Codice agli Elementi Finiti per la dinamica delle Strutture

Marco Rossi

Contenuti dell’esercitazione

- Introduzione
- Tutorial sull’ambiente di lavoro Matlab
- Struttura di un codice agli Elementi Finiti
- Elementi Finiti per l’analisi dinamica

Perché scrivere un codice agli Elementi Finiti?

I vantaggi nello scrivere un codice agli Elementi Finiti

Scrivere un codice agli Elementi Finiti permette di comprendere a fondo come funziona il metodo numerico, largamente usato in diversi software commerciali, che però non permettono di vedere cosa l'utente sta facendo ad ogni passo della modellazione.
Inoltre permette di capire a fondo il problema, perché dovendo dare delle istruzioni ad una macchina, il programmatore deve sempre aver chiaro il metodo utilizzato e quindi aumenta i livello di comprensione del modello matematico che sta alla base del problema.

Quando è svantaggioso…

Quando il problema è troppo complesso…

… cioè quando la geometria è molto elaborata, quando interagiscono Elementi Finiti diversi o fisiche diverse e ci sono problemi di contatto, di interazione-fluido struttura…

Quando è vantaggioso…

Quando il problema è troppo complesso…

… cioè quando i normali software di calcolo commerciali non sono in grado di raggiungere il livello di accuratezza voluto, per quanto riguarda il metodo di risoluzione o la gestione degli output…

… o quando il problema è semplice!

MAI FIDARSI DI UN CODICE DI CALCOLO !

↓

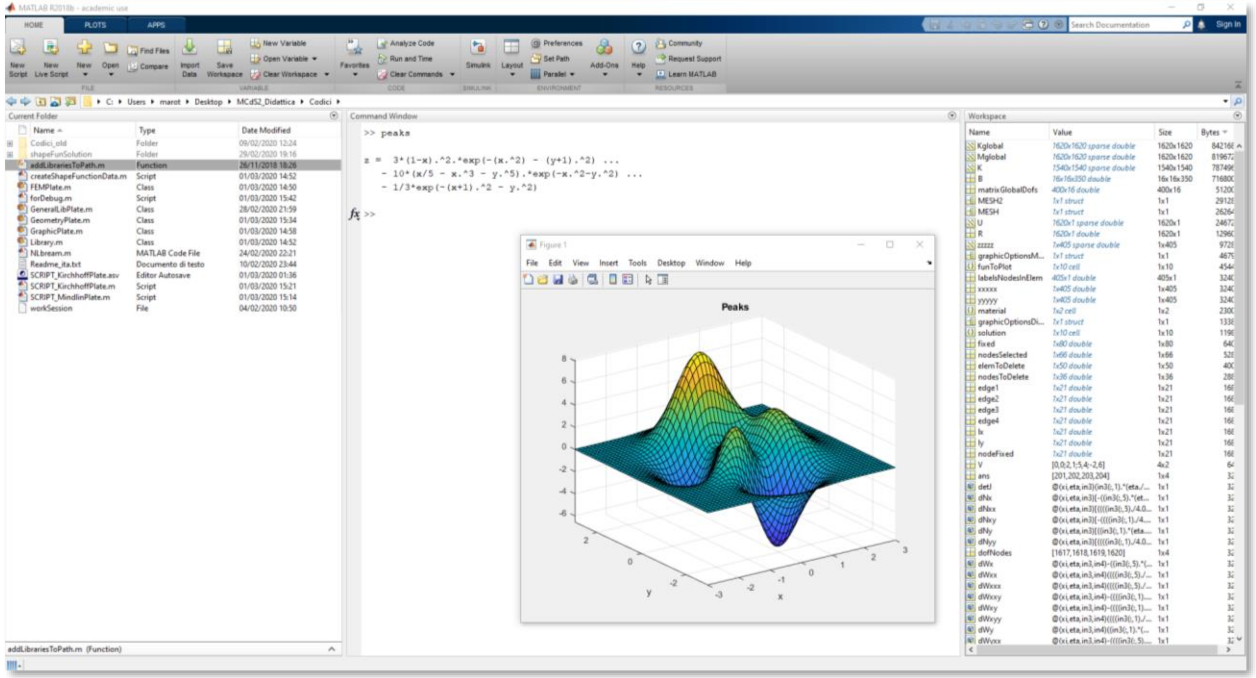
Un ingegnere deve sempre interpretare in modo critico i risultati ottenuti da un modello numerico!

Il software MATLAB

Il software MATLAB

MATLAB (abbreviazione di Matrix Laboratory) è un ambiente per il calcolo numerico e l'analisi statistica scritto in C, che comprende anche l'omonimo linguaggio di programmazione creato dalla MathWorks. Nonostante sia specializzato nel calcolo numerico, uno strumentario opzionale interfaccia MATLAB con il motore di calcolo simbolico di Maple.

Fu creato alla fine degli anni settanta da Cleve Moler, presidente del dipartimento di scienze informatiche dell'Università del Nuovo Messico, per dare ai suoi studenti accesso a strumenti di calcolo senza che essi dovessero necessariamente conoscere il Fortran. Presto il software si diffuse nelle altre università e trovò un grande pubblico tra i matematici applicati. L'ingegnere Jack Little si unì con Moler e Steve Bangert e i tre riscrissero MATLAB in linguaggio C e fondarono la The MathWorks nel 1984 per continuare il suo sviluppo.



Pro :

- Linguaggio di programmazione semplice
- Librerie di funzioni già implementate
- Toolkit e creazione di applicazioni *stand-alone*

Contro :

- Codice lento se confrontato con C/ C++ o Fortran (linguaggio interpretato e non compilato)

Un primo passo con MATLAB

Dal vostro browser andate all'indirizzo:

https://tinyurl.com/FEMTrieste2021

Scaricate tutto il materiale e salvatelo in una cartella sul vostro Desktop

In MATLAB, scegliete come percorso la cartella che avete appena creato e che contiene il materiale del corso

Struttura di un codice FEM

PROBLEMA

↓

Modello Fisico
Grandezze fisiche da studiare

↓

Modello Matematico
Sistema di PDE

↓

Modello Computazionale
Sistema di equazioni algebriche

↓

SOLUZIONE

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

↓

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza...)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

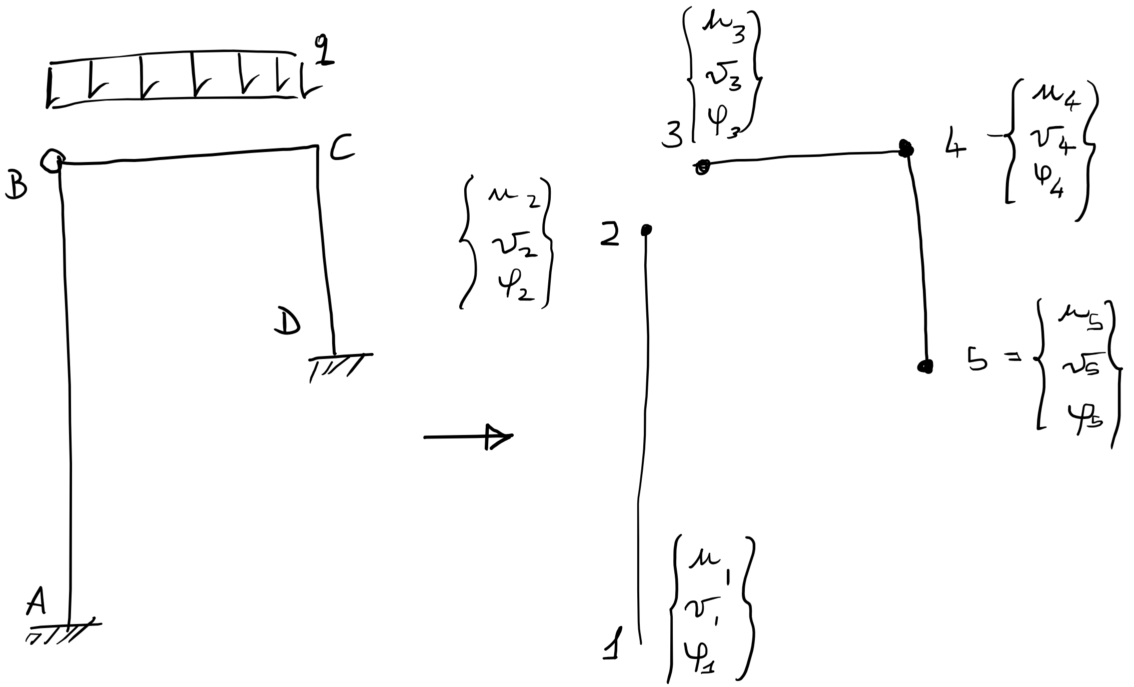
↓

POST-PROCESSING

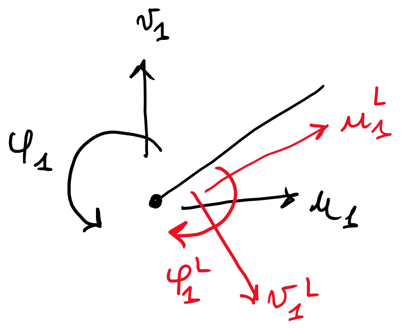
- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

- EF monodimensionali –

Formulazione alla Eulero-Bernoulli



$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}$$ GRADI di LIBERTA' del NODO i-ESIMO



$$\underline{u}^L = \underline{\underline{T}}\,\underline{u}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^L \\ v_1^L \\ \varphi_1^L \end{Bmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix}$$

Codice agli Elementi Finiti – geometria e mesh

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

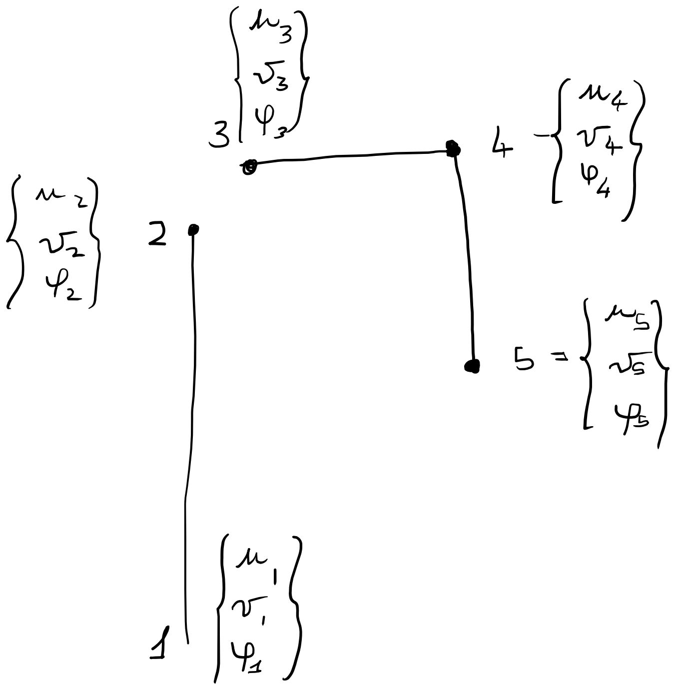
POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

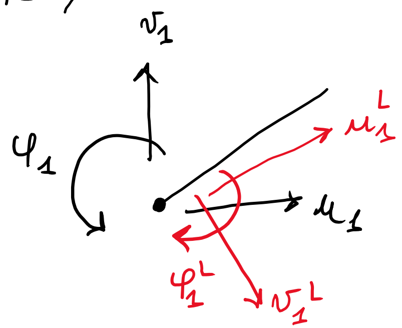
- EF monodimensionali –

Formulazione alla Eulero-Bernoulli

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ \varphi_5 \end{Bmatrix}$$



$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}$ GRADI di LIBERTÀ del NODO i-ESIMO



$$\underline{u}^L = \underline{\underline{T}}\, \underline{u}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^L \\ v_1^L \\ \varphi_1^L \end{Bmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \end{Bmatrix}$$

Codice agli Elementi Finiti – geometria e mesh

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

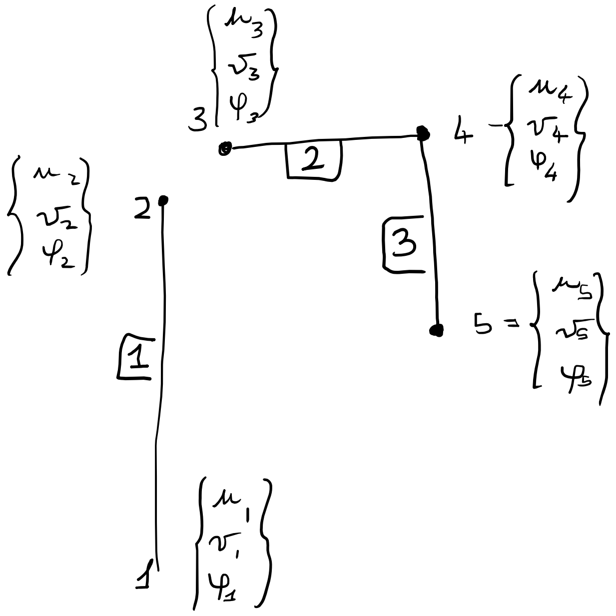
Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

↓

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati



Per descrivere la mesh si usa un dato strutturato MESH

```
MESH.nodes = [x1 y1;        MESH.elem = [node1 node2;
              x2 y2;                     node1 node5;
              x3 y3;                     node6 node7;
               ...                           ...
              xn yn];                    nodeI nodeJ;]
```

```
MESH.mat = [mat1, mat1, mat2, ... matN];

MESH.dof = [dofNode1, dofNode2, ... dofNodeN];

MESH.angle = [angleEF1, angleEF2, ... angleEFN];

MESH.length = [lengthEF1, lengthEF2, ... lengthEFN];
```

Codice agli Elementi Finiti – funzioni di forma

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

Metodo di Galerkin

Formulazione **forte** del problema differenziale
(sistema di PDE con opportune condizioni al contorno e iniziali)

$$EAu''(x,t) - \rho A\ddot{u}(x,t) = -p(x,t)$$

$$EJv^{IV}(x,t) + \rho A\ddot{v}(x,t) = q(x,t)$$

+ C. Contorno sul dominio

+ C. Iniziali in t = 0

Formulazione **debole** del problema differenziale
(forma integro-differenziale sull'intero dominio)

$$\int_0^L EAu'w' - [EAu'w]_0^L + \int_0^L \rho A\ddot{u}w = \int_0^L pw \quad \forall w \in \mathcal{H}_0^1$$

$$\int_0^L EJv''w'' + [EJv'''w]_0^L - [EJv''w']_0^L + \int_0^L \rho A\ddot{v}w = \int_0^L qw \quad \forall w \in \mathcal{H}_0^2$$

Codice agli Elementi Finiti – funzioni di forma

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza...)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

Approssimazione analitica

$$u(x,t) = \boldsymbol{N}^T(x)\boldsymbol{U}(t) \qquad v(x,t) = \boldsymbol{N}^B(x)\boldsymbol{U}(t)$$

$$w(x,t) = \boldsymbol{N}^T(x)\boldsymbol{W} \qquad w(x,t) = \boldsymbol{N}^B(x)\boldsymbol{W}$$

Funzioni di Forma

Truss (lineari)

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{L}$$

Eulero-Bernoulli beam (hermitiane)

$$N_1(x) = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1$$

$$N_2(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

Forma discretizzata

$$\int_0^L EA\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{N}_T'^T\boldsymbol{N}_T'\boldsymbol{U} + \int_0^L \rho A\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{N}_T^T\boldsymbol{N}_T\ddot{\boldsymbol{U}} = \int_0^L p\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{N}_T^T \qquad \forall \boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^N$$

$$\int_0^L EJ\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{N}_B''^T\boldsymbol{N}_B''\boldsymbol{U} + \int_0^L \rho A\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{N}_B^T\boldsymbol{N}_B\ddot{\boldsymbol{U}} = \int_0^L q\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{N}_B^T \qquad \forall \boldsymbol{W} \in \mathbb{R}^N$$

Codice agli Elementi Finiti – funzioni di forma

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

Sistema di equazioni algebriche che rappresenta il modello computazionale (dinamica)

$$\boxed{\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}}(t) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U}(t) = \boldsymbol{f}(t)}$$

Matrici di Massa e Rigidezza

Truss

$$K = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \frac{\rho AL}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eulero-Bernoulli beam:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$M = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & \frac{11L}{210} & 0 & -\frac{9}{70} & -\frac{13L}{420} \\ 0 & \frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} & 0 & -\frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{11L}{210} \\ 0 & -\frac{13L}{420} & -\frac{L^2}{140} & 0 & -\frac{11L}{210} & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix}$$

Codice agli Elementi Finiti – condizioni al contorno

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche
- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

↓

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

Definizione delle condizioni al contorno

Si possono distinguere le condizioni al contorno *essenziali* che assegnano un valore alle grandezze cinematiche sul bordo (spostamenti e rotazioni) oppure condizioni al contorno *naturali* che prescrivono al contorno delle quantità statiche (momenti e tagli)

Table 10.3 Typical boundary conditions for Euler–Bernoulli and Timoshenko beam bending

BC type	Symbol used	Euler–Bernoulli condition		Timoshenko condition	
Fixed:		$w = \bar{w};$	$\frac{\partial w}{\partial x} = -\bar{\theta}_y$	$w = \bar{w};$	$\theta_y = \bar{\theta}_y$
Pinned:		$w = \bar{w};$	$M_y = \bar{M}_y$	$w = \bar{w};$	$M_y = \bar{M}_y$
Roller:		$w = \bar{w};$	$M_y = \bar{M}_y$	$w = \bar{w};$	$M_y = \bar{M}_y$
Free:		$S_z = \bar{S}_z;$	$M_y = \bar{M}_y$	$S_z = \bar{S}_z;$	$M_y = \bar{M}_y$
Symmetry:		$S_z = 0;$	$\frac{\partial w}{\partial x} = -\bar{\theta}_y$	$S_z = 0;$	$\theta_y = \bar{\theta}_y$
Asymmetry:		$w = 0;$	$M_y = 0$	$w = 0;$	$M_y = 0$

Tratto da
Zienkiewicz & Taylor
The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

↓

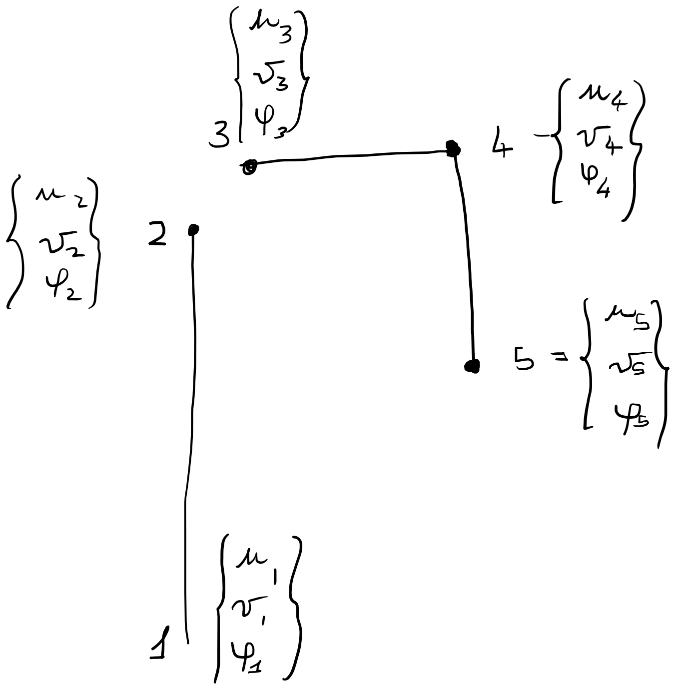
POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

Tipologie di vincolo

Dal punto di vista del codice FEM, si possono distinguere i *vincoli interni* tra i vari gradi di libertà ed i vincoli esterni o *vincoli a terra*

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ \varphi_5 \end{Bmatrix}$$



Vincolo a terra

$$U_1 = U_2 = U_3 = 0$$
$$U_{13} = U_{14} = U_{15} = 0$$

→

$$\boldsymbol{CU} = 0$$

Questo tipo di vincolo è inserito con la condensazione statica

Codice agli Elementi Finiti – constraints

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:
- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

↓

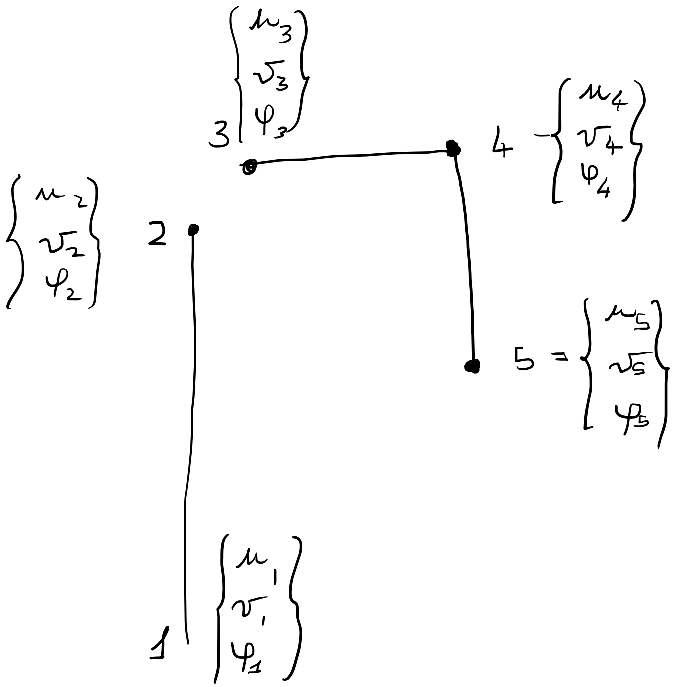
POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

Tipologie di vincolo

Dal punto di vista del codice FEM, si possono distinguere i *vincoli interni* tra i vari gradi di libertà ed i vincoli esterni o *vincoli a terra*

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ \varphi_5 \end{Bmatrix}$$



Vincolo interno

$$U_4 - U_7 = 0$$
$$U_5 - U_8 = 0$$

→

Questo tipo di vincolo è inserito con la tecnica master/slave

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U} = 0$$

L è il nullspace di A

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{q}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{L}$$

Codice agli Elementi Finiti – analisi statica lineare

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

↓

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

Analisi Statica Lineare

I gradi di libertà e i carichi generalizzati possono essere partizionati in due gruppi con intersezione nulla:

- il gruppo dei gradi di libertà in cui è noto lo spostamento ed è incognita la forza agente al nodo (quando sono imposti dei vincoli cinematici e si vuole determinare la risultante)
- il gruppo dei gradi di libertà in cui è nota la forza agente ed è incognito lo spostamento del nodo (quando sono imposti dei carichi, eventualmente nulli e si desidera determinare lo spostamento)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{uf} \\ \boldsymbol{K}_{fu} & \boldsymbol{K}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_u \\ \boldsymbol{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_u \\ \boldsymbol{F}_f \end{bmatrix}$$

L'equazione matriciale si può quindi scomporre in due equazioni e risolverle una dopo l'altra per ricavare le due incognite

$$\boldsymbol{K}_{fu}\boldsymbol{u}_u + \boldsymbol{K}_{ff}\underline{\boldsymbol{u}_f} = \boldsymbol{F}_f$$

$$\boldsymbol{K}_{uu}\boldsymbol{u}_u + \boldsymbol{K}_{uf}\boldsymbol{u}_f = \underline{\boldsymbol{F}_u}$$

Le incognite finali rappresentano gli spostamenti nei nodi liberi e le reazioni vincolari nei nodi vincolati

$$\boldsymbol{u}_f = \boldsymbol{K}_{ff}^{-1}(\boldsymbol{F}_f - \boldsymbol{K}_{fu}\boldsymbol{u}_u)$$

$$\boldsymbol{F}_u = \boldsymbol{K}_{uu}\boldsymbol{u}_u + \boldsymbol{K}_{uf}\boldsymbol{K}_{ff}^{-1}(\boldsymbol{F}_f - \boldsymbol{K}_{fu}\boldsymbol{u}_u) = \boldsymbol{R}$$

Codice agli Elementi Finiti – analisi dinamica

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient e time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

↓

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

Analisi Modale

Data la matrice di rigidezza e massa globale, è possibile applicare i vincoli come fatto per l'analisi statica ed ottenere i modi di vibrare della struttura

$$(-\omega_i^2 \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{\psi}^{(i)} = 0$$

Analisi in regime Transitorio

Si utilizzano algoritmi di integrazione temporale (differenze finite) per risolvere le equazioni del moto già discretizzate agli Elementi Finiti nel dominio temporale

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{f}(t)$$

Si sviluppa in serie di Taylor il gli spostamenti e le velocità…

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \Delta t_n \dot{\boldsymbol{u}}_n + (1-\theta_2)\frac{\Delta t_n^2}{2}\ddot{\boldsymbol{u}}_n + \theta_2 \frac{\Delta t_n^2}{2}\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+1},$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{u}}_n + (1-\theta_1)\,\Delta t_n \ddot{\boldsymbol{u}}_n + \theta_1 \Delta t_n \ddot{\boldsymbol{u}}_{n+1},$$

… e si inseriscono nelle equazioni del moto che si possono risolvere

$$\boldsymbol{M}\left[(1-\alpha_m)\,\ddot{\boldsymbol{u}}_{n+1} + \alpha_m \ddot{\boldsymbol{u}}_n\right] + \boldsymbol{C}\left[(1-\alpha_f)\,\dot{\boldsymbol{u}}_{n+1} + \alpha_f \dot{\boldsymbol{u}}_n\right] + \\ + \boldsymbol{K}\left[(1-\alpha_f)\,\boldsymbol{u}_{n+1} + \alpha_f \boldsymbol{u}_n\right] = \boldsymbol{f}_{n+1-\alpha_f}$$

Le proprietà del metodo dipendono dai coefficienti, che si possono definire in modo da assegnare il raggio spettrale asintotico che è legato alla dissipazione numerica del metodo

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \qquad \theta_1 = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2$$

Codice agli Elementi Finiti – soluzioni

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:
- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

↓

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati

Calcolo della soluzione : campo primario

Una volta calcolato il vettore dei gradi di libertà nodali, si conosce già la soluzione del campo primario incognito nei nodi della mesh. Tuttavia, la soluzione analitica completa si trova applicando l'approssimazione introdotta nel metodo agli Elementi Finiti

$$u(x,t) = \boldsymbol{N}^T(x)\boldsymbol{U}(t) \qquad v(x,t) = \boldsymbol{N}^B(x)\boldsymbol{U}(t)$$

I campi incogniti secondari si calcolano differenziando opportunamente il campo incognito primario, per esempio per la rotazione si ha:

$$v'(x,t) = \boldsymbol{N}'_B(x)\boldsymbol{U}(t)$$

Il momento flettente si calcola a partire dal legame momento-curvatura

$$M(x,t) = -EJv''(x,t) = -EJ\boldsymbol{N}''_B(x)\boldsymbol{U}(t)$$

Il taglio nelle due direzioni si calcola a partire dai momenti

$$T(x,t) = -EJv'''(x,t) = -EJ\boldsymbol{N}'''_B(x)\boldsymbol{U}(t)$$

Codice agli Elementi Finiti – grafica

PRE-PROCESSING

- Definizione della geometria del dominio
- Definizione della mesh
- Definizione dei materiali
- Definizione delle funzioni di forma
- Creazione delle matrici di sistema (massa, rigidezza…)
- Assegnazione delle condizioni al contorno naturali ed essenziali

↓

PROCESSING

Soluzione del sistema di equazioni algebriche:

- Analisi statica lineare
- Analisi statica non-lineare
- Analisi dinamica lineare (modale, transient o time-harmonic)
- Analisi dinamica non-lineare

↓

POST-PROCESSING

- Calcolo dei campi primari incogniti
- Calcolo delle grandezze derivate
- Rappresentazione grafica dei risultati