

Appunti delle lezioni di Meccanica Razionale

Giorgio S. Tondo

a.a. 2022-2023
versione del 18/05/2023

©2009 G. Tondo. Questi appunti sono coperti da diritto d'autore; pertanto, essi non possono essere sfruttati a fini commerciali o di pubblicazione editoriale. Ogni abuso sarà perseguito a termini di legge dal titolare del diritto.

Indice

1	Introduzione	1
2	Calcolo Vettoriale	3
2.1	Richiami di algebra vettoriale	3
2.2	Spazio affine euclideo $\mathcal{E}_3$	11
2.2.1	Applicazioni affini in $\mathcal{E}_3$	12
2.3	Riferimento cartesiano in $\mathcal{E}_3$	13
2.4	Riferimento polare in $\mathcal{E}_2$	15
2.5	Riferimento cilindrico in $\mathcal{E}_3$	17
2.6	Riferimento sferico in $\mathcal{E}_3$	19
2.7	Momenti di vettori applicati	23
2.8	Soluzione dell'Esercizio 2.2.2	26
3	Vincoli e gradi di libertà di un sistema meccanico	29
3.1	Spazio delle configurazioni	29
3.2	Vincoli e loro classificazione	30
3.3	Gradi di libertà di un rigido	33
3.4	Grado di un vincolo	38
3.5	Sovrapposizione di più vincoli	45
3.6	Modelli articolati	53
3.7	Soluzione dell'Esercizio 3.5.1	55
4	Cinematica dei Rigidi	57
4.1	Cenni di Cinematica dei Modelli Continui	57
4.2	Moti rigidi	59
4.2.1	Esempi di Moto rigido	62
4.3	Angoli di Eulero	73
4.4	Moto rigido generale	78
4.4.1	Teorema di Poisson	80
4.5	Applicazioni del teorema di Poisson	82
4.5.1	Campo di velocità di un rigido	82
4.5.2	Campo delle accelerazioni di un rigido	86
4.6	Cinematica Relativa	86
4.6.1	Formula di derivazione cinematica	87
4.6.2	Composizione delle velocità	88

4.6.3	Composizione delle accelerazioni	90
4.6.4	Composizione delle velocità angolari	92
4.7	Moto di precessione	93
4.8	Moto rigido piano	97
4.8.1	Accelerazioni del moto piano	105
4.8.2	Disco appoggiato su di una guida rettilinea	105
4.8.3	Vincolo di puro rotolamento	108
4.9	Classificazione dei moti rigidi	114
4.10	Approfondimento 1: disco appoggiato su un piano	114
4.10.1	Puro rotolamento	117
4.11	Approfondimento 2: angoli nautici di Blagoveščenskij	119
4.12	Soluzione degli esercizi	122
5	Principio dei lavori virtuali	127
5.1	Moti possibili e moti virtuali	127
5.2	Spostamenti possibili e virtuali	128
5.3	Vincoli unilateri e spostamenti virtuali irreversibili	130
5.4	Campo degli spostamenti virtuali di un rigido	131
5.5	Gradi di mobilità di un modello meccanico	131
5.6	Vincoli piani	133
5.7	Vincoli nello spazio	135
5.8	Lavoro virtuale	137
5.8.1	Lavoro virtuale su un rigido	139
5.9	Equilibrio dei sistemi materiali	139
5.10	Principio dei lavori virtuali	140
5.11	PLV per un sistema olonomo	147
5.12	Soluzioni degli esercizi	155
6	Sollecitazioni conservative	159
6.1	Richiami sui campi di forze conservative	159
6.2	Sollecitazione conservativa	162
6.3	Energia potenziale di una molla	166
6.3.1	Molle lineari interne	166
6.3.2	Molle lineari esterne	166
6.3.3	Molle Angolari	168
6.4	Energia potenziale ed equilibri	169
6.5	Criterio statico di stabilità	170
6.6	Soluzione degli esercizi	179
7	Forze applicate su un rigido	183
7.1	Insiemi di forze equivalenti su un rigido	183
7.2	Insiemi elementari di forze su un rigido	184
7.2.1	Singola forza	184
7.2.2	Coppia	185
7.2.3	Torsore	185
7.2.4	Insieme nullo o equilibrato	186
7.3	Caso generale	186

7.4	Insiemi di forze a risultante equivalente	188
7.4.1	Forze complanari.	188
7.4.2	Forze concorrenti	189
7.4.3	Forze parallele	190
7.5	Proprietà del centro G delle forze parallele	192
8	Equazioni cardinali della statica	201
8.1	Classificazione delle sollecitazioni	201
8.2	Sollecitazioni interne	203
8.2.1	Sollecitazione interne in un rigido	203
8.3	Equazioni cardinali della statica dei sistemi	204
8.4	Sollecitazione reattiva su un rigido	206
8.4.1	Vincoli piani non dissipativi	207
8.4.2	Vincoli spaziali non dissipativi	211
8.5	Problemi della statica dei modelli	213
9	Sollecitazioni interne in un rigido in equilibrio	221
9.1	Azioni interne in un rigido 3D in equilibrio	221
9.2	Azioni interne in un rigido 2D in equilibrio	223
9.3	Azioni interne in rigido 1D in equilibrio	225
9.4	Azioni interne in archi e aste “scariche” in equilibrio	226
9.5	Osservazioni sui fili	227
9.6	Calcolo di azioni interne in un rigido monodimensionale	228
9.6.1	Approfondimento: diagrammi delle azioni interne	230
10	Statica dei modelli articolati	233
10.1	Biella-manovella	233
10.2	Arco a 3 cerniere	237
10.3	Esempio di problema inverso	241
10.3.1	Equazioni Cardinali della Statica	241
10.3.2	Equazione pura di equilibrio	245
10.4	Soluzione del Quiz 10.1	246
11	Equazioni Cardinali della Dinamica	247
11.1	Principio di D'Alembert	247
11.1.1	I Equazione Cardinale della Dinamica	247
11.1.2	II Equazione Cardinale della Dinamica	248
11.2	Equazione dell'energia cinetica	249
11.3	Statica e Dinamica relativa del punto materiale	250
11.4	Statica e Dinamica relativa dei modelli meccanici	254
12	Operatore d'inerzia per un Rigido	265
12.1	Momento angolare per i rigidi	265
12.2	Energia cinetica di un rigido	267
12.3	Operatore d'inerzia per un rigido	267
12.4	Matrice d'inerzia nel caso piano	270
12.5	Ellissoide d'inerzia	271

12.6	Assi principali d'inerzia	275
12.7	Variazione con il polo dell'operatore d'inerzia	283
12.8	Assi principali d'inerzia centrali	285
13	Statica e Dinamica dei Rigidi	289
13.1	Equazioni Cardinali della Statica per un Rigido	289
13.2	Equazioni Cardinali della Dinamica per un Rigido	291
13.3	Moto rigido piano	293
13.4	Rigido con asse fisso	294
13.5	Moti particolari di un rotore	300
13.6	Rigido con punto fisso	302
13.6.1	Moto per inerzia	305
13.6.2	Effetti giroscopici elementari	311
13.6.3	Tendenza al parallelismo	313
13.6.4	Tenacia dell'asse giroscopico	313
13.7	Disco appoggiato su una guida fissa	314
14	Equazioni di Lagrange	325
14.1	Equazioni di Lagrange non conservative	325
14.2	Equazioni di Lagrange conservative	328
14.3	Equazioni di Lagrange in forma mista	328
14.4	Struttura dell'energia cinetica di un sistema olonomo	332
14.5	Struttura delle equazioni di Lagrange	335
14.6	Integrali primi per i sistemi olonomi	337
14.7	Macchine semplici	339
15	Linearizzazione delle equazioni di Lagrange	341
15.1	Modelli con un grado di libertà	341
15.2	Modelli con l gradi di libertà	345
15.3	Sistemi di eq. di Lagrange lineari	348
15.3.1	Modelli lineari con l gradi di libertà	350
15.4	Costruzione delle coordinate normali	357
16	Bibliografia	365