

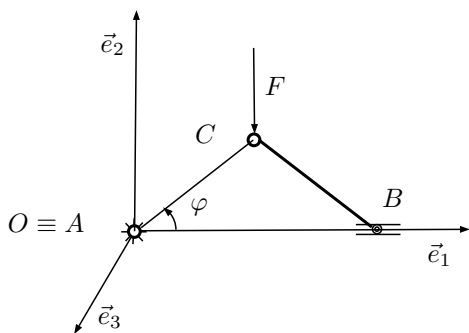
Capitolo 10

Statica dei modelli articolati

I modelli articolati sono sistemi materiali formati da più componenti rigide vincolate tra loro (ad es. con cerniere, carrelli, pattini, etc). Vedremo ora come si utilizzano le ECS per risolvere i problemi di statica per i modelli suddetti.

10.1 Biella-manovella

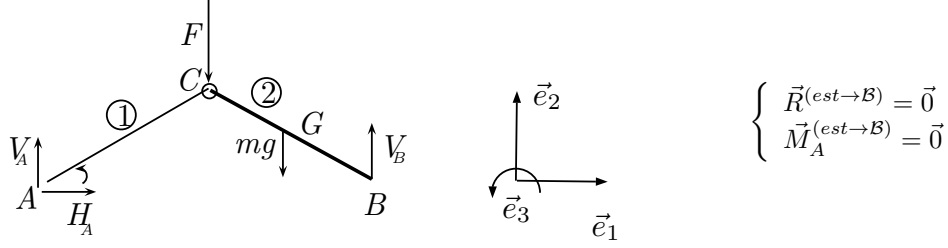
Consideriamo il modello biella-manovella costruito a pag. 49 con due aste, una cerniera esterna fissa, una cerniera interna e un appoggio.



Piano verticale, biella di massa m e manovella di massa trascurabile, vincoli lisci e bilateri.
 $\overline{AC} = \overline{BC} = L$

Come abbiamo già visto, il modello ha 1 grado di libertà, quindi è ipostatico, e due configurazioni a vincoli inefficaci: $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$. Cerchiamo eventuali configurazioni di equilibrio. Tenendo conto che tutte le forze attive sono nel piano (x, y) , possiamo concludere a priori che, come nell'esempio 8.6.1, le reazioni vincolari giacciono tutte nello stesso piano e che il momento delle reazioni avrà soltanto una componente lungo $\vec{e}_3$. Quindi, possiamo considerare da subito il sistema delle ECS ridotto al piano (x, y) .

1. Applichiamo le ECS a tutto il modello $\mathcal{B}$



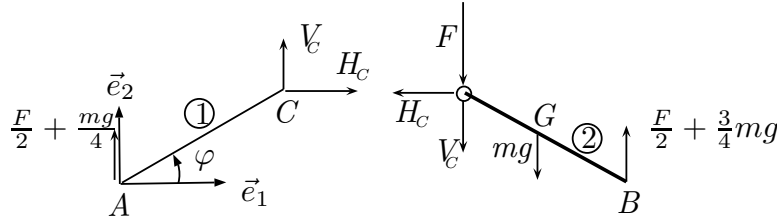
$$(10.1.1) \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - F - mg + V_B = 0 \\ -FL \cos \varphi - mg \frac{3}{2}L \cos \varphi + 2LV_B \cos \varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B = F + mg \\ V_B \cos \varphi = (\frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg) \cos \varphi \end{cases}$$

Se $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi \neq 0$, quindi il sistema (1.1.1) ha come unica soluzione (H_A, V_A, V_B) :

$$(10.1.2) \quad H_A = 0, \quad V_A = \frac{F}{2} + \frac{mg}{4}, \quad V_B = \frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg$$

Si osservi che le ECS, applicate all'intero modello, forniscono le reazioni vincolari esterne, ma non danno nessuna informazione sulle configurazioni di equilibrio.

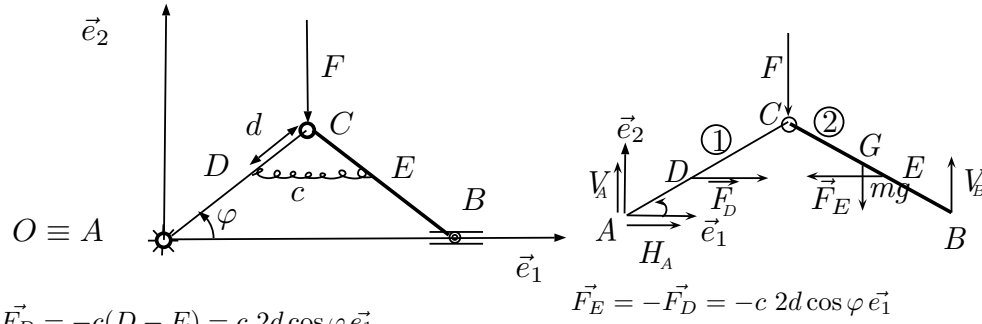
Possiamo ora concludere che il modello è in equilibrio $\forall \varphi (\neq \pm \frac{\pi}{2})$ con le reazioni vincolari (1.1.2)? Naturalmente no, basta effettuare un esperimento. Ma allora dove sta l'errore? L'errore sta nel fatto che le ECS sono sufficienti a garantire l'equilibrio di un modello se questo è rigido; in presenza di un modello articolato, invece, diventano sufficienti se sono soddisfatte per *ogni* componente rigida del sistema. Disegniamo il diagramma delle forze esterne agenti su *ogni* componente rigida del modello.



Consideriamo, ad esempio, l'asta 1. È chiaro che la II ECS applicata all'asta 1, con polo in C, non è mai soddisfatta (se $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$) poiché

$$(10.1.3) \quad \vec{M}_C^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} = (A - C) \times (\frac{F}{2} + \frac{mg}{4})\vec{e}_2 \neq \vec{0} \Rightarrow \text{Nessun equilibrio}$$

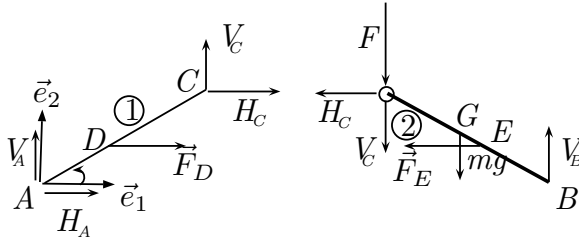
Dunque, se vogliamo che il modello ammetta qualche configurazione di equilibrio e quindi la (1.1.3) sia soddisfatta, dobbiamo aggiungere un vincolo o una forza. Ad esempio, colleghiamo con una molla di costante elastica c , due punti delle due aste come in figura



Considerando il nuovo sistema, le ECS su tutto il modello non cambiano poiché le forze esercitate dalla molla sono interne (coppia a braccio nullo). Quindi, se il modello ammette configurazioni di equilibrio, le reazioni vincolari esterne coincidono con le (1.1.2)

$$(10.1.4) \quad H_A = 0, \quad V_A = \frac{F}{2} + \frac{mg}{4}, \quad V_B = \frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg$$

Scomponendo il modello si ha il seguente diagramma:



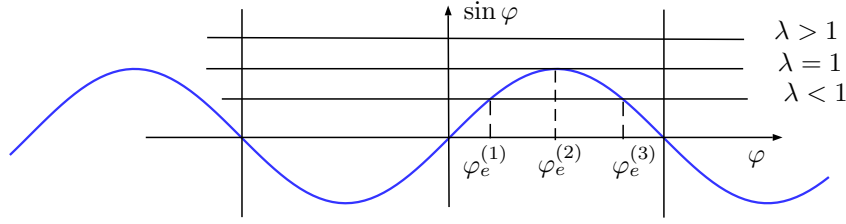
Si osservi che abbiamo utilizzato il principio di azione e reazione tra i due estremi C delle due aste.

Applicando le ECS alla sola asta 1 e tenendo conto delle (1.1.4) si ottiene

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1 & \left\{ \begin{aligned} 2cd \cos \varphi + H_C &= 0 \\ \frac{F}{2} + \frac{mg}{4} + V_C &= 0 \\ -\left(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}\right)L \cos \varphi + 2cd \cos \varphi \, d \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Dunque abbiamo un sistema sulle 3 incognite (φ, H_C, V_C) , che equivale a

$$\begin{cases} H_C = -2cd \cos \varphi \\ V_C = -\left(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}\right) \\ \sin \varphi = \frac{(2F+mg)L}{8cd^2} = \lambda > 0 \end{cases}$$



Le configurazioni di equilibrio sono:

$$\begin{aligned}
 &\text{se } \lambda > 1 \quad \text{nessuna} \\
 &\text{se } \lambda = 1 \quad \varphi_e^{(2)} = \frac{\pi}{2} \quad \text{vincoli inefficaci} \\
 &\text{se } \lambda < 1 \quad \varphi_e^{(1)} = \arcsin \lambda, \quad \cos \varphi_e^{(1)} = \sqrt{1 - \lambda^2}, \\
 &\quad \varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(1)} \quad \cos \varphi_e^{(3)} = -\sqrt{1 - \lambda^2}
 \end{aligned}$$

Quindi, le reazioni vincolari all'equilibrio sono:

$$\begin{aligned}
 &\text{se } \lambda < 1, \quad \varphi_e^{(1)} = \arcsin \lambda, \quad H_C = -2cd\sqrt{1 - \lambda^2}, \quad V_C = -\left(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}\right) \\
 &\quad \varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(1)}, \quad H_C = 2cd\sqrt{1 - \lambda^2}, \quad V_C = -\left(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Se ora applico le ECS all'asta 2 ottengo

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{M}_C^{(est \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -H_C - 2cd \cos \varphi_e = 0 \\ -F - V_C - mg + V_B = 0 \\ -2cd \cos \varphi_e d \sin \varphi_e - mg \frac{L}{2} \cos \varphi_e + V_B L \cos \varphi_e = 0 \end{cases}$$

Tale sistema non contiene nuove incognite, ma è dipendente dalle equazioni precedenti. Quindi, deve essere identicamente soddisfatto, come si verifica facilmente. In conclusione, esistono delle configurazioni in cui le ECS sono soddisfatte per ogni componente rigida del modello e quindi sono d'equilibrio. Esse sono:

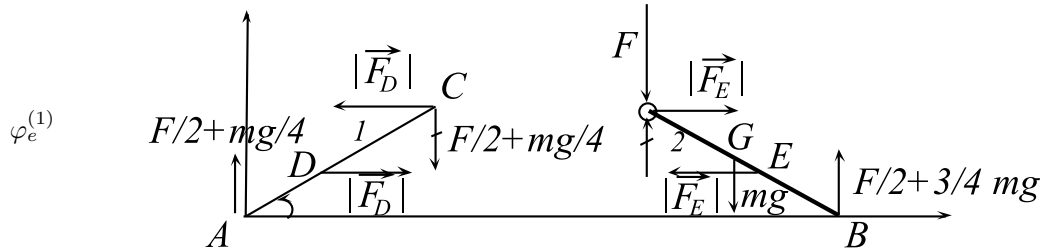
se $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\varphi_e = \pm \frac{\pi}{2}$ (vincoli inefficaci)

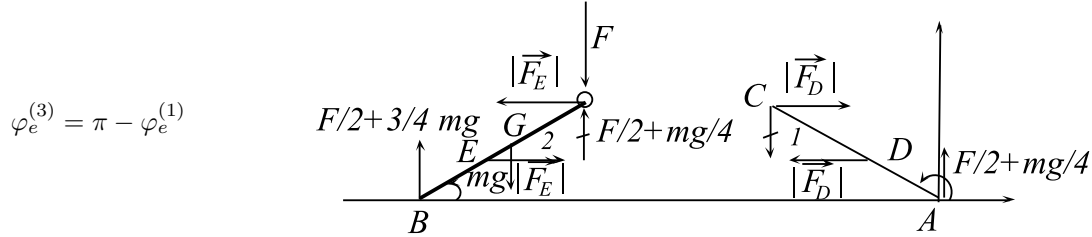
se $\lambda < 1$,

$$\varphi_e^{(1)} = \arcsin \lambda, \quad H_A = 0, \quad V_A = \frac{F}{2} + \frac{mg}{4}, \quad V_B = \frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg, \quad H_C = -2cd\sqrt{1 - \lambda^2}, \quad V_C = -\left(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}\right),$$

$$\varphi_e^{(3)} = \pi - \varphi_e^{(1)}, \quad H_A = 0, \quad V_A = \frac{F}{2} + \frac{mg}{4}, \quad V_B = \frac{F}{2} + \frac{3}{4}mg, \quad H_C = 2cd\sqrt{1 - \lambda^2}, \quad V_C = -\left(\frac{F}{2} + \frac{mg}{4}\right)$$

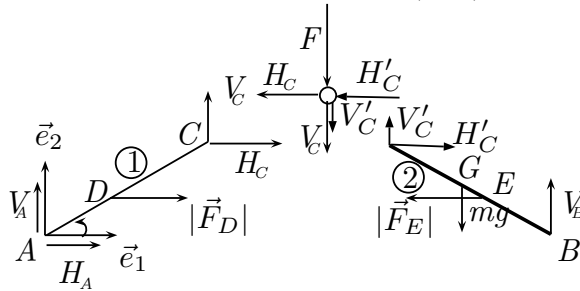
Ricapitolando, se $\lambda < 1$ il modello ammette le seguenti configurazioni d'equilibrio a vincoli efficaci:





Quiz 10.1 Calcolare le reazioni vincolari interne ed esterne per $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$.

N.B. In alcuni testi di Meccanica Razionale, i sistemi articolati vengono, a volte, scomposti in maniera più fine di quella presentata in questi appunti. Precisamente, si considerano le aste come rigide e le cerniere interne come punti (nodi). Per esempio, nel nostro problema, si avrebbe:



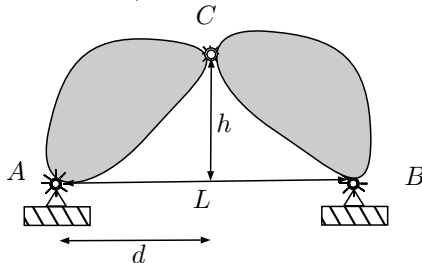
Pertanto, le incognite introdotte sono 8: $(\varphi, H_A, V_A, V_B, H_C, V_C, H'_C, V'_C)$, cioè due in più rispetto alla scomposizione delle pagine precedenti. Allora, si devono introdurre due equazioni in più, precisamente le 2 equazioni della statica per il punto C:

$$\begin{cases} -H_C - H'_C = 0 \\ -V_C - V'_C - F = 0 \end{cases}$$

Come al solito, abbiamo già utilizzato il principio di azione e reazione tra le 2 aste e il nodo C.

10.2 Arco a 3 cerniere

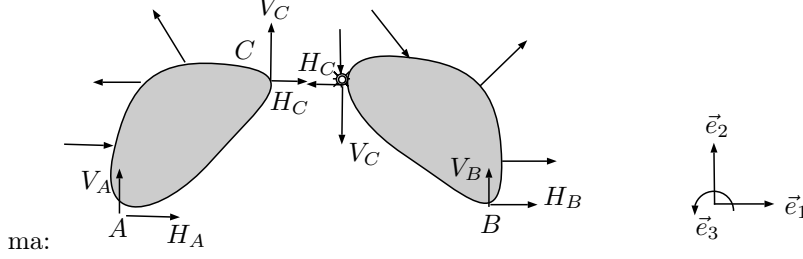
Analizzeremo ora un classico modello articolato *isostatico*. Sappiamo che, per i sistemi isostatici, il problema della statica si riduce al calcolo delle reazioni vincolari (interne ed esterne) ed, eventualmente, al calcolo delle azioni interne nelle componenti rigide del sistema.



L'arco a 3 cerniere $\mathcal{B}$ è costituito da 2 archi rigidi, ognuno vincolato a terra con una cerniera fissa e vincolati tra loro con una cerniera interna. Poiché $g = 3 \cdot 2$ e le 3 cerniere sono tutte doppie,

segue che il sistema è isostatico, tranne quando le 3 cerniere sono allineate, caso in cui i vincoli sono inefficaci (vedi pag. 33).

Supponiamo che tutte le forze siano *complanari* al piano dell'arco e consideriamone il diagram-



ma:

Dunque, le incognite sono 6: $(H_A, V_A, H_B, V_B, H_C, V_C)$. Per trovarle, scriverò un sistema di 6 equazioni lineari del tipo

$$(10.2.1) \quad B\phi = \mathcal{F}$$

dove ϕ è il vettore delle reazioni incognite $\phi = [H_A, V_A, H_B, V_B, H_C, V_C]^T$, $\mathcal{F}$ è il vettore che contiene la sollecitazione attiva e B è la matrice (6×6) dei coefficienti del sistema lineare. Precisamente, scrivendo le 3 componenti scalari delle ECS per l'equilibrio dei 2 archi rigidi si hanno 6 equazioni lineari per le 6 incognite del problema:

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{M}_A^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{M}_B^{(est \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_A + H_C + \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ V_A + V_C + \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ -H_C h + V_C d + \vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ H_B - H_C + \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ V_B - V_C + \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ H_C h + V_C (L - d) + \vec{M}_B^{(att \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases}$$

Riscrivendo il suddetto sistema nella forma (1.2.1) si trova

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h & d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & (L - d) \end{bmatrix} \quad \det B = -h L$$

e

$$\mathcal{F} = - \left[\vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1, \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2, \vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3, \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_1, \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_2, \vec{M}_B^{(att \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_3 \right]$$

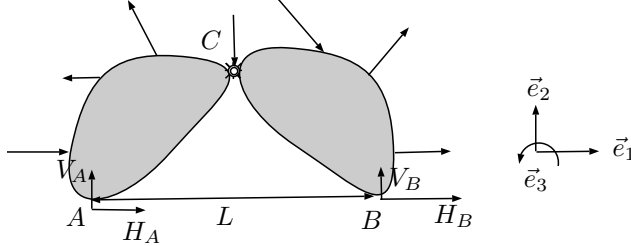
Si osservi che la matrice B dipende soltanto dalla geometria dei vincoli e non dalla sollecitazione. È chiaro che, se $\det B \neq 0$, esiste un'unica soluzione, qualunque sia il vettore $\mathcal{F}$ della sollecitazione attiva, calcolabile come

$$\phi = B^{-1} \mathcal{F}.$$

In tal caso il modello si dice staticamente determinato.

Il metodo di calcolo suddetto è molto efficiente se si implementa con un programma di calcolo automatico ma è scomodo se il calcolo se deve effettuare “a mano”, poiché si deve invertire la matrice B che ha dimensioni (6×6) . Per questo motivo daremo un cenno di un metodo di calcolo che conviene seguire se si devono fare i conti “a mano”.

1. Applico le ECS a tutto il sistema $\mathcal{B}$



$$(10.2.2) \quad \begin{cases} \vec{R}^{est \rightarrow \mathcal{B}} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{est \rightarrow \mathcal{B}} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{M}_A^{est \rightarrow \mathcal{B}} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_A + H_B + \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ V_A + V_B + \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ V_B L + \vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases}$$

Otengo, quindi, un sistema di 3 equazioni nelle 4 incognite (H_A, V_A, H_B, V_B) , cioè le reazioni vincolari esterne. Conviene risolvere la terza equazione per trovare

$$V_B = -\frac{\vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3}{L} \quad (\text{se } L \neq 0)$$

Sostituendo tale risultato nella seconda equazione si trova

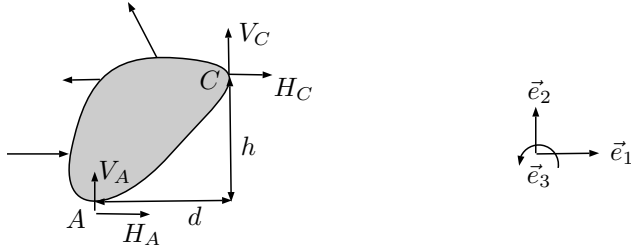
$$V_A = \frac{\vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3}{L} - \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_2$$

Infine per risolvere la prima equazione rispetto a H_B in funzione di H_A :

$$H_B = -H_A - \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_1$$

Dunque, ho trovato V_A, V_B e scritto $H_B = H_B(H_A)$.

2. Applico le ECS al rigido $\mathcal{R}_1$



$$(10.2.3) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ \vec{M}_C^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H_A + H_C + \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ V_A + V_C + \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2 = 0 \\ -V_A d + H_A h + \vec{M}_C^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \end{cases}$$

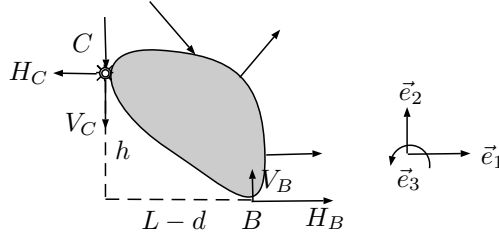
Otengo un sistema di 3 equazioni, indipendenti dalle precedenti, nelle incognite (H_A, H_C, V_C) . Se $h \neq 0$, i vincoli sono efficaci e posso risolvere la terza equazione rispetto ad H_A , la prima rispetto a H_C e la seconda rispetto a V_C .

3. Dunque, i passi 1 e 2 mi permettono di calcolare tutte le 6 incognite del problema:

$$H_A, V_A, H_B, V_B, H_C, V_C$$

$$(10.2.4) \quad \begin{cases} H_A = \frac{1}{h} \left(-\vec{M}_C^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 + \frac{d}{L} \vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3 - d \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_2 \right) \\ V_A = \frac{\vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3}{L} - \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_2 \\ H_B = \frac{\vec{M}_C^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3}{h} - \frac{d}{h} \frac{\vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3}{L} + \frac{d}{h} \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_2 - \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_1 \\ V_B = -\frac{\vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_1}{L} \\ H_C = -\vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_1 + \frac{\vec{M}_C^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3}{h} - \frac{d}{h} \frac{\vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3}{L} + \frac{d}{h} \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_2 \\ V_C = -\vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_2 - \frac{\vec{M}_A^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_3}{L} + \vec{R}^{(att \rightarrow \mathcal{B})} \cdot \vec{e}_2 \end{cases} \quad h \neq 0$$

4. Applico le ECS al rigido $\mathcal{R}_2$

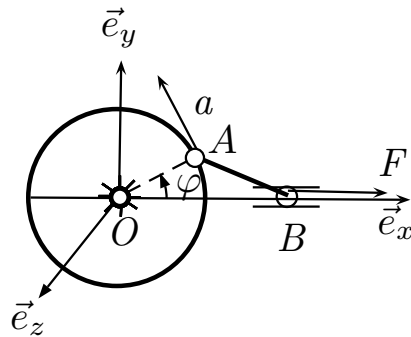


Otengo 3 equazioni dipendenti dalle precedenti. Esse devono essere identicamente soddisfatte e possono essere usate per controllare il risultato (1.2.4).

Il metodo sopra presentato consiste, quindi, nell'introdurre in passi successivi "poche" equazioni in "poche" incognite, da risolvere "passo-passo".

N.B. Se $h = 0 \Rightarrow$ le cerniere sono allineate e i vincoli inefficaci (vedi pag. 52). In tal caso, nell'ultima equazione del sistema (1.2.3) non compare l'incognita H_A . Allora, l'unione dei sistemi (1.2.2) e (1.2.3) è un sistema del tipo (1.2.1) con una matrice B non invertibile. Quindi, può avere infinite soluzioni (staticamente indeterminato) o nessuna soluzione (impossibile), a seconda della sollecitazione attiva (il vettore $\mathcal{F}$). Invece, nel caso in cui $\det B \neq 0$, esiste un'unica soluzione e il modello si dice staticamente determinato.

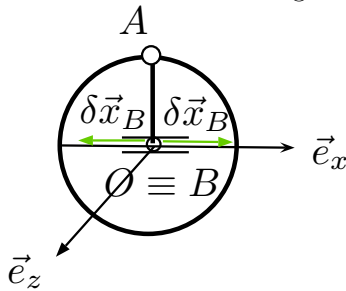
10.3 Esempio di problema inverso



Un disco omogeneo di raggio r ed un'asta di lunghezza r sono vincolati in un piano *orizzontale* con vincoli lisci, come in figura. Precisamente, il modello è costituito da 2 rigidi vincolati con una cerniera cilindrica fissa in O , una cerniera sferica interna in A e una cerniera sferica scorrevole in B . Il disco è soggetto ad una forza applicata in A , $\vec{F}_A$ tangente al disco e di modulo a .

1. Determinare la forza $\vec{F}_B = F\vec{e}_x$ da applicare in B affinché il modello sia in equilibrio nella posizione $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
2. Calcolare le reazioni vincolari esterne e interne all'equilibrio.
3. Calcolare le azioni interne nell'asta AB all'equilibrio.

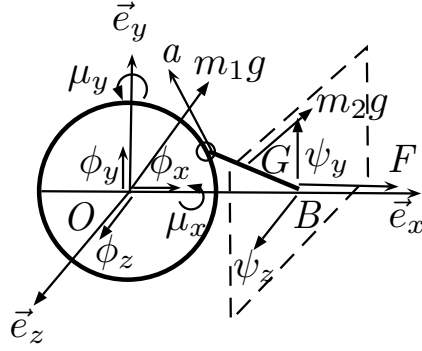
Analisi Cinematica. Con il metodo dei congelamenti successivi, si può concludere facilmente che il modello ha 1 grado di libertà, in tutte le configurazioni, tranne per $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. In tali configurazioni, infatti, anche se lo spostamento rotatorio del disco intorno all'asse $(O, \vec{e}_z)$ è congelato, la biella può effettuare comunque una rotazione *infinitesima* intorno all'asse $(A, \vec{e}_z)$, al contrario di quello che accade in tutte le altre configurazioni.



10.3.1 Equazioni Cardinali della Statica

Utilizziamo le ECS come condizione necessaria all'equilibrio nella configurazione assegnata.

1e 2 Poiché la forza peso agisce in direzione ortogonale al piano del modello, non possiamo risolvere il problema come piano ma dobbiamo considerare il modello nello spazio 3D. Disegniamo il diagramma delle sollecitazioni esterne a tutto il modello:



Quindi, considerando le forze esterne a tutto il modello, avremo, oltre all'incognita F del punto 1, anche le 7 incognite $(\phi_x, \phi_y, \phi_z, \mu_x, \mu_y, \psi_y, \psi_z)$ della sollecitazione reattiva esterna in O e in B .

Nella configurazione di equilibrio $\varphi = \frac{\pi}{6}$ devono essere necessariamente soddisfatte le ECS su tutto il modello

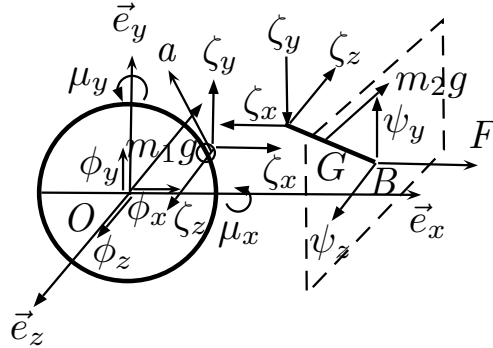
$$\begin{cases} \vec{R}^{(est \rightarrow B)} = \vec{0} \\ \vec{M}_O^{(est \rightarrow B)} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi} + m_1 \vec{g} + \vec{a} + m_2 \vec{g} + \vec{F}_B + \vec{\psi} = \vec{0} \\ \vec{\mu} + (A - O) \times \vec{a} + (G - O) \times m_2 \vec{g} + (B - O) \times (\vec{F}_B + \vec{\psi}) = \vec{0} \end{cases}$$

che, in forma scalare, si scrivono

$$(10.3.1) \quad \begin{cases} \phi_x - \frac{a}{2} + F = 0 \\ \phi_y + a \frac{\sqrt{3}}{2} + \psi_y = 0 \\ -(m_1 + m_2)g + \phi_z + \psi_z = 0 \\ \mu_x - \frac{m_2 g r}{4} = 0 \\ \mu_y + \frac{3\sqrt{3}}{4} m_2 g r - \sqrt{3} r \psi_z = 0 \\ ar + r\sqrt{3} \psi_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_x = \frac{a}{2} - F \\ \phi_y = -\frac{a}{2\sqrt{3}} \\ \phi_z + \psi_z = (m_1 + m_2)g \\ \mu_x = \frac{m_2 g r}{4} \\ \mu_y = \sqrt{3} r (\psi_z - \frac{3}{4} m_2 g) \\ \psi_y = -\frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

È ovvio che le 6 equazioni precedenti non possono risolvere il problema, che ha 8 incognite. Comunque, abbiamo iniziato a risolverle, nella logica del metodo "passo-passo".

Ora, consideriamo le ECS applicate alle singole parti rigide del modello. Compariranno, come nuove incognite, le reazioni interne in A , $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$, portando a 11 il numero totale delle incognite del problema.



Sull'asta, valgono

$$(10.3.2) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est \rightarrow asta)} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est \rightarrow asta)} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_2 \vec{g} + \vec{\psi} + \vec{F}_B - \vec{\zeta} = \vec{0} \\ (G - A) \times m_2 \vec{g} + (B - A) \times (\vec{F}_B + \vec{\psi}) = \vec{0} \end{cases}$$

e sul disco

$$(10.3.3) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est \rightarrow disco)} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(est \rightarrow disco)} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\phi} + m_1 \vec{g} + \vec{a} + \vec{\zeta} = \vec{0} \\ \vec{\mu} + (O - A) \times (m_1 \vec{g} + \vec{\phi}) = \vec{0} . \end{cases}$$

Il sistema delle (1.3.2) si scrive come 6 equazioni scalari, che permettono di trovare tutte le incognite residue:

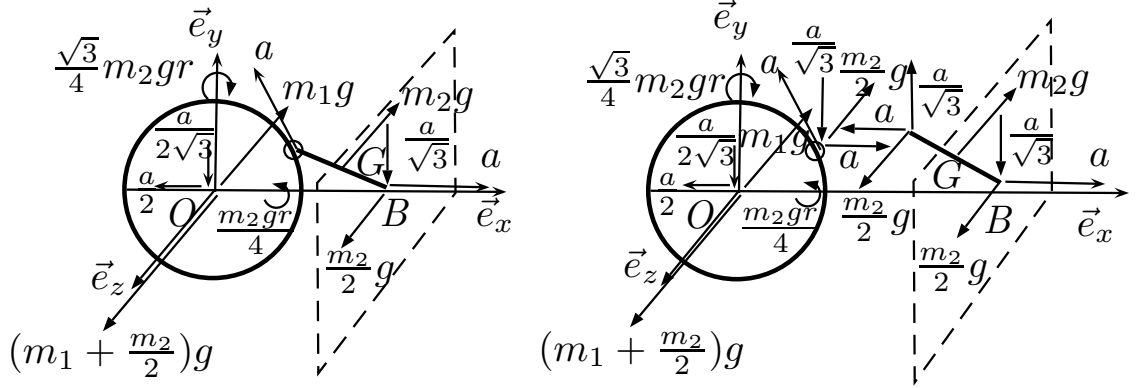
$$\begin{cases} -\zeta_x + F = 0 \\ -\zeta_y + \psi_y = 0 \\ -\zeta_z - m_2 g + \psi_z = 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m_2 g}{2} r - r \psi_z \right) = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{m_2 g}{2} r - r \psi_z \right) = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} r \psi_y + \frac{r}{2} F = 0 \end{cases} \stackrel{(1.3.1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \zeta_x = F = a \\ \zeta_y = \psi_y = -\frac{a}{\sqrt{3}} \\ \zeta_z = \psi_z - m_2 g = -\frac{m_2 g}{2} \\ \psi_z = \frac{m_2 g}{2} \\ F = -\sqrt{3} \psi_y = a \end{cases}$$

Sostituendo tali risultati nelle Eq. (1.3.1) si trova una sola soluzione del problema:

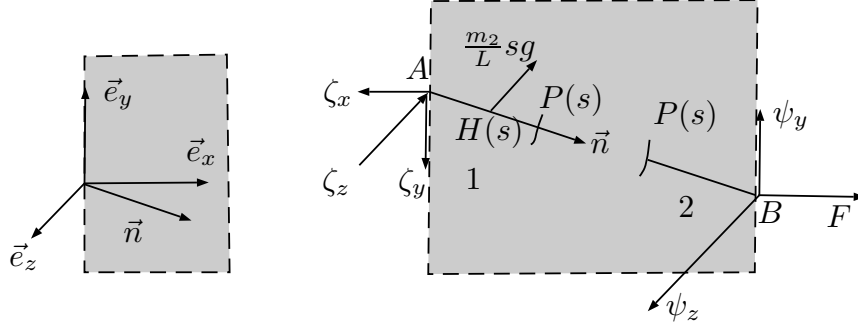
$$\begin{aligned} F = a, \quad \phi_x = -\frac{a}{2}, \quad \phi_y = -\frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad \phi_z = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)g, \quad \mu_x = \frac{m_2 g r}{4}, \quad \mu_y = -\frac{\sqrt{3}}{4} m_2 g r, \\ \psi_y = -\frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \psi_z = \frac{m_2 g}{2}, \quad \zeta_x = a, \quad \zeta_y = -\frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \zeta_z = -\frac{m_2 g}{2}, \end{aligned}$$

Il sistema delle (1.3.3) si può utilizzare per verificare la soluzione trovata,

$$\begin{cases} \phi_x + \zeta_x - \frac{a}{2} = 0 \\ \phi_y + \zeta_y + a \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \phi_z + \zeta_z - m_1 g = 0 \\ -\frac{r}{2} (-m_1 g + \phi_z) + \mu_x \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r (m_1 g - \phi_z) + \mu_y \\ \frac{r}{2} \phi_x - \frac{\sqrt{3}}{2} r \phi_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} + a - \frac{a}{2} = 0 \\ -\frac{a}{2\sqrt{3}} + \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) + \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)g - \frac{m_2 g}{2} - m_1 g = 0 \\ -\frac{r}{2} (-m_1 g + (m_1 + \frac{m_2}{2})g) + \frac{m_2 g r}{4} = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} r (m_1 g - (m_1 + \frac{m_2}{2})g) - \frac{\sqrt{3}}{4} m_2 g r = 0 \\ -\frac{r}{2} \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} r \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}}\right) = 0 \end{cases}$$



- 3 Azioni interne nell'asta AB . Sezionando l'asta in un punto interno $P(s)$, teniamo conto del carico distribuito dovuto alla forza peso sul primo tratto dell'asta.



Allora, in condizioni di equilibrio, devono valere le ECS seguenti

$$(10.3.4) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} + \vec{R}^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)} = \vec{0} \\ \vec{M}_P^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} + \vec{M}_P^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\vec{\zeta} + \frac{m_2}{L} s \vec{g} + \vec{R}^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)} = \vec{0} \\ (A - P) \times (-\vec{\zeta}) + (H - P) \times \frac{m_2}{L} s \vec{g} + \vec{M}_P^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)} = \vec{0} \end{cases}$$

Dunque, il risultante e il momento risultante delle azioni interne sono

$$(10.3.5) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)}(s) = \vec{\zeta} - \frac{m_2}{L} s \vec{g} = a \vec{e}_x - \frac{a}{\sqrt{3}} \vec{e}_y - m_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{L} \right) g \vec{e}_z \\ \vec{M}_P^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)}(s) = (A - P) \times \vec{\zeta} - (H - P) \times \frac{m_2}{L} s \vec{g} = \frac{m_2}{4} g \left(\frac{s^2}{L} - s \right) (\vec{e}_x + \sqrt{3} \vec{e}_y) \end{cases}$$

Allora, poiché $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x - \frac{1}{2} \vec{e}_y$, l'azione normale e quella di taglio risultano

$$(10.3.6) \quad N = \vec{R}^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{n} = a \vec{e}_x \cdot \vec{n} - \frac{a}{\sqrt{3}} \vec{e}_y \cdot \vec{n} - m_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{L} \right) g \vec{e}_z \cdot \vec{n} = \frac{2}{\sqrt{3}} a$$

$$(10.3.7) \quad \vec{T} = \vec{R}^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)} - N \vec{n} = a \vec{e}_x - \frac{a}{\sqrt{3}} \vec{e}_y - m_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{L} \right) g \vec{e}_z - \frac{2}{\sqrt{3}} a \vec{n}$$

Tenendo conto che $\vec{n} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_x - \vec{e}_y)$, risulta che

$$(10.3.8) \quad \vec{T} := -m_2\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{L}\right)g\vec{e}_z ,$$

quindi la forza di taglio è tutta ortogonale al piano. Inoltre, il momento torcente si annulla poichè

$$(10.3.9) \quad M_t(s) := \vec{M}_P^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)}(s) \cdot \vec{n} = \frac{m_2}{4}g\left(\frac{s^2}{L} - s\right)(\vec{e}_x \cdot \vec{n} + \sqrt{3}\vec{e}_y \cdot \vec{n}) = 0 ,$$

quindi il momento flettente risulta

$$(10.3.10) \quad \vec{M}_f(s) := \vec{M}_P^{(int, \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1)}(s) - \mathcal{M}_t(s)\vec{n} = \frac{m_2}{4}g\left(\frac{s^2}{L} - s\right)(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_y) .$$

Dunque, l'azione normale (di trazione) è uniforme lungo l'asta, il taglio, tutto parallelo a $\vec{e}_z$, dipende linearmente dall'ascissa curvilinea s e il momento flettente, tutto giacente nel piano (x, y) , dipende in modo quadratico da s .

10.3.2 Equazione pura di equilibrio

Poiché in questo problema i vincoli sono fissi, non dissipativi e bilateri, il punto 1 si può risolvere anche, e in modo più immediato, con il PLV e, in particolare, con un'equazione pura di equilibrio. Infatti, basta imporre che l'unica componente lagrangiana della sollecitazione attiva si annulli nella configurazione di equilibrio assegnata

$$(10.3.11) \quad Q_{\varphi|_{\varphi=\frac{\pi}{6}}} = 0 .$$

Calcoliamo la Q_φ , scrivendo il lavoro virtuale della sollecitazione attiva

$$(10.3.12) \quad LV^{(att)} = \vec{F}_A \cdot \delta\vec{x}_A + \vec{F}_B \cdot \delta\vec{x}_B + m_1\vec{g} \cdot \delta\vec{x}_O + m_2\vec{g} \cdot \delta\vec{x}_G$$

e osservando che il lavoro virtuale del peso del disco si annulla poichè il suo baricentro O è fisso, mentre il lavoro virtuale del peso dell'asta si annulla poichè lo spostamento virtuale del suo baricentro G è ortogonale a $\vec{e}_z$. Allora,

$$\begin{aligned} \vec{x}_A &= r\vec{e}_r , & \delta\vec{x}_A &= r\delta\varphi\vec{e}_\varphi \\ \vec{x}_B &= 2r\cos\varphi\vec{e}_x , & \delta\vec{x}_B &= -2r\sin\varphi\delta\varphi\vec{e}_x , \end{aligned}$$

quindi

$$(10.3.13) \quad Q_\varphi = a\vec{e}_\varphi \cdot r\delta\varphi\vec{e}_\varphi + F\vec{e}_x \cdot (-2r\sin\varphi\delta\varphi\vec{e}_x) = r(a - 2F\sin\varphi)\delta\varphi$$

Dunque,

$$Q_{\varphi|_{\varphi=\frac{\pi}{6}}} = r(a - F)$$

da cui la soluzione $F = a$.

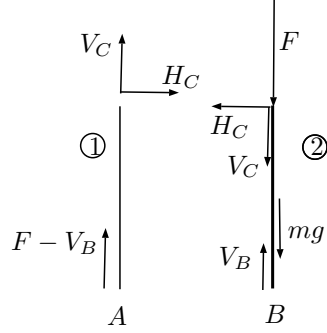
Comunque, per risolvere i punti 2 e 3 dobbiamo ricorrere alle ECS, poichè il PLV, almeno nella forma da noi studiata, prescinde dal lavoro virtuale delle reazioni vincolari.

10.4 Soluzione del Quiz 10.1

Se $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, cioè se i vincoli sono inefficaci, il sistema biella-manovella (1.1.1) ha infinite soluzioni

$$H_A = 0, V_A = F + mg - V_B, V_B = \text{qualunque}.$$

Inoltre,



$$\begin{aligned} \text{asta 1} \quad & \begin{cases} \vec{M}_C^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ H_C = 0 \\ mg + F - V_B + V_C = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{M}_C^{(est \rightarrow \mathcal{R}_1)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ H_C = 0 \\ V_C = V_B - F - mg \end{cases} \\ \text{asta 2} \quad & \begin{cases} \vec{M}_C^{(est \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ H_C = 0 \\ -F - V_C - mg + V_B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{M}_C^{(est \rightarrow \mathcal{R}_2)} \cdot \vec{e}_3 = 0 \\ H_C = 0 \\ V_C = V_B - F - mg \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi, poiché V_B è indeterminata, il problema è staticamente indeterminato.