$ ALCUNE INCOGNITE SONO CONDIVISE

$$U_2^{i+1} = U_1^i \qquad F_2^{i-1} = F_1^i$$

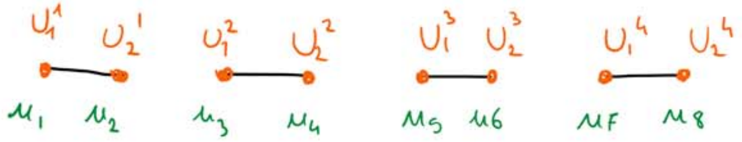
CON L'ASSEMBLAGGIO SI PASSA DAL PROBLEMA sul SINGOLO EF al PROBLEMA GLOBALE FINALE da RISOLVERE

$$\boxed{\underline{\underline{K}}\,\underline{U} = \underline{F}}$$

METODI di ASSEMBLAGGIO
- o) "COMPLETO"
- i) PER MATRICI ESPANSE
- ii) DIRETTO

0) METODO "COMPLETO" $\rightarrow$ SCONSIGLIATO !!! SI APPLICA SENZA RAGIONARE...

LE INCOGNITE SONO TUTTE QUELLE DEGLI ELEMENTI FINITI $\rightarrow$ BISOGNA AGGIUNGERE EQUAZIONI di VINCOLO



VETTORE delle INCOGNITE GLOBALI $\quad \underline{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \dots\dots\}^T$

SERVONO delle ULTERIORI EQUAZIONI da AGGIUNGERE $\quad \underline{\underline{A}}\,\underline{u} = 0$ VINCOLO

$u_2 = u_3$

$u_4 = u_5$

$u_6 = u_7$

$\vdots$

SCONSIGLIATO, NON È UN METODO FURBO...

i) METODO PER MATRICI ESPANSE

SONO NOTE TANTE RELAZIONI del TIPO $\underline{\underline{K}}^e \underline{U}^e = \underline{F}^e$ $\qquad \underline{\underline{K}}^e$ è 2×2, $\quad U^e, F^e$ è 2×1

IL METODO PREVEDE DI RISCRIVERE CIASCUNA RELAZIONE COME

$$\hat{\underline{\underline{K}}}^e \underline{u} = \hat{\underline{F}}^e$$

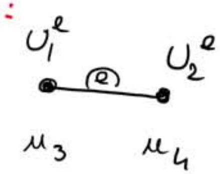
$\underline{u} = \{u_1, u_2, \dots\}$ VETTORE GLOBALE

DIPENDONO ANCORA dal SINGOLO EF, MA LA LORO DIMENSIONE È TALE DA ESSERE COMPATIBILE CON $\underline{u}$

SE $\underline{u}$ ha N COMPONENTI $\rightarrow$ $\hat{K}^e$ è $N\times N$, $\hat{F}^e$ è $N\times 1$ $\rightsquigarrow$ ECCO PERCHÉ SI CHIAMA PER MATRICI ESPANSE !!

INTRODUCIAMO UNA MATRICE di CONNETTIVITÀ $\quad \underline{U}^e = \underline{\underline{C}}^e \underline{u} \qquad \underline{\underline{C}}^e$ è MATRICE BOOLEANA $2\times N$

es:



$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \qquad \underline{\underline{C}}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}^e \underline{u} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \end{Bmatrix}$$

SCRIVIAMO L'ENERGIA POTENZIALE del SINGOLO EF

$$\Pi^e(\underline{U}) = \frac{1}{2} \underline{U}_e^T \underline{\underline{K}}_e \underline{U}_e - \underline{U}_e^T \underline{F}_e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}}^e \underline{u})^T \underline{\underline{K}}\, \underline{\underline{C}}^e \underline{u} - (\underline{\underline{C}}^e \underline{u})^T \underline{F} =$$

$$= \frac{1}{2} \underline{u}^T \underbrace{\underline{\underline{C}}_e^T \underline{\underline{K}}_e \underline{\underline{C}}_e}_{\hat{K}_e} \underline{u} - \underline{u}^T \underbrace{\underline{\underline{C}}_e^T F}_{\hat{F}_e} \equiv \frac{1}{2} \underline{u}^T \hat{\underline{\underline{K}}}^e \underline{u} - \underline{u}^T \hat{\underline{F}}$$

$$\hat{\underline{\underline{K}}}_e = \underline{\underline{C}}_e^T \underline{\underline{K}}_e \underline{\underline{C}}_e \qquad \hat{\underline{F}}_e = \underline{\underline{C}}_e^T \underline{F}$$

$\hat{K}^e$ ed $\hat{F}^e$ SONO MATRICI SPARSE: FORMATE QUASI TUTTE DA ZERI, TRANNE POCHE COMPONENTI

$$\Pi(\underline{u}) = \sum_{e=1}^{n_e} \Pi^e = \sum_e \frac{1}{2} \underline{U}_e^T \underline{\underline{K}}_e \underline{U}_e - \underline{U}_e^T F = \sum_e \frac{1}{2} \underline{u}^T \hat{\underline{\underline{K}}}^e \underline{u} - \underline{u}^T \hat{F}^e =$$

$$= \frac{1}{2} \underline{u}^T \left(\sum_e \hat{\underline{\underline{K}}}^e\right) \underline{u} - \underline{u}^T \left(\sum_e \hat{F}^e\right) \equiv \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{\underline{K}}\, \underline{u} - \underline{u}^T \underline{F} \Rightarrow \quad \underline{\underline{K}} = \sum_e \hat{\underline{\underline{K}}}^e, \quad \underline{F} = \sum_e \hat{\underline{F}}_e$$

QUINDI NEL METODO PER MATRICI SPARSE

$$\underline{\underline{K}} = \sum_e \hat{K}^e \ , \quad \underline{F} = \sum_e \hat{F}^e$$

→ DA RISOLVERE IL SISTEMA GLOBALE $\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{F}$

DAL PUNTO DI VISTA della MEMORIA È SVANTAGGIOSO, BISOGNA SALVARE UNA MATRICE PIENA DI ZERI PER NIENTE

(MA ORA È MENO PROBLEMATICO di UN TEMPO...)

ii) METODO di ASSEMBLAGGIO DIRETTO

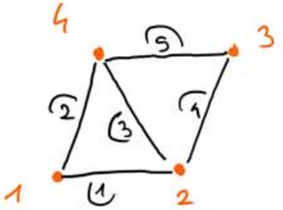
IN QUESTO METODO SI INSERISCE DIRETTAMENTE IL CONTRIBUTO della MATRICE $\underline{\underline{K}}^e$ DENTRO LA $\underline{\underline{K}}$ GLOBALE

↳ TENIAMO BUONO IL RISULTATO PRECEDENTE $\underline{\underline{K}} = \sum_e \underline{\underline{K}}^e \ , \quad \underline{F} = \sum_e \underline{F}^e$

↳ la $\underline{\underline{K}}^e$ ENTRA nella MATRICE GLOBALE <u>SOMMANDOSI</u> alle ALTRE

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{F} \qquad \underline{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}^T$$

DEFINISCO una MATRICE di INCIDENZA...



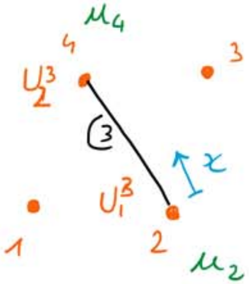
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

← NELLA j-ESIMA RIGA, LE ETICHETTE DEI NODI dell'ELEMENTO j-ESIMO

QUESTA MATRICE DA' ANCHE L'ORIENTAZIONE del SISTEMA DI RIFERIMENTO dell'ELEMENTO

es: ELEMENTO 3 →

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

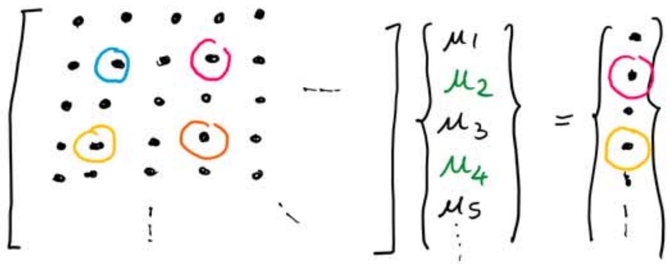


$$\begin{bmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{Bmatrix} U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix}}_{\text{QUESTE NEL SISTEMA LOCALE}} = \begin{Bmatrix} F_1^3 \\ F_2^3 \end{Bmatrix}$$

→ LA MATRICE DI INCIDENZA CI DICE QUELLE NEL SIST. GLOBALE

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1^3 \\ U_2^3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{F}$$



→ LE COMPONENTI di $\underline{\underline{K}}^{(3)}$ ed $\underline{F}^{(3)}$ ENTRANO IN GIOCO IN QUESTO MODO, SOMMANDOSI ALLE COMPONENTI NELLE POSIZIONI INDICATE

PROCEDIMENTO ITERATIVO

STEP 1: INIZIALIZZO UNA MATRICE $\underline{\underline{K}}$ ed un VETTORE $\underline{F}$ NULLI

for $e = 1 : N_e$

STEP 2: CAPISCO IN QUALE POSIZIONE ENTRA $\underline{\underline{K}}^e$ ed $\underline{F}^e$, GRAZIE ALLA MAT. INCIDENZA

STEP 3: SOMMO $\underline{\underline{K}}^e$ e $\underline{F}^e$ AGLI ELEMENTI che STAVANO IN $\underline{\underline{K}}$ e $\underline{F}$ NELLE SUDDETTE POSIZIONI

end

PROPRIETÀ del SISTEMA GLOBALE

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = F \longrightarrow \Pi[u] = \frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{u} - \underline{u}^T \underline{F}$$

EPT del SISTEMA GLOBALE (FUNZIONE di $\underline{u}$)

$\downarrow$ INTERPRETAZIONE MECCANICA

F: FORZE ESTERNE APPLICATE ai NODI della STRUTTURA

$\underline{\underline{K}}\,\underline{u}$: FORZE INTERNE che la STRUTTURA ELASTICA FA NASCERE A CAUSA delle FORZANTI ESTERNE

CON IL FEM, LA STRUTTURA DIVENTA UNA MOLLA ELASTICA $\longrightarrow$ LA RIGIDEZZA della MOLLA è LA $\underline{\underline{K}}$, DIPENDE dalla STRUTTURA...

N.B. LE EQUAZIONI $\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{F}$ SI POSSONO INTERPRETARE COME EQUAZIONI di EQUILIBRIO della STRUTTURA

PROPRIETÀ della $\underline{\underline{K}}$:

i) LE RIGHE di $\underline{\underline{K}}$ SONO EQUAZIONI di EQUILIBRIO NEI NODI

ii) LE COLONNE di $\underline{\underline{K}}$ SONO LE FORZE NODALI che SI GENERANO A CAUSA di UNO SPOSTAMENTO UNITARIO RELATIVO al gdl della COLONNA CONSIDERATA

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ \vdots \\ K_{N1} \end{Bmatrix}}_{\text{FORZA che NASCE QUANDO c'è SOLO } u_1} u_1 + \begin{Bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \\ \vdots \\ K_{N2} \end{Bmatrix} u_2 + \cdots = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix}$$

iii) LA STRUTTURA SVINCOLATA HA $\underline{\underline{K}}$ SINGOLARE

↳ SOLUZIONE ELASTICA è UNICA A MENO DI UN ATTO DI MOTO RIGIDO $\longrightarrow$ LE FORZE che NASCONO A CAUSA di UN MOTO RIGIDO SONO NULLE!!

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{u}^R = 0 \quad , \forall\, \underline{u}^R \text{ AMMISSIBILE} \implies \det(\underline{\underline{K}}) = 0$$

iv) $\underline{\underline{K}}$ è SEMIDEFINITA POSITIVA $\qquad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{u} \geq 0, \ \forall \underline{u} \quad (\mathcal{E} = 0 \text{ se } \underline{u} = 0)$

v) $\underline{\underline{K}} \in Sym \longrightarrow$ Si SFRUTTA il TEOREMA di BETTI

$$\mathcal{L}_{ab} = \mathcal{L}_{ba}$$

CONDIZIONE a) $\underline{u}^a, \underline{F}^a = \underline{\underline{K}}\,\underline{u}^a$

CONDIZIONE b) $\underline{u}^b, \underline{F}^b = \underline{\underline{K}}\,\underline{u}^b$

$$\underline{u}^b \cdot \underline{F}^a = \underline{u}^a \cdot \underline{F}^b \rightarrow \underline{u}^b \cdot \underline{\underline{K}}\,\underline{u}^a = \underline{u}^a \cdot \underline{\underline{K}}\,\underline{u}^b$$

$$\underline{u}^b \cdot \underline{\underline{K}}\,\underline{u}^a = \underline{u}^b \cdot \underline{\underline{K}}^T \underline{u}^a \implies \boxed{\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{K}}^T}$$

CALCOLO della SOLUZIONE

$\det(\underline{\underline{K}}) = 0 \qquad rg(\underline{\underline{K}}) = 2m - 3$

SERVONO ALMENO 3 gdl DA FISSARE PER AVERE SOTTOMATRICE INVERTIBILE

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} \underline{u}_U \\ \hline \underline{u}_F \end{Bmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_U \\ \underline{F}_F \end{Bmatrix}$$

– PARTIZIONE –

$\underline{u}_U, \underline{F}_U \rightarrow$ GRANDEZZE NEI NODI DOVE SONO NOTI GLI SPOSTAMENTI

$\underline{u}_F, \underline{F}_F \rightarrow$ GRANDEZZE NEI NODI DOVE SONO NOTE LE FORZE

IL PROBLEMA SI PUÒ PARTIZIONARE:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{UU} & \underline{\underline{K}}_{UF} \\ \underline{\underline{K}}_{FU} & \underline{\underline{K}}_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_U \\ \underline{u}_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F}_U \\ \underline{F}_F \end{Bmatrix}$$

INCOGNITE DEL PROBLEMA

2ª riga:

$$\underbrace{\underline{\underline{K}}_{FF}\, \underline{u}_F}_{\text{INCOGNITA}} = \underbrace{\underline{F}_F}_{\text{FORZE ESTERNE}} - \underbrace{\underline{\underline{K}}_{FU}\, \underline{u}_U}_{\text{FORZE DOVUTE A MOTI IMPRESSI}}$$

dal SISTEMA PRECEDENTE TROVO $\underline{u}_F \rightarrow$ LO USO NELLA 1ª riga

$$\underbrace{\underline{F}_U}_{\text{INCOGNITA}} = \underline{\underline{K}}_{UU}\, \underline{u}_U + \underline{\underline{K}}_{UF}\, \underline{u}_F \rightarrow \text{LE } \underline{F}_U \text{ SONO LE REAZIONI VINCOLARI}$$

(INFATTI NEI VINCOLI SONO NOTI GLI SPOSTAMENTI)

EF FORMULAZIONE QUADRATICA

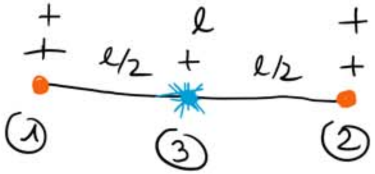
IL CASO STUDIATO FINORA RIGUARDA L'APPROSSIMAZIONE LINEARE del CAMPO di SPOSTAMENTI $\rightarrow u(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1 + \frac{x}{l} u_2 \rightarrow$ PUÒ ESSERE APPROSSIMAZIONE BUONA PER GLI SPOSTAMENTI, ma NON PER LE AZIONI ASSIALI

$N(x) = EA\,u'(x) \rightarrow$ APPROSSIMAZIONE di $N(x)$ È LINEARE A TRATTI $\rightarrow$ INFITTENDO LA MESH, $u(x)$ MIGLIORA, ma $N(x)$ RIMANE SEMPRE COSTANTE A TRATTI

PER MIGLIORARE LA SOLUZIONE SI PUÒ AUMENTARE L'ORDINE della FUNZIONI di FORMA

$$\boxed{u(x) = a + bx + cx^2} \rightarrow \text{SERVONO gdl IN 3 PUNTI}$$

(ALLA RITZ - GALERKIN)



$$\begin{cases} u(0) = u_1 = a \\ u(l/2) = u_3 = a + b\frac{l}{2} + c\frac{l^2}{4} \\ u(l) = u_2 = a + bl + cl^2 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} a = u_1 \\ b\frac{l}{2} + c\frac{l^2}{4} = u_3 - u_1 \\ bl + cl^2 = u_2 - u_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = u_1 \\ 2bl + cl^2 = 4u_3 - 4u_1 \\ bl + cl^2 = u_2 - u_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = u_1 \\ b = \frac{1}{l}(3u_1 - u_2 + 4u_3) \\ c = \frac{1}{l^2}(2u_1 + 2u_2 - 4u_3) \end{cases}$$

RISOLVENDO, LA FORMULAZIONE QUADRATICA DIVENTA:

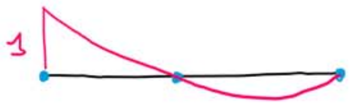
$$\boxed{u(x) = \underbrace{\left[1-\frac{3x}{\ell}+\frac{2x^2}{\ell^2}\right]}_{N_1(x)}u_1 + \underbrace{\left[-\frac{x}{\ell}+\frac{2x^2}{\ell^2}\right]}_{N_2(x)}u_2 + \underbrace{\left[\frac{4x}{\ell}-\frac{4x^2}{\ell^2}\right]}_{N_3(x)}u_3}$$

$$u^e(x) = N_i(x)\,U_i^e = [N_1, N_2, N_3]\,\underline{U}^e = \underline{\underline{N}}(x)\,\underline{U}^e$$

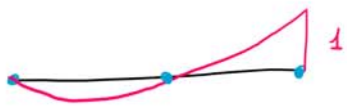
$$\varepsilon^e(x) = \frac{du^e}{dx} = \left[\frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_2}{dx}, \frac{dN_3}{dx}\right]\underline{U}^e = \underline{\underline{B}}(x)\,\underline{U}^e$$

Vale sempre che $N_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\sum N_i = 1$, $\sum B_i = 0$

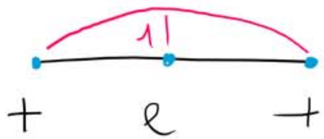
$$N_1(x) = 1 - \frac{3x}{\ell} + \frac{2x^2}{\ell^2}$$



$$N_2(x) = \frac{x}{\ell}\left(-1+2\frac{x}{\ell}\right)$$



$$N_3(x) = 4\frac{x}{\ell}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)$$



IN TERMINI MATRICIALI

$$\underline{\underline{N}}(x) = \left\{\left(1-\frac{3x}{\ell}+\frac{2x^2}{\ell^2}\right), \frac{x}{\ell}\left(-1+\frac{2x}{\ell}\right), \frac{4x}{\ell}\left(1-\frac{x}{\ell}\right)\right\}$$

$$\underline{\underline{B}}(x) = \left\{\left(-\frac{3}{\ell}+\frac{4x}{\ell^2}\right), \left(-\frac{1}{\ell}+\frac{4x}{\ell^2}\right), \left(\frac{4}{\ell}-\frac{8x}{\ell^2}\right)\right\}$$

ENERGIA POTENZIALE TOTALE

$$\Pi[\underline{U}] = \frac{1}{2}\underbrace{\underline{U}^{e\,T}}_{\text{ora } U \text{ ha 3 COMPONENTI}}\underbrace{\left(\int_0^\ell \underline{\underline{B}}^T(x)\,EA\,\underline{\underline{B}}(x)\right)}_{\underline{\underline{K}}\ \text{MATRICE di RIGIDEZZA}\ (3\times 3)}\underline{U}^e - \underline{U}^{e\,T}\underbrace{\left(\int_0^\ell \underline{\underline{N}}^T(x)\,p(x) - \begin{Bmatrix}\tilde{F}_1^e\\ \tilde{F}_2^e\\ \tilde{F}_3^e\end{Bmatrix}\right)}_{\underline{F}\ \text{VETTORE FORZE NODALI EQUIVALENTI}}$$

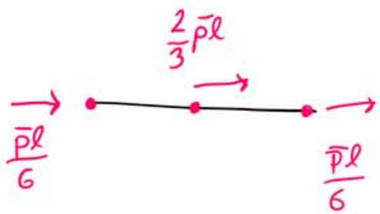
MATRICE di RIGIDEZZA

$$\underline{\underline{K}} = EA\int_0^L \begin{bmatrix} B_1^2 & B_1B_2 & B_{13} \\ & B_2^2 & B_{23} \\ \text{Sym} & & B_3^2 \end{bmatrix} dx = \boxed{\frac{EA}{3\ell}\begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}}$$

VETTORE FORZE NODALI

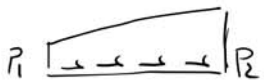
- CARICO COSTANTE

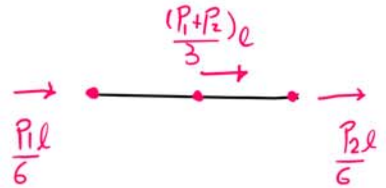
$$p(x) = \bar{p} \qquad \int_0^\ell \underline{\underline{N}}^T(x)\,\bar{p} = \bar{p}\int_0^\ell \underline{\underline{N}}^T(x) = \frac{\bar{p}\ell}{3}\begin{Bmatrix}1/2\\1/2\\2\end{Bmatrix}$$



- CARICO LINEARE

$$p(x) = p_1 + \frac{p_2-p_1}{\ell}x \qquad \int_0^\ell \underline{\underline{N}}^T(x)\,p(x) = \frac{\ell}{3}\begin{Bmatrix}p_1/2\\p_2/2\\p_1+p_2\end{Bmatrix}$$





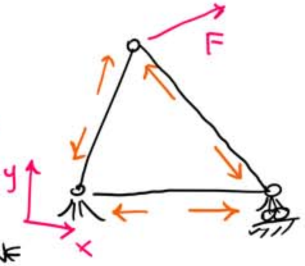
METODO ALTERNATIVO PER LE F. FORMA

i) $N_1(x)$ è quadratica

ii) $\begin{cases} N_1(0) = 1 \\ N_1(\ell/2) = 0 \\ N_1(\ell) = 0 \end{cases} \rightarrow N_1(x) = A_1\left(x-\frac{\ell}{2}\right)(x-\ell) \rightarrow N_1(0) = A_1\frac{\ell^2}{2} = 1 \rightarrow A_1 = \frac{2}{\ell^2}$

$$\boxed{N_1(x) = \frac{2}{\ell^2}\left(x-\frac{\ell}{2}\right)(x-\ell)}$$

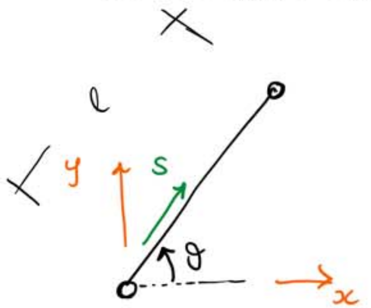
ASTE INCLINATE

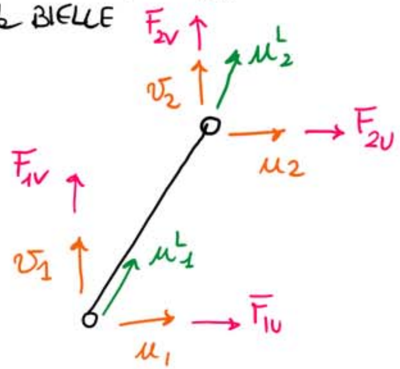


PER STRUTTURE "INTRINSECAMENTE 1D" LA FORMULAZIONE AGLI EF TRUSS PERMETTE di RISOLVERE DIRETTAMENTE IL PROBLEMA

↳ PER STRUTTURE 2D,

BISOGNA LEGARE SPOSTAMENTI $u(x,y)$, $v(x,y)$ AGLI SPOSTAMENTI ASSIALI delle BIELLE



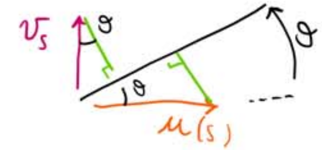


$$\underline{U}^A = \begin{Bmatrix} u_1^L \\ u_2^L \end{Bmatrix} \qquad \begin{cases} u(s) = N_1(s)\,u_1 + N_2(s)\,u_2 \\ v(s) = N_1(s)\,v_1 + N_2(s)\,v_2 \end{cases}$$

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(s) & 0 & N_2(s) & 0 \\ 0 & N_1(s) & 0 & N_2(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

IL LEGAME tra $u(s)$, $v(s)$ e LO SPOSTAMENTO LOCALE e $u^L(s)$ è

$$u^L(s) = u(s)\cos\theta + v(s)\,\mathrm{sen}\,\theta$$



CALCOLANDOLI NEI NODI ESTREMI

$$\begin{Bmatrix} u_1^L \\ u_2^L \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{T}} \;\to\; 2\times 4} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

L'EPT definita nel SINGOLO EF TROVATA IN PRECEDENZA è

$$\Pi = \frac{1}{2}\underline{u}_L^T \underline{\underline{K}}_L \underline{u}_L - \underline{u}_L^T \underline{F}_L = \frac{1}{2}\underline{u}^T \underbrace{\underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}}_L \underline{\underline{T}}}_{\underline{\underline{K}}} \underline{u} - \underline{u}^T \underbrace{\underline{\underline{T}}^T \underline{F}_L}_{\underline{F}}$$

$$= \frac{1}{2}\underline{u}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{u} - \underline{u}^T \underline{F}$$

$$\underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}}_L \underline{\underline{T}} \to \begin{matrix} 4\times 2 \\ 2\times 2 \\ 2\times 4 \end{matrix} \to \underline{\underline{K}}_e^l \quad 4\times 4!$$

$c = \cos\theta$

$s = \mathrm{sen}\,\theta$

$$\underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}}_L \underline{\underline{T}} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \tilde{\underline{\underline{K}}} & -\tilde{\underline{\underline{K}}} \\ \hdashline -\tilde{\underline{\underline{K}}} & \tilde{\underline{\underline{K}}} \end{array}\right], \quad \tilde{\underline{\underline{K}}} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{Bmatrix} c\bar{F}_1 \\ s\bar{F}_1 \\ c\bar{F}_2 \\ s\bar{F}_2 \end{Bmatrix}$$