

# Capitolo 4

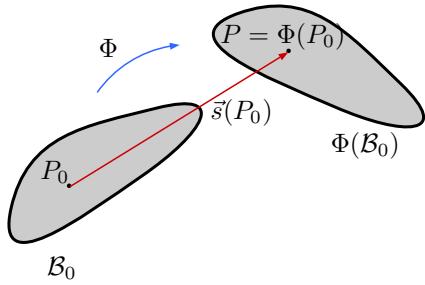
## Cinematica dei Rigidi

In questo capitolo, presentiamo una descrizione geometrica del moto di un rigido come caso particolare della più generale cinematica di un modello continuo deformabile.

### 4.1 Cenni di Cinematica dei Modelli Continui

Un modello continuo, solido o fluido, può essere modellizzato dalla chiusura  $\mathcal{B}_0$  di un insieme aperto dello spazio affine euclideo tridimensionale  $\mathcal{E}_3$  (con un bordo regolare a tratti) che può cambiare forma e posizione in  $\mathcal{E}_3$ . Quindi, può essere descritto nel modo seguente.

**Definizione 4.1.1.** Diremo piazzamento o configurazione (o deformazione in Scienza delle Costruzioni) del modello, un'applicazione  $\Phi : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3$  che soddisfi le seguenti proprietà:



Notazioni:

- $\mathcal{B}_0$ , configurazione di riferimento
- $\Phi(\mathcal{B}_0)$ , piazzamento del continuo
- $P_0$ , punto materiale
- $P = \Phi(P_0)$ , punto spaziale
- $\vec{s}(P_0) = P - P_0$ , spostamento di  $P_0$
- $\{P_0, \vec{s}(P_0)\}_{P_0 \in \mathcal{B}_0}$ , spostamento del continuo

1. sia iniettiva, affinchè rispetti l'impenetrabilità dei corpi;
2. sia regolare, affinchè rispetti la continuità della materia;
3. abbia Jacobiano strettamente positivo, affinchè conservi l'orientazione dei volumi.

Tali condizioni assicurano l'esistenza dell'applicazione inversa

$$\Phi^{-1} : \Phi(\mathcal{B}_0) \rightarrow \mathcal{B}_0$$

con le stesse proprietà di  $\Phi$ .

**Definizione 4.1.2.** Chiameremo *moto del continuo o flusso* (dipendente dal tempo) una famiglia ad un parametro di piazzamenti del sistema

$$\Phi : I \times \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3, (t, P_0) \mapsto P = \Phi(t, P_0) ,$$

dove  $I = [t_0, t_1]$  è l'intervallo degli istanti di tempo, che supporremo contenga l'istante  $t = 0$ . Richiederemo che l'applicazione parziale ottenuta

1. fissando il tempo  $t$ ,  $\Phi_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3, \Phi_t(P_0) := \Phi(t, P_0)$  sia un piazzamento del modello all'istante  $t$ . Le immagini  $\mathcal{B}_{t_0} = \Phi_{t_0}(\mathcal{B}_0)$ ,  $\mathcal{B}_t = \Phi_t(\mathcal{B}_0)$ ,  $\mathcal{B}_{t_1} = \Phi_{t_1}(\mathcal{B}_0)$ , saranno chiamate, rispettivamente, configurazione iniziale, attuale, finale del continuo. Per semplicità di descrizione, prenderemo la configurazione iniziale coincidente con quella di riferimento. Dunque,

$$(4.1.1) \quad \Phi_{t_0}(\mathcal{B}_0) \equiv \mathcal{B}_0 \Rightarrow \Phi_{t_0} = \mathbb{1}_{\mathcal{B}_0} .$$

Inoltre, richiederemo che l'applicazione parziale ottenuta

2. fissando il punto  $P_0$ ,  $\Phi_{P_0} : I \rightarrow \mathcal{E}_3, \Phi_{P_0}(t) := \Phi(t, P_0)$  sia di classe  $C^2$  a tratti. Essa rappresenta il moto della particella  $P_0$  nell'intervallo  $I$ . La traiettoria  $\cup_{t \in I} \Phi_{P_0}(t)$  del punto materiale  $P_0$  è detta linea di corrente (in inglese pathline) di  $P_0$ .

L'applicazione  $\vec{s}(t, P_0) := P(t) - P_0$  sarà detta *spostamento* di  $P_0$  all'istante  $t$ .

Il vettore

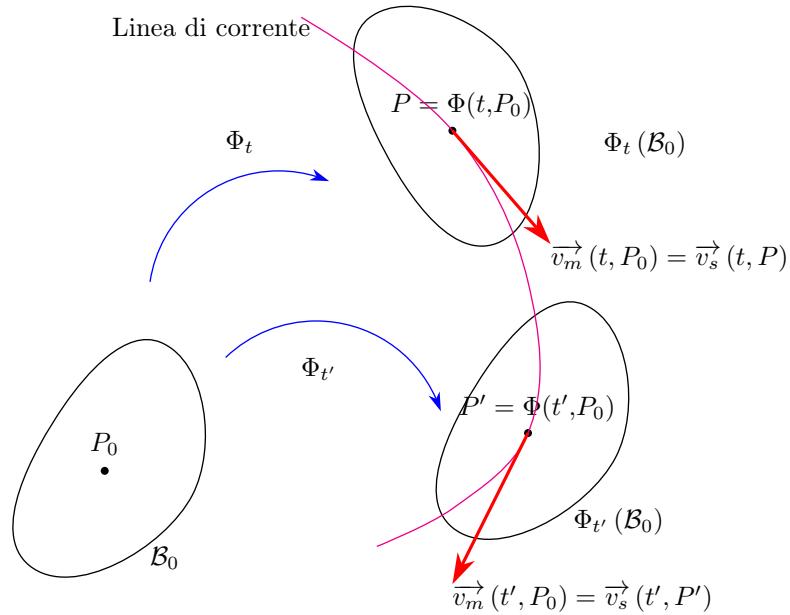
$$(4.1.2) \quad \vec{v}_m(t, P_0) = \frac{d\Phi_{P_0}}{dt}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, P_0)$$

sarà detto *velocità materiale* (o *lagrangiana*) del punto materiale  $P_0$ , mentre lo stesso vettore espresso in funzione del punto spaziale  $P$

$$(4.1.3) \quad \vec{v}_s(t, P) := \vec{v}_m(t, P_0 = \Phi_t^{-1}(P))$$

sarà detto *velocità spaziale* (o *euleriana*) e, al variare di  $P$  definisce il campo della velocità spaziale dei punti del continuo ad un istante  $t$ . Il vettore  $\vec{v}_m(t, P_0)$  è tangente alla linea di corrente di  $P_0$  nel punto  $P(t)$  all'istante  $t$ , quindi si può pensare come un vettore applicato in  $P(t)$ . Invece, le curve tangenti al campo di velocità spaziale  $\vec{v}_s(t, P)$ , ad un istante fissato  $t$ , sono dette linee di *flusso* (in inglese *streamlines*). Si può dimostrare che le linee di flusso coincidono con quelle di corrente se il moto è *stazionario*, cioè se il campo di velocità spaziale è indipendente dal tempo. A questo proposito si veda [Levi-Civita, Compendio di Meccanica Razionale, parte II, pag. 241.]

Tuttavia, non vale il viceversa, come vedremo nel caso del moto rotatorio non uniforme.



## 4.2 Moti rigidi

**Definizione 4.2.1.** Chiameremo moto rigido un flusso che preserva le distanze tra ogni coppia di punti del modello,

$$(4.2.1) \quad d(\Phi_t(P_0), \Phi_t(Q_0)) = d(P_0, Q_0) \quad \forall t \in I, \quad \forall P_0, Q_0 \in \mathcal{B}_0,$$

dove la distanza (euclidea) tra due punti qualsiasi  $P, Q \in \mathcal{E}_3$ , è definita tramite il prodotto scalare in  $E_3$

$$(4.2.2) \quad d(P, Q) = |P - Q| = \sqrt{(P - Q) \cdot (P - Q)}.$$

Quindi, la (4.2.1) si scrive

$$(4.2.3) \quad |\Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0)| = |P_0 - Q_0| \quad \forall t \in I, \quad \forall P_0, Q_0 \in \mathcal{B}_0.$$

**Lemma 2.** Sia  $(V, \cdot)$  uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e  $F : V \rightarrow V$  un operatore che soddisfa le proprietà.

$$i) \quad F(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$ii) \quad |F(\vec{u}) - F(\vec{v})| = |\vec{u} - \vec{v}| \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Allora,  $F$  è lineare ed ortogonale.

*Dimostrazione.* Se nella ii) scelgo  $\vec{v} = \vec{0}$ , grazie alla i) segue che

$$(4.2.4) \quad |F(\vec{u})| = |\vec{u}| \quad \forall \vec{u} \in V,$$

cioè  $F$  preserva i moduli dei vettori. In più, confrontando ambo i lati della *ii)* scritti tramite il prodotto scalare

$$\begin{aligned}|F(\vec{u}) - F(\vec{v})|^2 &= (F(\vec{u}) - F(\vec{v})) \cdot (F(\vec{u}) - F(\vec{v})) = |F(\vec{u})|^2 - 2F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) + |F(\vec{v})|^2 \stackrel{(4.2.4)}{=} |\vec{u}|^2 - 2F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) + |\vec{v}|^2 \\|\vec{u} - \vec{v}|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2,\end{aligned}$$

risulta, più in generale

$$(4.2.5) \quad F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3,$$

cioè  $F$  preserva anche il prodotto scalare. Utilizzando la (4.2.4) e la (4.2.5) è facile dimostrare che lo scalare

$$\begin{aligned}|F(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) - \lambda F(\vec{u}) - \mu F(\vec{v})|^2 &= |F(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})|^2 + \lambda^2|F(\vec{u})|^2 + \mu^2|F(\vec{v})|^2 + \\&\quad - 2\lambda F(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot F(\vec{u}) - 2\mu F(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot F(\vec{v}) + 2\lambda\mu F(\vec{u}) \cdot F(\vec{v}) = \\&= |\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}|^2 + \lambda^2|\vec{u}|^2 + \mu^2|\vec{v}|^2 - 2\lambda(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{u} - 2\mu(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{v} + 2\lambda\mu\vec{u} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

è nullo. Segue immediatamente la linearità dell'operatore  $F$  e dalla (4.2.5) la sua ortogonalità.  $\square$

**N.B.** Da ora in poi, accanto ai punti materiali del rigido  $\mathcal{B}_0$ , considereremo anche i punti del suo insieme complementare, immaginando il rigido esteso a tutto lo spazio  $\mathcal{E}_3$ , che si chiamerà lo *spazio solidale* al rigido. Quindi, da ora in poi

$$\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{E}_3$$

in modo che

$$\Phi_t^{-1} : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3.$$

**Proposizione 4.2.1.** *Ogni piazzamento  $\Phi_t : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$  di un moto rigido è un'isometria affine propria (o diretta), cioè,  $\forall t \in I$ , esiste un'unica trasformazione lineare  $\hat{\Phi}_t : E_3 \rightarrow E_3$ , associata a  $\Phi_t$ , che preserva la struttura affine*

$$(4.2.6) \quad \Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0) = \hat{\Phi}_t(P_0 - Q_0) \quad \forall t \in I \quad \forall P_0, Q_0 \in \mathcal{B}_0,$$

che è ortogonale rispetto al prodotto scalare ed è unimodulare, cioè  $\det(\hat{\Phi}_t) = 1$ . Inoltre, lo spostamento rigido relativo a qualunque sotto-intervallo  $[t_0, t] \subset I$ , soddisfa la proprietà

$$(4.2.7) \quad \vec{s}(t, P_0) = (\Phi_t(Q_0) - P_0) + \hat{\Phi}_t(P_0 - Q_0) \quad \forall Q_0 \in \mathcal{E}_3$$

*Dimostrazione.* Fissiamo ad arbitrio un punto  $O_0 \in \mathcal{E}_3$ , che chiameremo centro di riduzione e, per ogni vettore  $\vec{v}$  di  $E_3$ , consideriamo il punto corrispondente  $P_0 := O_0 + \vec{v}$  e l'applicazione  $\hat{\Phi}_t : E_3 \rightarrow E_3$  così definita

$$\hat{\Phi}_t(\vec{v}) = \hat{\Phi}_t(P_0 - O_0) := \Phi_t(P_0) - \Phi_t(O_0),$$

dove  $\Phi_t : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$  sono i piazzamenti del moto rigido considerato. L'applicazione  $\hat{\Phi}_t$  gode delle proprietà:

$$\text{i) } \hat{\Phi}_t(\vec{0}) = \Phi_t(O_0) - \Phi_t(O_0) = \vec{0}$$

ii) per ogni  $Q_0 \in \mathcal{E}_3$ , sia  $\vec{w} = Q_0 - O_0$ . Allora,

$$\begin{aligned} |\hat{\Phi}_t(\vec{v}) - \hat{\Phi}_t(\vec{w})| &= |(\Phi_t(P_0) - \Phi_t(O_0)) - (\Phi_t(Q_0) - \Phi_t(O_0))| = \\ &= |\Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0)| \stackrel{(4.2.3)}{=} |P_0 - Q_0| = |(P_0 - O_0) + (O_0 - Q_0)| = |\vec{v} - \vec{w}| \end{aligned}$$

Pertanto, per il Lemma 2, l'applicazione  $\hat{\Phi}_t$  è lineare ed ortogonale, quindi il suo determinante può essere  $\pm 1$ . Inoltre, poiché lo Jacobiano di un piazzamento  $\Phi_t$  è positivo per l'ipotesi 3 della definizione 4.1.1, per la (2.2.5) esso coincide con il determinante di  $\hat{\Phi}_t$ ; allora, segue che il determinante di  $\hat{\Phi}_t$  è sempre pari a 1. Resta da verificare che la  $\hat{\Phi}_t$  non dipende dalla scelta del centro di riduzione  $O_0$ . Infatti, se sceglieremo un altro punto  $O'_0 = O_0 + \vec{u}$ , detto  $R_0 := O'_0 + \vec{v} = O_0 + (\vec{u} + \vec{v})$ , si ottiene,  $\forall \vec{v} \in E_3$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}'_t(\vec{v}) &= \hat{\Phi}'_t(R_0 - O'_0) := \Phi_t(R_0) - \Phi_t(O'_0) = \Phi_t(O_0 + (\vec{u} + \vec{v})) - \Phi_t(O_0 + \vec{u}) = \\ &= \Phi_t(O_0 + \vec{v}) + \cancel{\Phi_t(\vec{u})} - (\Phi_t(O_0) + \cancel{\Phi_t(\vec{u})}) = \Phi_t(P_0) - \Phi_t(O_0) . \end{aligned}$$

Dunque,  $\hat{\Phi}'_t \equiv \hat{\Phi}_t$ .

Infine, lo spostamento rigido risulta

$$\vec{s}(t, P_0) = \Phi_t(P_0) - P_0 = (\Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0)) - (P_0 - \Phi_t(Q_0)) = \hat{\Phi}_t(P_0 - Q_0) - (P_0 - \Phi_t(Q_0))$$

□

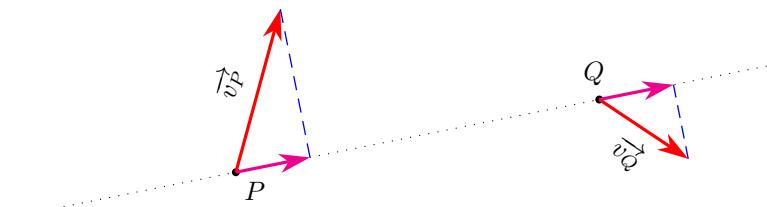
**N.B.** La (4.2.6) formalizza la seguente descrizione del moto rigido:

- i) si sceglie ad arbitrio una particella del rigido, ad esempio  $Q_0$ ;
- ii) noto il moto di  $Q_0$ ,  $\Phi_{Q_0}(t)$ , il moto delle altre particelle, ad es.  $P_0$ , è determinato dall'azione dell'operatore lineare  $\hat{\Phi}_t$  (dipendente solo dal tempo e non da  $Q_0$ ) sul vettore  $(P_0 - Q_0)$ , posizione delle particella  $P_0$  rispetto a  $Q_0$  nella configurazione di riferimento.

Dalla (4.2.1) si può ricavare immediatamente una caratterizzazione equivalente del moto rigido in termini del campo di velocità spaziale.

**Proposizione 4.2.2.** *Un moto è rigido se e solo se il suo campo delle velocità spaziali è equiproiettivo, cioè sono uguali i vettori componenti delle velocità di due punti lungo la congiungente i due punti.*

$$(4.2.8) \quad \vec{v}_P \cdot (P - Q) = \vec{v}_Q \cdot (P - Q) \quad \forall t \in I$$



*Dimostrazione.* Poiché il moto è rigido vale la (4.2.3), equivalente a

$$|\Phi_t(P_0) - \Phi_t(Q_0)|^2 = (\Phi_{P_0}(t) - \Phi_{Q_0}(t)) \cdot (\Phi_{P_0}(t) - \Phi_{Q_0}(t)) = \text{indipendente dal tempo}$$

Derivando rispetto al tempo  $t$  si ottiene

$$2 \left( \frac{d\Phi_{P_0}}{dt}(t) - \frac{d\Phi_{Q_0}}{dt}(t) \right) \cdot (\Phi_{P_0}(t) - \Phi_{Q_0}(t)) = 0 ,$$

cioè

$$(\vec{v}_m(t, P_0) - \vec{v}_m(t, Q_0)) \cdot (P(t) - Q(t)) = 0 ,$$

ovvero

$$(4.2.9) \quad \vec{v}_s(t, P) \cdot (P(t) - Q(t)) = \vec{v}_s(t, Q) \cdot (P(t) - Q(t)) ,$$

tenuto conto della (4.1.3).

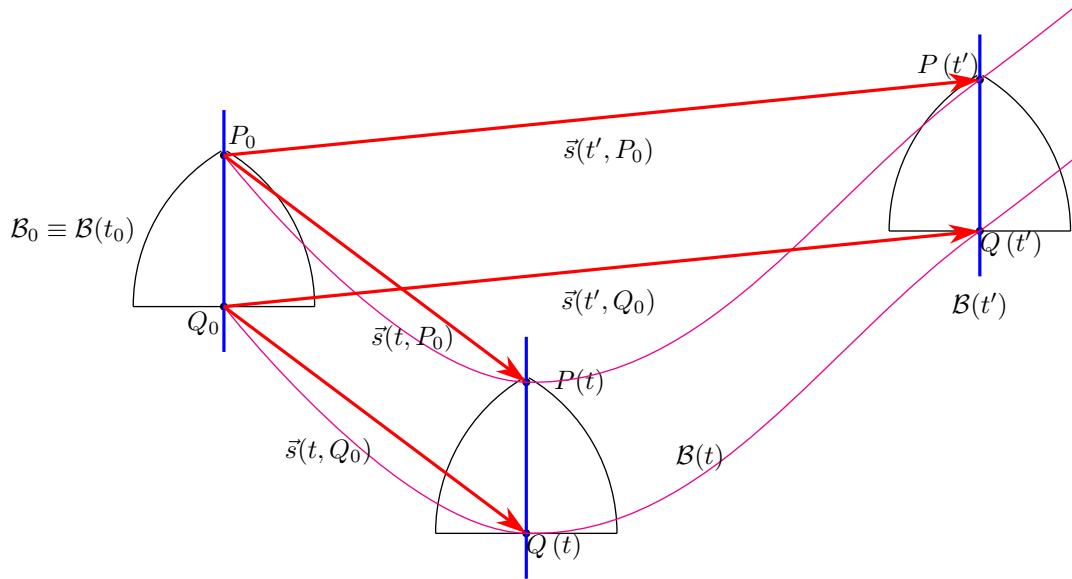
Viceversa, integrando rispetto al tempo la (4.2.9) si ottiene la (4.2.1).  $\square$

### 4.2.1 Esempi di Moto rigido

Presentiamo alcuni esempi già familiari di moto rigido, caratterizzandoli tramite i loro insiemi invarianti, cioè l'insieme dei punti del modello o dello spazio solidale che viene trasformato in sè stesso dal flusso.

#### Moto traslatorio

**Definizione 4.2.2.** Diremo traslatorio un moto rigido che preserva tutte le direzioni, cioè un moto che trasforma assi in assi paralleli. Esso sarà indicato con  $\tau$ .



Consideriamo il quadrilatero di vertici  $P_0, P(t), Q(t), Q_0$ . Per l'ipotesi di moto rigido i lati  $P_0Q_0$  e  $P(t)Q(t)$  sono di uguale lunghezza e per l'ipotesi di moto traslatorio sono anche paralleli. Allora, il quadrilatero suddetto è un parallelogramma e quindi gli spostamenti al tempo  $t$  sono

$$\vec{s}(t, P_0) = \vec{s}(t, Q_0) = \vec{s}(t) \quad \forall P_0, Q_0 \in \mathcal{B}_0 ,$$

cioè tutti i punti del rigido hanno il *medesimo* spostamento all'istante  $t$ . Dunque, il moto del rigido è descritto da

$$(4.2.10) \quad \tau : I \times \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3, (t, P_0) \mapsto P(t) = P_0 + \vec{s}(t)$$

e i suoi piazzamenti al tempo  $t$  si possono scrivere

$$\tau_t = \tau_{\vec{s}(t)} ,$$

per evidenziare il fatto che sono caratterizzati da un unico spostamento  $\vec{s}(t)$ . Si noti che il piazzamento inverso è dato da  $\tau_{-\vec{s}(t)}$ .

Derivando la (4.2.10), si ottiene il campo delle velocità del moto traslatorio

$$(4.2.11) \quad \dot{P}(t) = \dot{\vec{P}}_0 + \dot{\vec{s}}(t) ,$$

cioè

$$(4.2.12) \quad \vec{v}_m(t, P_0) = \vec{v}_s(t, P) = \dot{\vec{s}}(t) = \vec{u}(t) \quad \forall P_0 \in \mathcal{B}_0, \forall P \in \mathcal{B}_t .$$

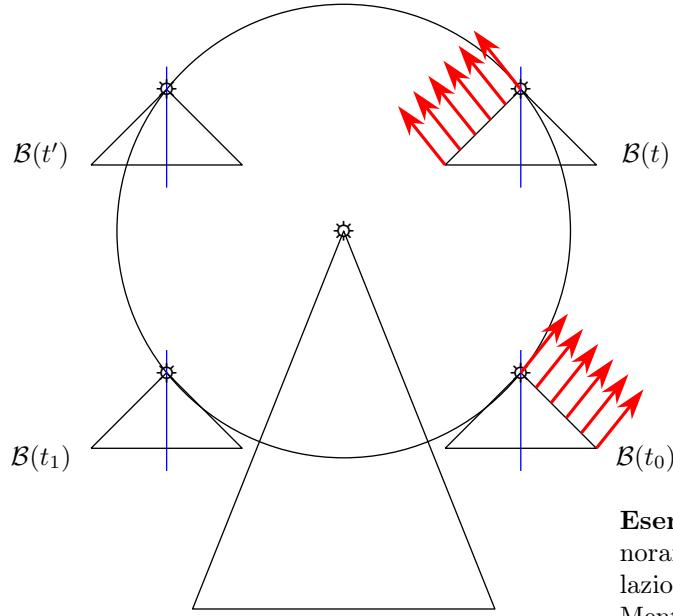
Esso è un campo uniforme, istante per istante, quindi le sue linee di flusso sono rette parallele. Inoltre, integrando la (4.2.12) rispetto al tempo, si dimostra che vale anche il viceversa: se un corpo ha un campo di velocità uniforme in un sotto-intervallo  $[t, t'] \subseteq I$ , allora il suo moto è traslatorio in tale sotto-intervallo.

**N.B.** Dalla Eq. (4.2.10) segue

$$\tau_t(P_0) - \tau_t(Q_0) = P_0 - Q_0 \quad \forall P_0, Q_0 \in \mathcal{B}_0 ,$$

che confrontata con la (4.2.6) implica che la famiglia degli operatori lineari associata al flusso è

$$(4.2.13) \quad \hat{\tau}_t \equiv \mathbb{1}_3 , \forall t \in I .$$



**Esempio.** Una cabina sulla ruota panoramica trasla, se trascuriamo le oscillazioni intorno alle cerniere cilindriche. Mentre le sue linee di corrente sono date da circonferenze, le sue linee di flusso sono rette parallele.

**N.B.** Il moto traslatorio è, in generale, curvilineo. Infatti, ciò che caratterizza il moto traslatorio è l'invarianza dell'*orientazione* del corpo nello spazio. Pertanto, il moto traslatorio può essere descritto, in modo equivalente, come il moto durante il quale ogni terna solidale al rigido preserva l'orientazione dei suoi assi.

Il moto rettilineo è il caso particolare del moto traslatorio che corrisponde a

$$(4.2.14) \quad \vec{s}(t) = s(t) \vec{e} \quad \forall t \in I ,$$

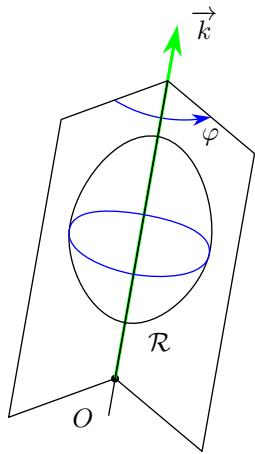
dove  $\vec{e}$  è un versore indipendente dal tempo. In questo caso, il campo delle velocità (4.2.12) si riduce a

$$(4.2.15) \quad \vec{v}_m(t, P_0) = \vec{v}_s(t, P) = \dot{\vec{s}}(t) = \dot{s}(t) \vec{e} \quad \forall P_0 \in \mathcal{B}_0 , \forall P \in \mathcal{B}_t .$$

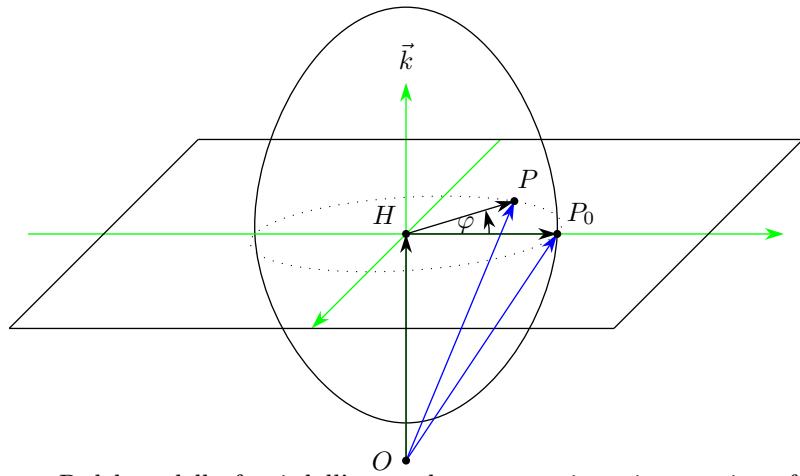
Infine, se  $\dot{s}(t)$  non dipende dal tempo, il moto si dice traslatorio rettilineo ed *uniforme*. Viceversa, integrando la (4.2.15), segue che essa caratterizza i moti traslatori rettilinei, eventualmente uniformi se  $\dot{s}(t)$  non dipende dal tempo. Per i i moti traslatori rettilinei, anche non uniformi, le linee di corrente sono rette parallele, che coincidono con le linee di flusso.

### Moto rotatorio

Chiameremo *rotatorio* attorno ad un asse fisso il moto rigido che tiene fissi 2 punti del modello e quindi, per l'ipotesi di rigidità del moto, anche tutti i punti della retta passante per i 2 punti in oggetto. Tale retta è detta asse di rotazione del modello e sarà denotata anche con  $(O, \vec{k})$ , essendo  $O$  un qualunque punto dell'asse.



**N.B.** Un rigido libero di ruotare intorno a un asse fisso ha 1 grado di libertà. Infatti, dal metodo del bilancio segue che i gradi di vincolo apparenti, cioè il numero delle equazioni vincolari che fissano 2 punti è  $v = 3 \cdot 2 = 6$ . Tuttavia, a causa dei vincoli di rigidità, il numero di quelle efficaci si riduce a  $r = 5$ . Come coordinata libera possiamo prendere l'angolo  $\varphi$  compreso tra due semipiani del fascio passante per l'asse di rotazione, il primo semipiano fisso e il secondo solidale al rigido. In altre parole, la rotazione all'istante  $t$  è individuata univocamente dalla tripla  $(O, \vec{k}, \varphi(t))$ .



Ogni punto  $P$  del modello fuori dall'asse  $r$  ha come traiettoria una circonferenza giacente sul piano per  $P$  e ortogonale a  $r$ , centrata nel punto  $H$  d'intersezione di tale piano con l'asse  $r$ . Infatti, presi due punti  $A$  e  $B$  appartenenti a  $r$ , per il vincolo di rigidità,  $P$  si muove sull'intersezione delle due sfere di centro  $A$  (rs.  $B$ ) e raggio  $AP$  (rs.  $BP$ ), quindi lungo la circonferenza suddetta. Quindi, le linee di corrente nel moto rotatorio sono tutte circonferenze giacenti su piani ortogonali all'asse di rotazione e con centro appartenente a tale asse, che degenerano nel centro quando il raggio si annulla. Quindi, tutti i punti della retta passante per  $A$  e per  $B$  sono fissi.

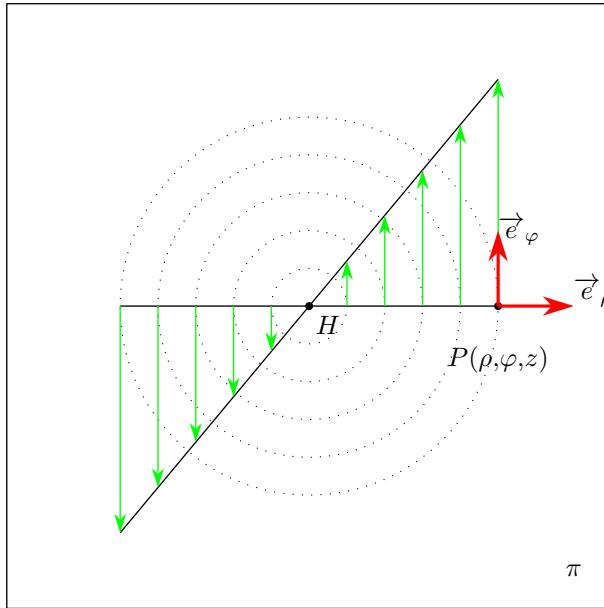
Il vettore posizione di  $P$  rispetto a un punto  $O$  sull'asse di rotazione, in un sistema di coordinate

cilindriche  $(0; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$  è

$$P - O = (P - H) + (H - O) = \rho \vec{e}_\rho(t) + z \vec{k}.$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene la velocità di  $P$  data da

$$\vec{v}_P(\rho, \varphi) = \rho(P) \dot{\vec{e}}_\rho = \rho(P) \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$



Riassumiamo alcune proprietà del campo di velocità del moto rotatorio.

#### Proprietà del campo di velocità del moto rotatorio

1. l'asse di rotazione è il luogo di tutti e soli i punti del rigido a velocità nulla;
2. la velocità di un punto  $P$  fuori dall'asse giace nel piano ortogonale all'asse passante per  $P$  e ha modulo proporzionale alla distanza di  $P$  dall'asse (diagramma triangolare);
3. i punti che stanno su una parallela all'asse hanno il medesimo vettore velocità;
4. le linee di flusso sono circonferenze giacenti su piani ortogonali all'asse di rotazione e con centro sull'asse. Quindi coincidono con le linee di corrente, anche se il moto *non* è stazionario.

La suddetta proprietà 4. prova che la stazionarietà del moto non è una condizione necessaria affinché le linee di corrente coincidano con quelle di flusso.

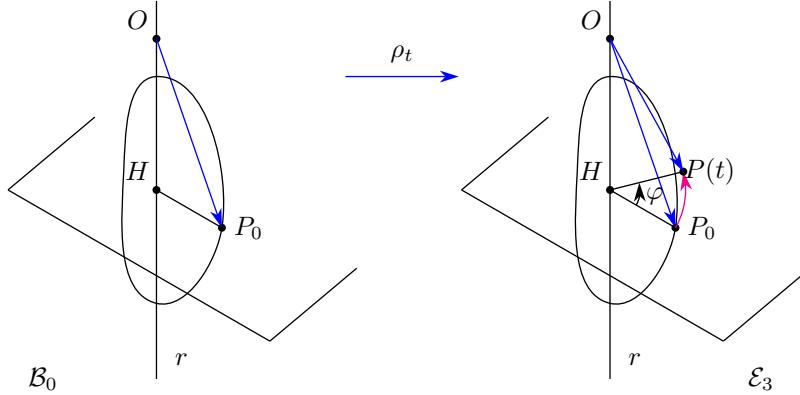
È immediato verificare che, introducendo il vettore

$$(4.2.16) \quad \vec{\omega} := \dot{\varphi} \vec{k},$$

la velocità di un generico punto  $P$  si può scrivere

$$(4.2.17) \quad \vec{v}_P = \vec{\omega} \times (P - O) = \dot{\varphi} \vec{k} \times (\rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}) = \rho \dot{\varphi} (\vec{k} \times \vec{e}_\rho) = \rho(P) \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad O \in r.$$

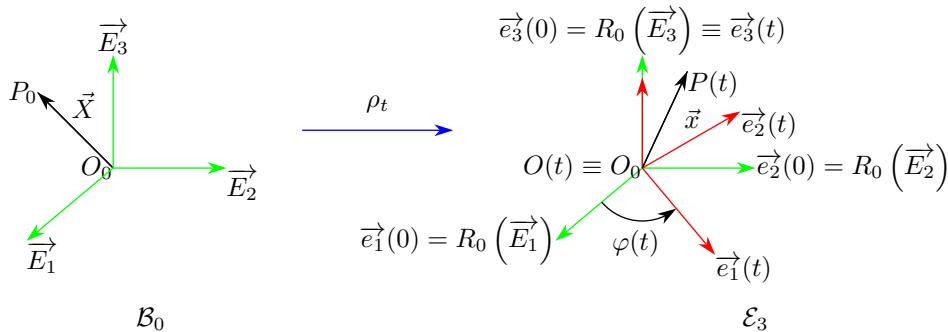
Il vettore  $\vec{\omega}$  è detto velocità angolare del moto rotatorio.



Determiniamo, ora, il moto rotatorio e la famiglia  $\hat{\rho}_t$  degli operatori lineari associati ai piazzamenti  $\rho_t$ . A tale scopo, riscriviamo la (4.2.6) scegliendo il punto  $Q_0 \equiv O_0$

$$(4.2.18) \quad \rho_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3, P_0 \mapsto P(t) = \rho_t(P_0) = \rho_t(O_0) + \hat{\rho}_t(P_0 - O_0) = O_0 + R_t(P_0 - O_0),$$

dove abbiamo tenuto conto che  $O_0$  è un punto fisso, cioè  $O(t) \equiv O_0 = O$ , e dove abbiamo denotato con  $R_t = \hat{\rho}_t : E_3 \rightarrow E_3$  l'operatore lineare associato alle rotazioni  $\rho_t$  intorno a  $r$ . Determiniamo la rappresentazione matriciale di  $R_t$  su una base di  $E_3$ .



Per semplicità di notazione, poniamo  $t_0 = 0$  in modo che, per la (4.1.1), si abbia

$$(4.2.19) \quad R_0 = 1_{E_3}$$

e scegliamo una terna  $(O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  adattata al problema, cioè con l'origine nel punto fisso  $O \in r$  e il versore  $\vec{E}_3 \equiv \vec{k}$ . Denotiamo con  $\vec{e}_i(t) := R_t(\vec{E}_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , i trasformati al tempo  $t$  dei versori della base e osserviamo che dalla (4.2.19) segue

$$(4.2.20) \quad \vec{e}_i(0) = R_0(\vec{E}_i) = \vec{E}_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Il vincolo che fissa l'asse  $(O, \vec{k})$  implica che il versore  $\vec{e}_3(t)$  non dipende dal tempo, quindi  $\vec{e}_3(t) = R_t(\vec{E}_3) \equiv \vec{e}_3(0) \equiv \vec{E}_3 \equiv \vec{k}$ , per ogni  $t$ . Dunque,  $\vec{E}_3$  è un autovettore dell'operatore  $R_t$  con autovalore

pari a 1,  $\forall t \in I$ . Introducendo i vettori posizione, rispettivamente, del punto materiale e del punto spaziale

$$(4.2.21) \quad \vec{X} := P_0 - O_0 = X_1 \vec{E}_1 + X_2 \vec{E}_2 + X_3 \vec{E}_3 \stackrel{(4.2.20)}{=} X_1 \vec{e}_1(0) + X_2 \vec{e}_2(0) + X_3 \vec{e}_3(0) ,$$

$$(4.2.22) \quad \vec{x} := P(t) - O(t) = x_1(t) \vec{e}_1(0) + x_2(t) \vec{e}_2(0) + x_3(t) \vec{e}_3(0) ,$$

la (4.2.18) si può riscrivere

$$(4.2.23) \quad \vec{x} = R_t \vec{X}$$

e, in forma matriciale, come

$$[\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)] [R_t]^{\mathcal{B}_0} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} ,$$

dove  $[R_t]^{\mathcal{B}_0}$  denota la matrice rappresentativa dell'operatore  $R_t$  sulla base  $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0))$ .

Una descrizione equivalente del moto si può ottenere seguendo l'evoluzione della base solidale  $\mathcal{B}_t = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ . Su tale base, il vettore posizione di un punto spaziale si scrive

$$\vec{x} = R_t(X_1 \vec{E}_1 + X_2 \vec{E}_2 + X_3 \vec{E}_3) = X_1 R_t(\vec{E}_1) + X_2 R_t(\vec{E}_2) + X_3 R_t(\vec{E}_3) = X_1 \vec{e}_1(t) + X_2 \vec{e}_2(t) + X_3 \vec{e}_3(t) ,$$

quindi la (4.2.23) si può rappresentare come

$$(4.2.24) \quad [\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)] [R_t]^{\mathcal{B}_0} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} ,$$

che equivale a

$$(4.2.25) \quad [\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)] = [\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0)] [R_t]^{\mathcal{B}_0} .$$

Da tale equazione segue che le colonne della matrice  $[R_t]^{\mathcal{B}_0}$  sono le componenti dei vettori  $\vec{e}_i(t)$  sulla base fissa, cioè dei trasformati della base dall'operatore di rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno all'asse  $r$ . Poiché risulta

$$\vec{e}_1(t) = \cos \varphi \vec{e}_1(0) + \sin \varphi \vec{e}_2(0) , \quad \vec{e}_2(t) = -\sin \varphi \vec{e}_1(0) + \cos \varphi \vec{e}_2(0) , \quad \vec{e}_3(t) = \vec{e}_3(0) ,$$

la rappresentazione di  $R_t$  sulla base  $\vec{e}_i(0)$  si scrive

$$(4.2.26) \quad [R_t]^{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) & 0 \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi(0) = 0 .$$

Per evidenziare il fatto che l'operatore di rotazione è caratterizzato da una direzione  $\vec{k}$  e da un angolo di rotazione  $\varphi$  intorno a tale direzione, spesso si scrive

$$R_t = R_{(\varphi(t), \vec{k})} .$$

**Esercizio 4.2.1.** Verificare che la matrice  $[R_t]^{\mathcal{B}_0}$  è ortogonale ed unimodulare. Inoltre, dimostrare che l'operatore inverso di  $R_{(\varphi, \vec{k})}$  è dato da  $R_{(-\varphi, \vec{k})}$ .

Dalla (4.2.23) segue facilmente che il campo degli spostamenti è dato da

$$\vec{s}(t, P_0) = P(t) - P_0 = \vec{x} - \vec{X} = R_t \vec{X} - \vec{X} = (R_t - \mathbb{1}) \vec{X} = (R_t - \mathbb{1})(P_0 - O_0) \quad O_0 \in r .$$

Da ora in poi, posto  $\mathbf{e}(t) := [\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)]$ , per scrivere la (4.2.25) useremo la forma più compatta

$$(4.2.27) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(0)[R_t]^{\mathcal{B}_0} .$$

Ora, calcoliamo il campo delle velocità del moto rotatorio derivando rispetto al tempo la (4.2.23). La velocità in forma lagrangiana risulta

$$\dot{\vec{x}} = \dot{R}(\varphi(t)) \vec{X} ,$$

dove si è tenuto conto che il vettore  $\vec{X}$ , relativo alla configurazione di riferimento, è indipendente dal tempo. Dalla (4.2.23) segue che  $\vec{X} = R^{-1} \vec{x}(t)$ , quindi la velocità in forma euleriana risulta

$$\dot{\vec{x}} = \dot{R}R^{-1} \vec{x}(t) = \frac{dR}{d\varphi} \varphi(t) R^{-1} \vec{x}(t)$$

Calcoliamo esplicitamente la matrice  $\dot{\varphi}[\frac{dR}{d\varphi} R^{-1}]$ . Poichè

$$\left[ \begin{array}{c} dR \\ \hline d\varphi \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e  $[R]$  è una matrice ortogonale, si ottiene

$$(4.2.28) \quad \dot{\varphi} \left[ \begin{array}{cc|c} -\sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi & -\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi & 0 \\ \hline \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \dot{\varphi} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Pertanto, posto  $[A]^{\mathcal{B}_0} = \dot{\varphi} \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ , dalla (4.2.22) segue che

$$(4.2.29) \quad \dot{\vec{x}} = A \vec{x} = \dot{\varphi}(t)(-x_2 \vec{e}_1(0) + x_1 \vec{e}_2(0)) = \dot{\varphi} \vec{e}_3(0) \times \vec{x}(t) = \vec{\omega} \times \vec{x} ,$$

che coincide con la (4.2.17).

### Moto elicoidale

Chiameremo *elicoidale* il moto che preserva l'insieme dei punti di un asse  $r$  solidale al modello (i punti dell'asse possono spostarsi solo lungo l'asse). Tale asse è detto asse del moto. Ad esempio, il moto di un proiettile di peso trascurabile ( $l = 6$ ), quello di un rigido vincolato ad un asse fisso

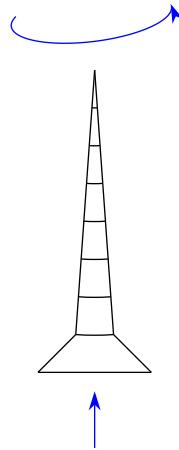


Figura 4.2.1: Vite

da un collare cilindrico, come nella Sez.3.4 ( $l = 2$ ), il moto di avvitamento di una vite dentro una madrevite fissa ( $l = 1$ ).

È chiaro che la composizione  $\rho_t \circ \tau_t$  (allo stesso istante  $t$ ) del piazzamento di un moto traslatorio *rettilineo* lungo l'asse  $r$ ,  $\tau_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3$  composto con un piazzamento rotatorio,  $\rho_t : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ , intorno allo stesso asse è un piazzamento elicoidale. Scriviamone il flusso. Scelto il versore  $\vec{E}_3$  parallelo a  $r$  e il punto  $O_0 \in r$ , il componente traslatorio si scrive

$$P'(t) = \tau_t(P_0) = P_0 + s(t)\vec{E}_3 , \quad s(0) = 0$$

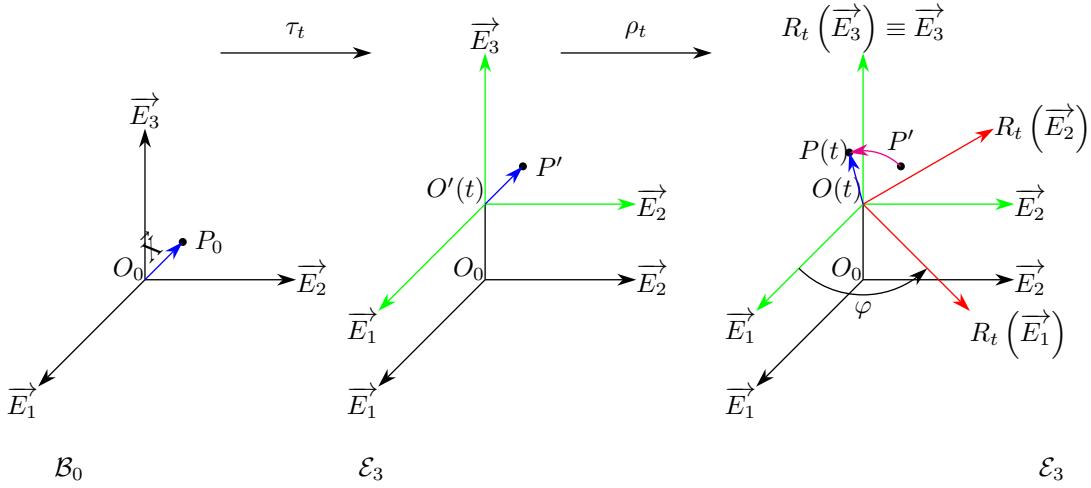
e quello rotatorio come

$$P(t) = \rho_t(P') = O'(t) + R_t(P' - O') ,$$

dove il punto

$$O'(t) = \tau_t(O_0) = O_0 + s(t)\vec{E}_3 ,$$

essendo il traslato di un punto dell'asse, appartiene all'asse del moto per ogni  $t \in I$ .



Allora, il piazzamento composto  $\rho_t \circ \tau_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3$ , sarà

$$(4.2.30) \quad P(t) = O_0 + s(t)\vec{E}_3 + R_t(P_0 + s(t)\vec{E}_3 - (O_0 + s(t)\vec{E}_3)) = O_0 + s(t)\vec{E}_3 + R_t(P_0 - O_0) ,$$

e il campo degli spostamenti

$$\vec{s}(t, P_0) = P(t) - P_0 = O_0 + s(t)\vec{E}_3 + R_t(P_0 - O_0) - P_0 = s(t)\vec{E}_3 + (R_t - \mathbb{1})(P_0 - O_0) \quad O_0 \in r$$

Le linee di corrente, in questo caso, sono curve che si avvolgono su cilindri con assi coincidenti tutti con l'asse del moto.

**N.B.** Lo stesso moto elicoidale (4.2.30) si può scomporre nello stesso moto rotatorio seguito dallo stesso moto traslatorio. Infatti

$$P_0 \xrightarrow{\rho_t} \rho_t(P_0) = \rho_t(O_0) + R_t(P_0 - O_0) = O_0 + R_t(P_0 - O_0) \xrightarrow{\tau_t} O_0 + s(t)\vec{E}_3 + R_t(P_0 - O_0) .$$

In altri termini, una rotazione attorno ad un asse fisso commuta con una traslazione lungo lo stesso asse.

Finora, abbiamo visto come la composizione di un moto traslatorio lungo un asse, composto con un moto rotatorio, intorno allo stesso asse, produce un moto elicoidale. Viceversa, si può dimostrare che un qualunque moto elicoidale si può scomporre in un moto traslatorio composto con uno rotatorio. La dimostrazione è lasciata come esercizio.

**Esercizio 4.2.2.** Dimostrare che ogni piazzamento elicoidale con asse  $r$  si può scomporre, in modo unico, in un piazzamento traslatorio lungo  $r$  composto con uno rotatorio intorno ad  $r$ , o viceversa.

Derivando rispetto al tempo la (4.2.30), si ottiene il campo di velocità materiale

$$(4.2.31) \quad \dot{P}(t) = \dot{s}(t)\vec{e}_3(0) + \dot{R}_t(P_0 - O_0) ,$$

e quello spaziale, in base alle (4.2.12), (4.2.31) e (4.2.30),

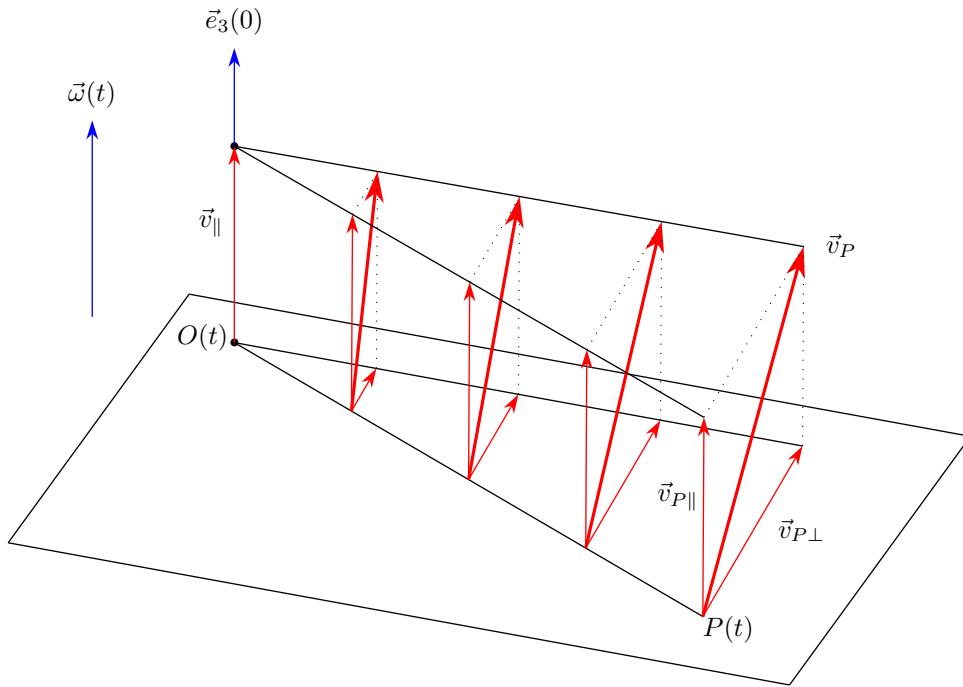
$$\vec{v}_P = u(t)\vec{e}_3(0) + \dot{R}_t R_t^T (P(t) - O(t)) ,$$

dove  $O(t) = s(t)\vec{e}_3(0) + O_0$  è un punto appartenente all'asse del moto, quindi solidale al rigido.

Pertanto, per la (4.2.29)) si ha:

$$\vec{v}_P = u(t)\vec{e}_3(0) + \vec{\omega} \times (P(t) - O(t)) = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (P - O) \quad O \in r ,$$

dove ricordiamo che  $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_3(0)$ .

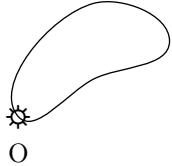


### Proprietà del campo di velocità del moto elicoidale

1. Non esistono punti a velocità nulla.
2. I punti dell'asse  $r$ , detto *asse del moto*, sono tutti e soli i punti aventi velocità parallela ad  $\vec{\omega}$  e minima (in modulo).
3. Il componente della velocità parallelo all'asse è uniforme per tutti i punti del rigido.
4. Tutti i punti equidistanti dall'asse hanno la stessa velocità in modulo: per tali punti il vettore velocità è tangente alla superficie del cilindro circolare retto passante per tali punti e avente come asse, l'asse del moto.
5. Le linee di flusso sono eliche circolari intorno all'asse del moto di passo uguale a  $\vec{v}_P(t) \cdot \vec{e}_3(0)$ , ma non coincidono necessariamente con le linee di corrente. Questo succede, per esempio, se  $\vec{v}_O$  e  $\vec{\omega}$  sono costanti.

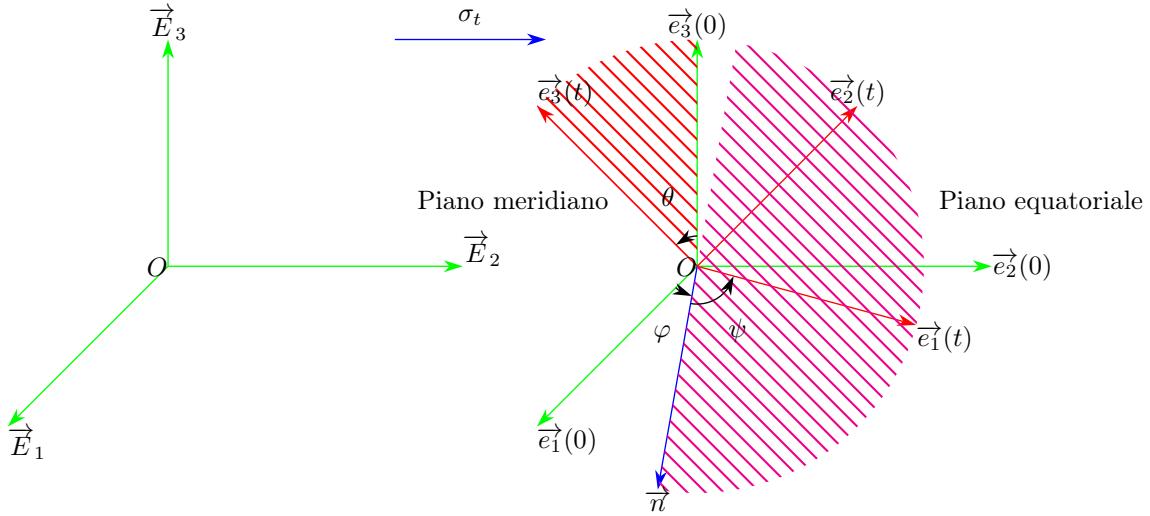
### Moto polare

Chiameremo *polare* un moto rigido che mantiene fisso un punto  $O$  del modello. Tale vincolo è triplo, quindi lascia al modello 3 gradi di libertà (in assenza di ulteriori vincoli). Il moto polare sarà denotato con  $\sigma$ , o con  $\sigma_O$  quando vorremo mettere in evidenza il punto fisso.



## 4.3 Angoli di Euler

Introduciamo un sistema di coordinate adatto a descrivere un qualsiasi moto polare. Useremo la seguente terminologia di origine astronomica avvisando, comunque, che le convenzioni usate nella Meccanica Razionale non sono le stesse usate, ad esempio, in Meccanica Applicata.



Scelte due terne con la stessa origine nel punto fisso  $O$ , una fissa  $\Sigma = (O, \vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0))$  e una mobile  $\Sigma(t) = (O, \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ , chiameremo

- Piano dell'eclittica: passante per gli assi  $(O, \vec{e}_1(0)), (O, \vec{e}_2(0))$  della terna fissa.
- Piano equatoriale: passante per gli assi  $(O, \vec{e}_1(t)), (O, \vec{e}_2(t))$  della terna mobile.
- Piano meridiano: passante per gli assi  $(O, \vec{e}_3(0)), (O, \vec{e}_3(t))$ .
- Asse dei nodi  $(O, \vec{n}(t))$ , dove  $\vec{n}(t)$  è il versore definito da

$$\vec{n}(t) := \frac{\vec{e}_3(0) \times \vec{e}_3(t)}{|\vec{e}_3(0) \times \vec{e}_3(t)|} = \frac{\vec{e}_3(0) \times \vec{e}_3(t)}{|\sin \theta|}$$

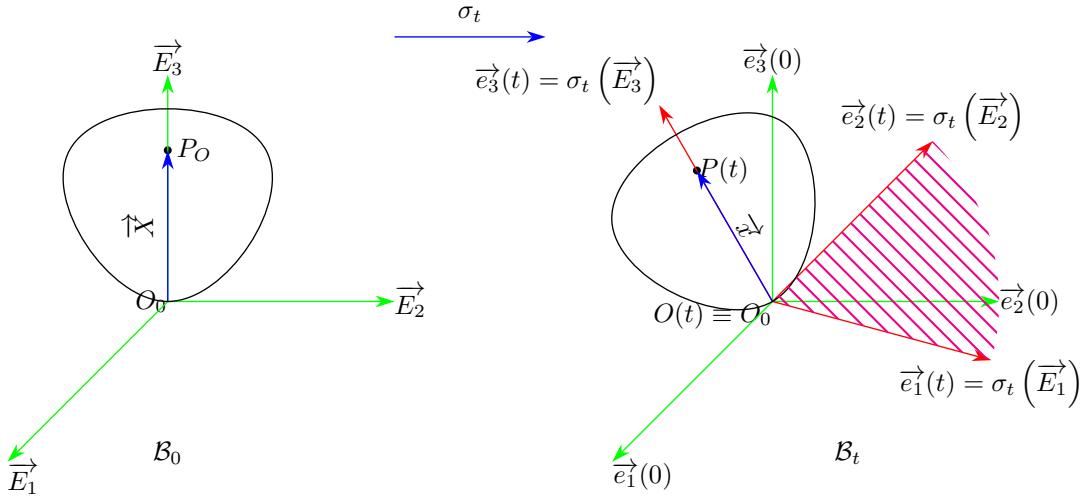
Poiché  $\vec{n}(t)$  è ortogonale sia a  $\vec{e}_3(0)$ , sia a  $\vec{e}_3(t)$ , esso risulta parallelo alla retta d'intersezione del piano equatoriale con il piano dell'eclittica.

- Angolo di precessione  $\varphi$ : angolo tra i versori  $\vec{e}_1(0)$  e  $\vec{n}(t)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .
- Angolo di nutazione  $\theta$ : angolo tra i versori  $\vec{e}_3(0)$  e  $\vec{e}_3(t)$ ,  $0 < \theta < \pi$ . La limitazione sulla coordinata angolare  $\theta$  è dovuta al fatto che, quando l'angolo tra i versori  $\vec{e}_3(0)$  e  $\vec{e}_3(t)$  diventa ottuso, il versore  $\vec{n}(t)$  cambia verso, quindi la coordinata angolare rimane sempre limitata tra  $0 \leq \theta < \pi$ .
- Angolo di rotazione propria  $\psi$ : angolo tra i versori  $\vec{n}(t)$  e  $\vec{e}_1(t)$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ .

**N.B.** Se  $\theta = 0$ , il piano equatoriale coincide con il piano dell'eclittica e la linea dei nodi non è definita. In questo caso, quindi, non è definito l'angolo di precessione né quello di rotazione propria, ma è definita solo la loro somma  $\varphi + \psi$ .

**N.B.** Gli angoli di Eulero  $(\varphi, \theta)$  corrispondono alle coordinate sferiche dei punti dell'asse  $\vec{e}_3(t)$ . Precisamente, l'angolo di precessione è pari all'angolo di longitudine sommato a  $\pi/2$ , mentre l'angolo di nutazione coincide con la colatitudine.

**Teorema 4.3.1** (Eulero, 1707-1783). *In ogni moto polare il piazzamento del rigido ad ogni istante  $t \in I$  si scomponete, in un unico modo, in 3 piazzamenti rotatori intorno a 3 assi passanti per  $O$ .*



*Dimostrazione.* Sia  $\sigma_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3$ , il piazzamento del modello al tempo  $t$ . Dall'ipotesi di punto fisso segue che:

$$(4.3.1) \quad \sigma_t(O_0) = O \equiv O_0 \quad \forall t \in I$$

Allora, per la (4.2.6), il piazzamento si scrive

$$(4.3.2) \quad \sigma_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3, P_0 \mapsto P(t) = \sigma_t(O_0) + \hat{\sigma}_t(P_0 - O_0) = O + R_t(P_0 - O) ,$$

dove abbiamo indicato con  $R_t : E_3 \rightarrow E_3$  l'operatore lineare  $\hat{\sigma}_t$  associato al piazzamento del moto polare al tempo  $t$ . Vogliamo ora dimostrare che  $R_t$  è la composizione di 3 rotazioni elementari dipendenti dai cosiddetti angoli di Eulero, scelti come coordinate lagrangiane del rigido. A tale scopo, considereremo la base "fissa"  $\mathcal{B}_0 = (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) = (\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0))$ , una base solidale al rigido  $\mathcal{B}_t = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$  e costruiremo la matrice di piazzamento della base mobile rispetto a quella fissa

$$(4.3.3) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(0)[R_t]^{\mathcal{B}_0} ,$$

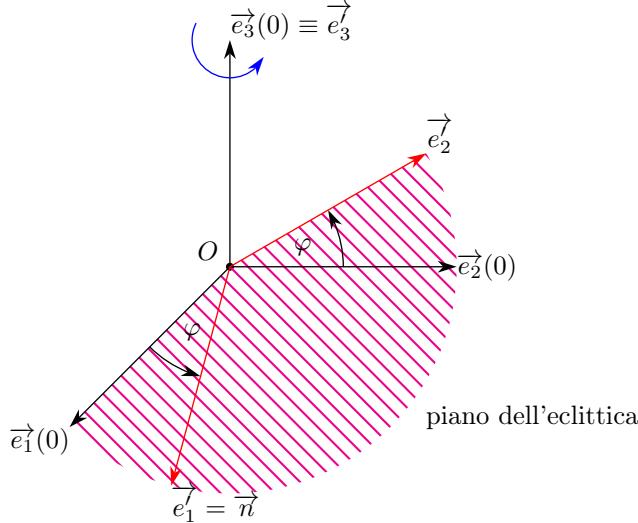
equivalente a

$$(4.3.4) \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}(t) ([R_t]^{\mathcal{B}_0})^{-1} = \mathbf{e}(t) ([R_t]^{\mathcal{B}_0})^T$$

□

Ora dimostriamo che la terna fissa  $\vec{e}(0)$  si può sovrapporre, in un unico modo, ad un'assegnata terna mobile  $\vec{e}(t)$  mediante 3 rotazioni: la prima dell'angolo di precessione  $\varphi$  intorno all'asse  $\vec{e}_3(0)$ , la seconda dell'angolo di nutazione  $\theta$  intorno all'asse dei nodi  $\vec{n}(t)$ , la terza dell'angolo di rotazione propria  $\psi$  intorno all'asse di figura  $\vec{e}_3(t)$ .

### 1. PRECESSIONE



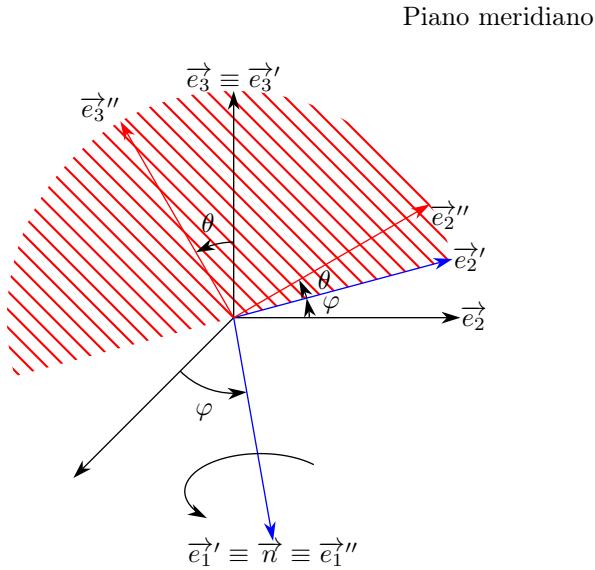
La base trasformata  $\mathbf{e}'$  si ottiene dalla base di partenza  $\mathbf{e}(0)$  tramite la trasformazione

$$(4.3.5) \quad \mathbf{e}' = \mathbf{e}(0)[R_{(\varphi, \vec{e}_3(0))}] .$$

Se si esprimono le componenti dei vettori trasformati  $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$  sulla base  $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1(0), \vec{e}_2(0), \vec{e}_3(0))$ , la matrice  $[R_{(\varphi, \vec{e}_3(0))}]^{\mathcal{B}_0}$  coincide con la (4.2.26) che riscriviamo per comodità

$$(4.3.6) \quad [R_{(\varphi, \vec{e}_3(0))}]^{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

## 2. NUTAZIONE



La terna trasformata  $\mathbf{e}''$  si ottiene dalla terna  $\mathbf{e}'$  tramite la trasformazione

$$(4.3.7) \quad \mathbf{e}'' = \mathbf{e}'[R_{(\theta, \vec{n})}] .$$

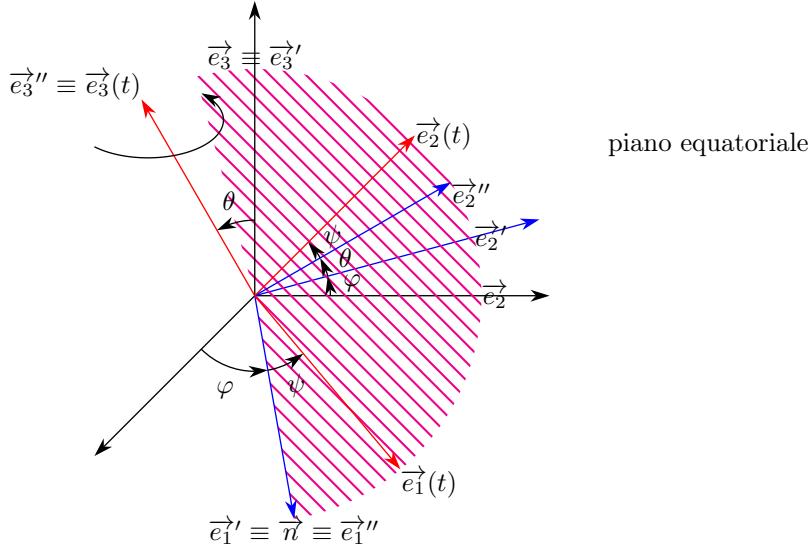
Se si esprimono le componenti dei vettori trasformati  $\mathcal{B}'' = (\vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3)$  sulla base  $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ , poiché

$$\vec{e}_1'' = \vec{e}_1' , \quad \vec{e}_2'' = \cos \theta \vec{e}_2' + \sin \theta \vec{e}_3' , \quad \vec{e}_3'' = -\sin \theta \vec{e}_2' + \cos \theta \vec{e}_3' ,$$

la matrice  $[R_{(\theta, \vec{n})}]^{\mathcal{B}'}$  risulta

$$(4.3.8) \quad [R_{(\theta, \vec{n})}]^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

## 3. ROTAZIONE PROPRIA



Infine, la base mobile  $\mathbf{e}(t)$  si ottiene dalla base  $\mathbf{e}''$  mediante la trasformazione

$$(4.3.9) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}''[R_{(\psi, \vec{e}_3(t))}] .$$

Se si esprimono le componenti dei vettori trasformati  $(\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$  sulla base  $\mathcal{B}'' = (\vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3'')$ , risulta che la matrice  $[R_{(\psi, \vec{e}_3(t))}]^{\mathcal{B}''}$  coincide con la (4.2.26) a meno dello scambio dell'angolo  $\varphi$  con l'angolo  $\psi$ . Dunque,

$$(4.3.10) \quad [R_{(\psi, \vec{e}_3(t))}]^{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

Ora, è facile concludere che la matrice  $[R_t]$  di trasformazione tra la base fissa  $\vec{e}(0)$  e la base mobile  $\vec{e}(t)$  si ottiene moltiplicando fra loro le matrici (4.3.5), (4.3.7), (4.3.9). Infatti, concatenando le precedenti trasformazioni si ottiene

$$(4.3.11) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}''[R_{(\psi, \vec{e}_3(t))}] = \mathbf{e}'[R_{(\theta, \vec{n})}][R_{(\psi, \vec{e}_3(t))}] = \mathbf{e}(0)[R_{(\varphi, \vec{e}_3(0))}][R_{(\theta, \vec{n})}][R_{(\psi, \vec{e}_3(t))}] .$$

Pertanto, la matrice di piazzamento  $[R_t]$  del moto polare nella (4.3.3) è data da

$$(4.3.12) \quad [R_t]^{\mathcal{B}_0} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{array} \right]$$

**Esercizio 4.3.1.** Dimostrare che la matrice  $[R_t]$  è ortogonale ed unimodulare, cioè

$$(4.3.13) \quad [R_t][R_t]^T = \mathbb{1}_{E_3}$$

$$(4.3.14) \quad \det[R_t] = 1$$

Suggerimento:  $[R_t]$  è uguale al prodotto di matrici ortogonali e unimodulari.

**N.B.** Si può dimostrare (uno dei tanti Teoremi di Eulero) che l'operatore  $R_t$  rappresenta esso stesso una singola rotazione di un angolo

$$\alpha = \arccos \frac{\text{traccia}(R_t) - 1}{2},$$

attorno a un asse per  $O$  e parallelo ai vettori che appartengono all'autospazio (unidimensionale) di  $R_t$  con autovalore 1. Tale proprietà spiega la scelta della notazione  $R_t$  anche per l'operatore lineare associato al moto polare. Comunque, essendo tale asse dipendente dal tempo, il moto rappresentato da  $R_t$  non è un moto rotatorio e, per questo motivo, l'asse suddetto si dice asse *d'istantanea* rotazione per  $O$ .

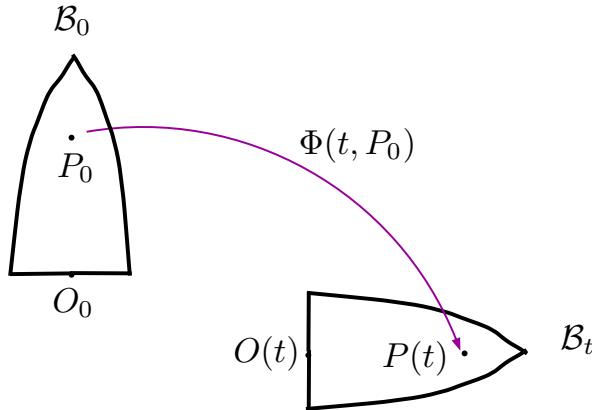
## 4.4 Moto rigido generale

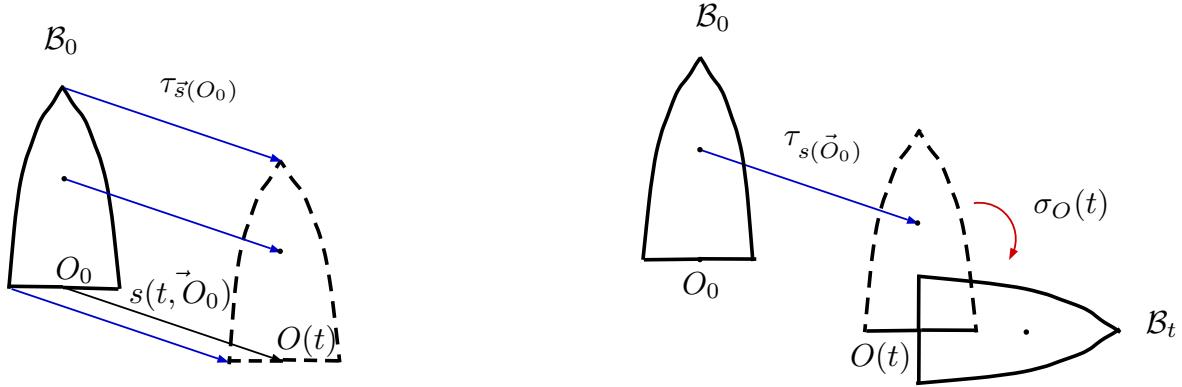
Analizziamo il moto rigido più generale, che risulterà una composizione dei moti rigidi elementari analizzati nelle precedenti sezioni.

**Teorema 4.4.1.** Il più generale moto rigido  $\Phi$  si può scomporre, in infiniti modi, in un moto traslatorio  $\tau$  e in un moto polare  $\sigma$ . Precisamente, scelto un punto  $O(t)$  solidale al rigido,  $\Phi$  si può rappresentare come

$$(4.4.1) \quad P(t) = \Phi(t, P_0) = (\sigma_O \circ \tau_{\vec{s}})(t, P_0) = O(t) + R_t(P_0 - O_0),$$

dove lo spostamento  $\vec{s} = O(t) - O_0$  è lo spostamento del punto  $O_0 := \Phi_t^{-1}(O)$ ,  $R_t$  è la parte lineare del moto polare e risulta indipendente da  $O$ . Ad un istante  $t$  fissato, al variare della scelta di  $O$  gli assi d'istantanea rotazione dei diversi componenti polari  $\sigma_O$  sono tutti paralleli.





*Dimostrazione.* Dato un moto rigido  $\Phi(t)$ , scegliamo ad arbitrio un centro di riduzione  $O(t)$  solidale al rigido e poniamo

$$O_0 = \Phi_t^{-1}(O) , \quad \vec{s}(t, O_0) = O(t) - O_0$$

Consideriamo il moto traslatorio

$$(4.4.2) \quad \tau_{\vec{s}}(t, P_0) = P_0 + \vec{s}(t, O_0) \quad \forall P_0 \in \mathcal{B}_0$$

e il moto

$$\sigma_O = \Phi \circ \tau_{\vec{s}}^{-1} = \Phi \circ \tau_{-\vec{s}}$$

Mostriamo che il punto  $O(t)$  è un punto fisso per  $\sigma_O$ , il quale, dunque, è un moto polare. Infatti,

$$\sigma_O(O(t)) = \Phi \circ \tau_{\vec{s}}^{-1}(O(t)) = \Phi(O(t) - \vec{s}(t, O_0)) = \Phi(t, O_0) = O(t) .$$

Dunque, il moto composto si può scrivere come

$$(4.4.3) \quad \begin{aligned} \Phi(t, P_0) &= \sigma_O(\tau(P_0)) = \sigma_O(P_0 + \vec{s}(t, O_0)) = \sigma_O(P_0 + O(t) - O_0) \stackrel{(4.2.6)}{=} \\ &= \sigma_O(O(t)) + \hat{\sigma}_O(P_0 - O_0) = O(t) + R_t(P_0 - \Phi_t^{-1}(O)) , \end{aligned}$$

dove  $R_t = \hat{\sigma}_O$  è l'operatore lineare del moto polare attorno al punto  $O(t)$ . A priori,  $R_t$  potrebbe dipendere dal centro di riduzione  $O(t)$ . Ciò non succede perché  $R_t$  è la parte lineare dell'applicazione affine  $\Phi_t$ , quindi per la Prop. 4.2.1 può dipendere solo dal tempo.  $\square$

**N.B.** Equivalentemente, il moto assegnato  $\Phi$  si può scomporre in un moto polare intorno al punto  $O_0 = \Phi_t^{-1}(O)$ , seguito dal moto traslatorio  $\tau_{\vec{s}}$  (4.12.1), cioè

$$\Phi = \tau_{\vec{s}} \circ \sigma_{O_0} .$$

Infatti, il moto  $\sigma_{O_0} = \tau_{\vec{s}}^{-1} \circ \Phi$  ammette il punto fisso  $O_0$ , poiché

$$\sigma_{O_0}(O_0) = \sigma_{O_0}(\Phi^{-1}(O)) = (\tau_{\vec{s}}^{-1} \circ \Phi)(\Phi^{-1}(O)) = \tau_{-\vec{s}}(O) = O_0 .$$

Quindi, il moto  $\Phi$  si può rappresentare come

$$(4.4.4) \quad \begin{aligned} \Phi(t, P_0) &= \tau_{\vec{s}}(\sigma_{O_0}(P_0)) = \tau_{\vec{s}}(O_0 + R'_t(P_0 - O_0)) = \tau_{\vec{s}}(O_0) + \hat{\tau}_{\vec{s}}R'_t(P_0 - O_0) \\ &= O_0 + \vec{s}(t, O_0) + R'_t(P_0 - O_0) = O(t) + R'_t(P_0 - O_0) \end{aligned}$$

Confrontando la (4.4.1) con la (4.4.4), poiché esse valgono  $\forall P_0, Q_0 \in \mathcal{E}_3$ , si può concludere che

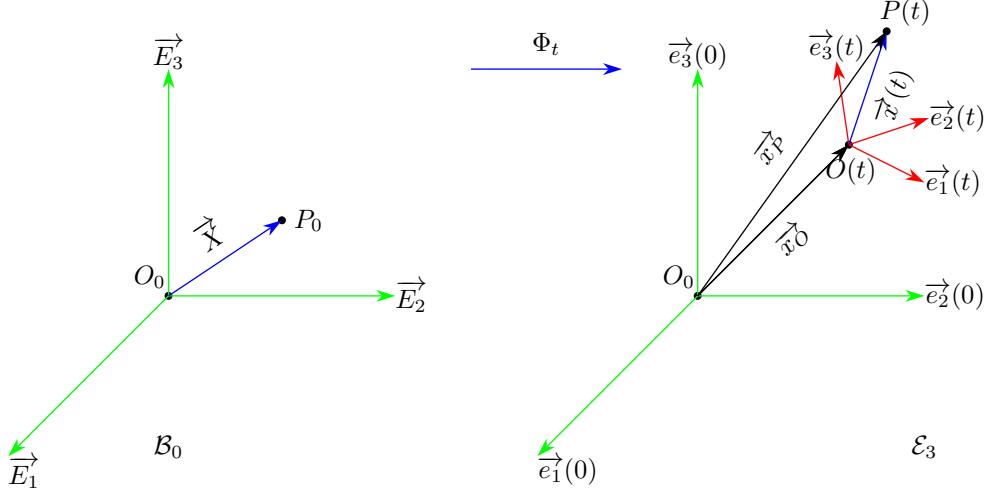
$$(4.4.5) \quad R_t = R'_t ,$$

cioè le parti lineari dei due moti polari  $\sigma_O$  e  $\sigma_{O_0}$  coincidono. Quindi, ad un istante  $t$  fissato, l'asse istantaneo del moto polare intorno ad  $O$  risulta parallelo a quello del moto polare intorno ad  $O_0$ .

**N.B.** Il Teorema 4.4.1 equivale a dire che il più generale moto rigido si può descrivere come il moto di una *qualsiasi* terna solidale al rigido  $(O(t); \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ . Tale moto si può scomporre nel moto traslatorio  $\tau$  di una terna intermedia con origine nel punto  $O(t)$  seguito dal moto polare  $\sigma$  intorno ad  $O(t)$  della terna solidale rispetto alla terna intermedia. Di solito, il moto della terna intermedia si dice moto di *trascinamento*, mentre quello della terna solidale rispetto a quella intermedia si dice moto *relativo*. Vedremo nella Sez. 4.6 un'applicazione importante del suddetto punto di vista.

#### 4.4.1 Teorema di Poisson

In questa sezione dimostreremo il teorema di Poisson che descrive il campo di velocità del più generale moto rigido.



**Teorema 4.4.2** (Poisson, 1781-1840). *Dati due punti generici  $P$  e  $O$  di un rigido o dello spazio ad esso solidale, esiste ed è unico un vettore  $\vec{\omega}(t) \in E_3$ , detto velocità angolare del rigido, tale che*

$$(4.4.6) \quad \frac{d}{dt}(P - O) = \vec{\omega} \times (P - O)$$

*Dimostrazione.* Derivando la (4.4.1) rispetto al tempo, si ottiene il campo di velocità materiale

$$(4.4.7) \quad \dot{P} = \dot{O} + \dot{R}_t(P_0 - O_0) ,$$

mentre quello spaziale, sulla base della (4.4.1), risulta

$$(4.4.8) \quad \dot{P} = \dot{O} + \dot{R}_t R_t^T (P(t) - O(t)) ,$$

dove  $O(t)$  è un punto solidale al rigido.

Consideriamo l'operatore  $A : I \times E_3 \rightarrow E_3$ , definito da

$$(4.4.9) \quad A(t) := \dot{R} R^T \quad (\text{il pedice } t \text{ di } R_t \text{ è sottointeso per non appesantire la notazione}) ,$$

detto operatore di spin (o di Cartan) di  $R$ . Dimostriamo che è antisimmetrico rispetto al prodotto scalare di  $E_3$ , cioè

$$(4.4.10) \quad A\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot A\vec{v} = 0 \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in E_3 \Leftrightarrow A + A^T = 0 .$$

Tale proprietà è una semplice conseguenza del fatto che  $R$  è ortogonale. Infatti, derivando rispetto al tempo l'Eq. (4.3.13) si ha

$$(4.4.11) \quad \dot{R} R^T + R \dot{R}^T = 0$$

Il primo termine della (4.4.11) è proprio l'operatore  $A$ , mentre il secondo termine coincide con il suo trasposto, poichè

$$A^T = (\dot{R} R^T)^T = (R^T)^T (\dot{R})^T = R \dot{R}^T$$

Pertanto la (4.4.8) si può scrivere

$$(4.4.12) \quad \frac{d}{dt}(P - O) = A(P - O) .$$

Per concludere la dimostrazione del teorema, utilizzeremo il seguente

**Lemma 4.4.1.** *Dato un generico operatore antisimmetrico  $A : E_3 \rightarrow E_3$ , esiste ed è unico un vettore  $\vec{\omega} \in E_3$ , tale che*

$$(4.4.13) \quad \vec{\omega} \times \vec{y} = A\vec{y} \quad \forall \vec{y} \in E_3 .$$

*Il vettore  $\vec{\omega}$  dato da*

$$(4.4.14) \quad \vec{\omega} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \vec{e}_i \times A_{ji} \vec{e}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \times A \vec{e}_i ,$$

*è detto il vettore assiale associato all'operatore  $A$  ed appartiene al  $\text{Ker } A$ , cioè*

$$A\vec{\omega} = \vec{0} .$$

*Dimostrazione.* Scelta una base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  e un vettore  $\vec{y}$  arbitrario la (4.4.13) si scrive esplicitamente come

$$\det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} .$$

Risolvendo tale sistema di equazioni rispetto alle componenti del vettore incognito

$$(4.4.15) \quad \vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$$

si trova l'unica soluzione

$$(4.4.16) \quad \omega_1 = -A_{23}, \omega_2 = A_{13}, \omega_3 = -A_{12}$$

che, in forma vettoriale, si scrive come nella (4.4.14). È facile verificare che il vettore di componenti (4.4.16)  $\in \text{Ker } A$ .  $\square$

A questo punto, sostituendo nella (4.4.12) il vettore assiale  $\vec{\omega}$  si ottiene la (4.4.6), concludendo la dimostrazione del teorema di Poisson.  $\square$

## 4.5 Applicazioni del teorema di Poisson

Come applicazioni del teorema di Poisson, ricaveremo le formule per il campo delle velocità e delle accelerazioni di un rigido, la formula di derivazione cinematica per un vettore dipendente dal tempo.

### 4.5.1 Campo di velocità di un rigido

Consideriamo il più generale moto rigido. Dalla (4.4.6) otteniamo

$$(4.5.1) \quad \vec{v}_P(t) = \vec{v}_O(t) + \vec{\omega}(t) \times (P(t) - O(t)) \quad \forall O, P \in \mathcal{R}$$

dove la velocità angolare del rigido si può calcolare come vettore assiale dell'operatore di spin

$$\vec{A}(t) = \dot{R}R^T.$$

La (4.5.1) è detta formula dell'atto di moto rigido e permette, noti i due vettori caratteristici  $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$  di calcolare la velocità spaziale di tutti i punti del rigido ad ogni istante  $t \in I$ . Ricordiamo la forma del vettore  $\vec{\omega}$  per i moti rigidi già incontrati.

#### 1. Moto *traslatorio*

Poiché  $\vec{v}_P - \vec{v}_O = \vec{0} \quad \forall P, O \in \mathcal{R}$ , dalla (4.5.1) segue che

$$\vec{\omega} = \vec{0} \quad \forall t \in I$$

Del resto, l'operatore lineare di piazzamento nella (4.4.1) è  $\hat{\tau}_t = R = \mathbb{1}_3$ , quindi  $\dot{R} = 0 \Rightarrow A = 0$ .

#### 2. Moto *rotatorio*.

In questo caso, abbiamo già ricavato dalle (4.2.26), (4.2.28) che

$$R_t = R_{(\varphi(t), \vec{k})}, \quad A = \dot{R}_t R_t^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k} \quad \forall t \in I,$$

dove  $\vec{k}$ , è parallelo all'asse (fisso) di rotazione.

3. Moto elicoidale.

Anche in questo caso, abbiamo ricavato che

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}(t)\vec{k} \quad \forall t \in I ,$$

dove  $\vec{k}$ , questa volta, è parallelo all'asse del moto elicoidale.

4. Moto polare.

In questo caso, tenendo conto della (4.3.12), la matrice dell'operatore di spin  $A(t)$  risulta (4.5.2)

$$[A]^{\mathcal{B}_0} := [\dot{R}_t R_t^T]^{\mathcal{B}_0} = \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & -(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) & \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta \\ \hline (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) & 0 & -(\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta) \\ \hline -(\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta) & (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta) & 0 \end{array} \right] .$$

Pertanto, in base alla (4.4.16), il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$ , sulla terna fissa, assume la forma

$$(4.5.3) \quad \vec{\omega} = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta)\vec{e}_1(0) + (\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi)\vec{e}_2(0) + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)\vec{e}_3(0) .$$

Più avanti ci serviranno le componenti di  $\vec{\omega}$  sulla terna mobile. Per calcolarle, basta osservare che un qualunque vettore  $\vec{u}$  si può scomporre sia sulla terna fissa, sia sulla terna mobile in base alla inversa della (4.3.3)

$$\vec{u} = \mathbf{e}(0) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{e}(t)[R_t]^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Pertanto, la velocità angolare sulla terna mobile si trova post-moltiplicando la colonna delle componenti di (4.5.3) per la matrice  $[R_t]^T$

$$(4.5.4) \quad \vec{\omega} = (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta)\vec{e}_1(t) + (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi)\vec{e}_2(t) + (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)\vec{e}_3(t) .$$

**Esercizio 4.5.1.** Dimostrare che il campo di velocità di un rigido è sempre equiproiettivo partendo dalla formula di Poisson (4.5.1).

### Struttura del campo di velocità di un rigido

Studieremo in questa sezione la struttura che il più generale campo di velocità di un rigido assume ad un generico istante fissato  $\bar{t} \in I$ .

**Teorema 4.5.1** (G. Mozzi, 1730-1813). Il campo di velocità di un rigido  $\mathcal{R}$  è elicoidale o eventualmente degenero in un atto di moto rotatorio o traslatorio. Se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , esiste un unico asse parallelo a  $\vec{\omega}$  e solidale a  $\mathcal{R}$ , detto asse di Mozzi (o asse istantaneo di moto), i cui punti  $\Omega$  soddisfano l'equazione parametrica

$$(4.5.5) \quad \Omega - O = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|^2} + \lambda \vec{\omega} \quad \lambda \in \mathbb{R}, O \in \mathcal{R} .$$

Rispetto a tale asse il campo di velocità di  $\mathcal{R}$  si può scomporre come

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P\parallel} + \vec{v}_{P\perp} ,$$

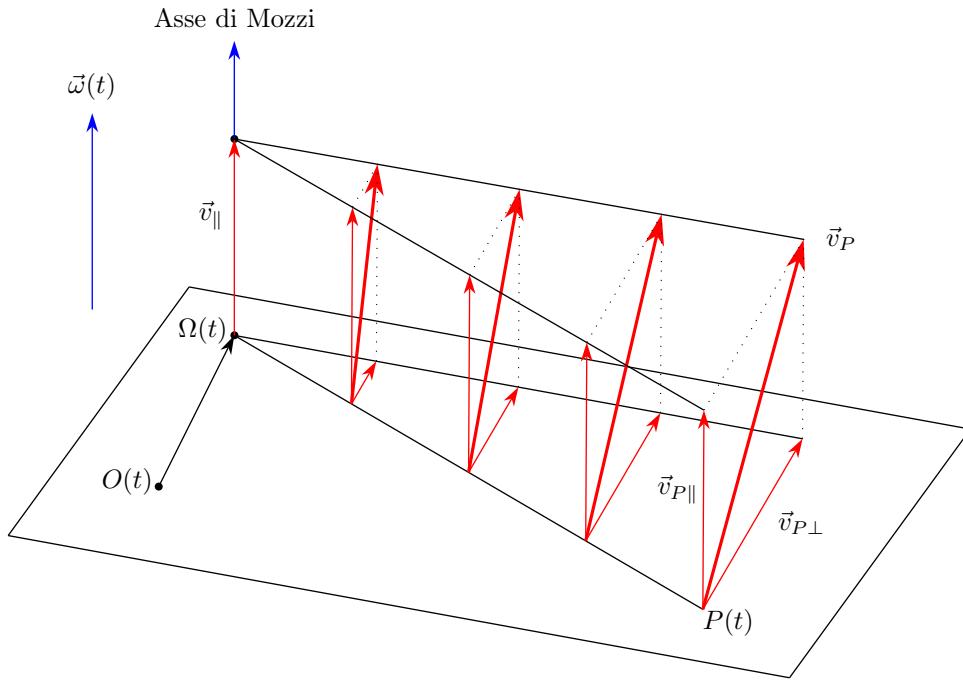
dove il componente parallelo all'asse

$$\vec{v}_{P\parallel} = \vec{v}_\Omega \quad \forall \Omega \in \text{asse di Mozzi}$$

ha una struttura traslatoria (o uniforme), mentre il componente ortogonale all'asse

$$\vec{v}_{P\perp} = \vec{\omega} \times (P - \Omega)$$

ha una struttura rotatoria.



*Dimostrazione.* Supponiamo di conoscere due vettori caratteristici  $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$  e che  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ . La (4.5.1) ci permette di calcolare la velocità di ogni punto  $P \in \mathcal{R}$  e di scomporla rispettivamente nel componente parallelo a  $\vec{\omega}$  e in quello ortogonale

$$(4.5.6) \quad v_{P\parallel} = \vec{v}_P \cdot vers(\vec{\omega}), \quad \vec{v}_{P\parallel} = v_{P\parallel} vers(\vec{\omega}), \quad \vec{v}_{P\perp} = \vec{v}_P - \vec{v}_{P\parallel}$$

Osserviamo che il campo  $\vec{v}_{P\parallel}$  è uniforme poiché

$$v_{P\parallel} = \vec{v}_P \cdot vers(\vec{\omega}) = (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times (P - O)) \cdot vers(\vec{\omega}) = \vec{v}_O \cdot vers(\vec{\omega}) = v_{O\parallel} \quad \forall P, O \in \mathcal{R}$$

Inoltre, il componente ortogonale soddisfa la relazione

$$(4.5.7) \quad \vec{v}_{P\perp} = \vec{v}_{O\perp} + \vec{\omega} \times (P - O),$$

essendo  $v_{P\parallel} = v_{O\parallel}$ . La (4.5.7) implica che  $\vec{v}_{P\perp}$  è invariante per traslazione di  $P$  lungo la retta per  $P$  e parallela a  $\vec{\omega}$ . Infatti, se  $P'$  appartiene a tale retta

$$(P - P') \times \vec{\omega} = \vec{0}$$

e allora

$$\vec{v}_{P\perp} - \vec{v}_{P'\perp} = \vec{\omega} \times ((P - O) - (P' - O)) = \vec{\omega} \times (P - P') = \vec{0}.$$

Vediamo, ora, se esistono punti  $\Omega$  dello spazio solidale a  $\mathcal{R}$  che hanno solo velocità parallela a  $\vec{\omega}$ , cioè soddisfano

$$(4.5.8) \quad \vec{v}_{\Omega\perp} = \vec{0}.$$

Esprimendo la velocità  $\vec{v}_{\Omega\perp}$  mediante la (4.5.7), con il punto incognito  $\Omega$  al posto di  $P$ , la (4.5.8), equivale a

$$\vec{v}_{O\perp} + \vec{\omega} \times (\Omega - O) = \vec{0},$$

ovvero

$$(4.5.9) \quad (\Omega - O) \times \vec{\omega} = \vec{v}_{O\perp},$$

che è un'equazione del tipo (2.1.15), già studiata nel Cap. 2. Si presentano due alternative. Se  $\vec{v}_{O\perp} = \vec{0}$ , siamo estremamente fortunati: il centro di riduzione  $O$  è uno dei punti che stiamo cercando. Infatti, in questo caso la (4.5.9) diventa omogenea, ammette come soluzioni tutti e soli i vettori  $(\Omega - O)$  paralleli ad  $\vec{\omega}$ . Quindi, gli altri punti  $\Omega$  sono quelli della retta parallela a  $\vec{\omega}$  e passante per  $O$ .

Se, invece,  $\vec{v}_{O\perp} \neq \vec{0}$ , sulla base della (2.1.17), tutte le soluzioni della (4.5.9) sono date dalla (4.5.5).

Infine, se nella (4.5.7) si sceglie come centro di riduzione un punto  $\Omega$  dell'asse di Mozzi al posto di un generico punto  $O$ , si vede che

$$\vec{v}_{P\perp} = \vec{v}_{\Omega\perp} + \vec{\omega} \times (P - \Omega) = \vec{\omega} \times (P - \Omega),$$

cioè  $\vec{v}_{P\perp}$  è rotatorio intorno all'asse di Mozzi. □

Dal Teorema precedente segue subito

**Teorema 4.5.2** (di classificazione). *Scelto un generico punto  $O \in \mathcal{R}$  e definito l'invariante scalare cinematico come*

$$(4.5.10) \quad \mathcal{I} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \quad (\text{non dipende da } O),$$

*il campo di velocità di un rigido appartiene alle categorie della Tabella 4.5.2*

*Dimostrazione.* Mostriamo che, se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  e  $\mathcal{I} = 0$ , l'atto di moto è rotatorio. A questo scopo, basta osservare che, in generale, il componente di  $\vec{v}_P$  parallelo a  $\vec{\omega}$  si scrive

$$\vec{v}_{P\parallel} = \frac{\mathcal{I}}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}$$

ed è il componente traslatorio del campo elicoidale. Dunque, se  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  esso si annulla se e solo se

$$\mathcal{I} = 0$$

In tal caso, sopravvive solo il componente rotatorio  $\vec{v}_{P\perp}$ . □

Tabella 4.5.1: atto di moto rigido

$\mathcal{I} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega}$	$\vec{\omega}$	$\vec{v}_O$	categoria	linee di flusso
$\neq 0$			Elicoidale	eliche cilindriche
$= 0$	$\neq \vec{0}$		Rotatorio	circonferenze
$= 0$	$= \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	Traslatorio	rette parallele
$= 0$	$= \vec{0}$	$= \vec{0}$	Nullo	

**N.B.** Se ad un istante  $\bar{t}$  il campo di velocità è elicoidale, gode delle proprietà della Sez 4.2.1.

**Definizione 4.5.1.** *Se ad un istante  $\bar{t} \in I$  il campo di velocità è rotatorio, l'asse di Mozzi si dice asse d'istantanea rotazione (AIR) e i suoi punti hanno velocità nulla all'istante  $\bar{t}$ .*

Il termine instantanea si riferisce al fatto che il campo di velocità ad un istante precedente o successivo a  $\bar{t}$ , non solo può cambiare asse di Mozzi, ma può cambiare anche categoria.

**Esempio 4.5.1.** *Moto polare.*

Poichè  $\vec{v}_O = \vec{0} \forall t \in I$ ,  $\mathcal{I} = 0$ , il campo di velocità è rotatorio e l'asse di Mozzi è asse d'istantanea rotazione. Quindi passa per  $O$  ed è parallelo a  $\vec{\omega}(t)$ , dunque la sua direzione dipende dal tempo.

**Esempio 4.5.2.** *Moto elicoidale*

Nel caso di moto elicoidale (rispettivamente rotatorio) l'asse di Mozzi non dipende dal tempo e coincide con l'asse del moto (rispettivamente asse di rotazione).

## 4.5.2 Campo delle accelerazioni di un rigido

Derivando rispetto al tempo la (4.5.1), otteniamo

$$(4.5.11) \quad \begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) + \vec{\omega} \times (\vec{v}_P - \vec{v}_O) = \\ &= \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) - |\vec{\omega}|^2(P - O)_\perp , \end{aligned}$$

dove con  $(P - O)_\perp$  abbiamo denotato il componente del vettore  $(P - O)$  ortogonale a  $\vec{\omega}$ , come nella (2.1.14). Si osservi che il termine  $\dot{\vec{\omega}} \times (P - O)$  è un componente dell'accelerazione, appartenente al piano ortogonale al vettore  $P - O$ .

**Esempio 4.5.3.** *Moto rotatorio*

*Se scegliamo  $O$  sull'asse di rotazione la (4.5.11) si riduce a*

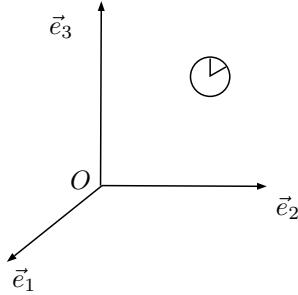
$$(4.5.12) \quad \vec{a}_P = \dot{\vec{\omega}} \times (P - O) - |\vec{\omega}|^2(P - O)_\perp .$$

Si osservi che il termine  $\dot{\vec{\omega}} \times (P - O)$  è un componente dell'accelerazione, ortogonale al piano passante per l'asse di rotazione e per il punto  $P$  e si annulla se  $|\vec{\omega}|$  è costante nel tempo. Inoltre, il termine  $-|\vec{\omega}|^2(P - O)_\perp$  rappresenta il componente *assipeto* dell'accelerazione, cioè il componente diretto da  $P$  all'asse di rotazione e ad esso ortogonale.

## 4.6 Cinematica Relativa

Sappiamo per esperienza quotidiana, che il moto dei corpi è un concetto relativo a un osservatore o riferimento spazio-temporale:

$$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) + \text{oologio}$$



In particolare, vedremo che la derivata rispetto al tempo di un vettore non è uguale per osservatori che si muovono uno rispetto all'altro di moto arbitrario. Quindi, i vettori velocità ed accelerazione dipendono dall'osservatore, come vedremo in seguito. Nel seguito, con abuso di linguaggio, identifieremo ogni osservatore con la terna rigida alla quale è solidale.

### 4.6.1 Formula di derivazione cinematica

Consideriamo un vettore dipendente dal tempo e osserviamo che il suo vettore derivato rispetto al tempo dipende dal riferimento scelto. Ad esempio, se consideriamo un vettore solidale a un rigido  $\mathcal{R}$ , questo avrà derivato nullo rispetto a una terna solidale a  $\mathcal{R}$  o, come si usa dire, nel corpo, mentre avrà derivato non nullo rispetto a una terna fissa o, come si dice, nello spazio. Vediamo quale è in generale la relazione fra i due vettori derivati. A tale scopo, nella (4.4.6) prendiamo il punto  $P$  coincidente, di volta in volta, con l'estremo dei vettori  $(O(t), \vec{e}_1(t))$ ,  $(O(t), \vec{e}_2(t))$ ,  $(O(t), \vec{e}_3(t))$ , cioè con gli estremi dei versori della terna  $((O(t), \vec{e}(t))$  solidale a  $\mathcal{R}$ . Allora, si ottiene

$$(4.6.1) \quad \dot{\vec{e}}_k(t) = \vec{\omega} \times \vec{e}_k(t) \quad k = 1, 2, 3 ,$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo denotato con il puntino la  $\frac{d}{dt}|_{\text{spazio}}$ . Dunque, la derivata temporale di un versore è sempre ortogonale al versore stesso. Poi, consideriamo un generico vettore  $\vec{u}(t) \in E_3$  e scomponiamolo sia sulla base fissa  $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ , sia sulla base mobile  $(\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$

$$\vec{u}(t) = U_1 \vec{E}_1 + U_2 \vec{E}_2 + U_3 \vec{E}_3 = u_1 \vec{e}_1(t) + u_2 \vec{e}_2(t) + u_3 \vec{e}_3(t)$$

Il vettore derivato rispetto al tempo, nello spazio è

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}}{dt}|_{\text{spazio}} &= \dot{U}_1 \vec{E}_1 + \dot{U}_2 \vec{E}_2 + \dot{U}_3 \vec{E}_3 \\ &= \dot{u}_1 \vec{e}_1(t) + \dot{u}_2 \vec{e}_2(t) + \dot{u}_3 \vec{e}_3(t) + u_1 \dot{\vec{e}}_1(t) + u_2 \dot{\vec{e}}_2(t) + u_3 \dot{\vec{e}}_3(t) \\ &\stackrel{(4.6.1)}{=} (\dot{u}_1 \vec{e}_1(t) + \dot{u}_2 \vec{e}_2(t) + \dot{u}_3 \vec{e}_3(t)) + u_1 \vec{\omega} \times \vec{e}_1(t) + u_2 \vec{\omega} \times \vec{e}_2(t) + u_3 \vec{\omega} \times \vec{e}_3(t) \\ &= (\dot{u}_1 \vec{e}_1(t) + \dot{u}_2 \vec{e}_2(t) + \dot{u}_3 \vec{e}_3(t)) + \vec{\omega} \times \vec{u} \end{aligned}$$

Pertanto, segue che

**Proposizione 4.6.1.** Sia  $\vec{u}(t)$  un generico vettore di  $E_3$  dipendente dal tempo e consideriamo due terne rigide in moto una rispetto all'altra. Per convenzione, chiameremo una la terna nello spazio, l'altra la terna nel corpo. Allora, i vettori derivati di  $\vec{u}(t)$  soddisfano la relazione

$$(4.6.2) \quad \frac{d\vec{u}}{dt} |_{spazio} = \frac{d\vec{u}}{dt} |_{corpo} + \vec{\omega} \times \vec{u},$$

dove  $\vec{\omega}$  è la velocità angolare della terna nel corpo rispetto a quella nello spazio.

Osserviamo che i vettori derivati, assoluto e relativo, di un vettore variabile nel tempo coincidono se e solo se:

- $\omega = \vec{0}$ , cioè il moto di una terna rispetto all'altra è traslatorio;
- oppure  $\vec{u} \parallel \vec{\omega} \forall t$ , cioè il vettore da derivare è sempre diretto come l'asse di Mozzi.

**Corollario 4.6.1.** Il vettore  $\vec{\omega}$  ha derivati uguali nello spazio e nel corpo, cioè

$$(4.6.3) \quad \dot{\vec{\omega}} := \frac{d\vec{\omega}}{dt} |_{spazio} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} |_{corpo}$$

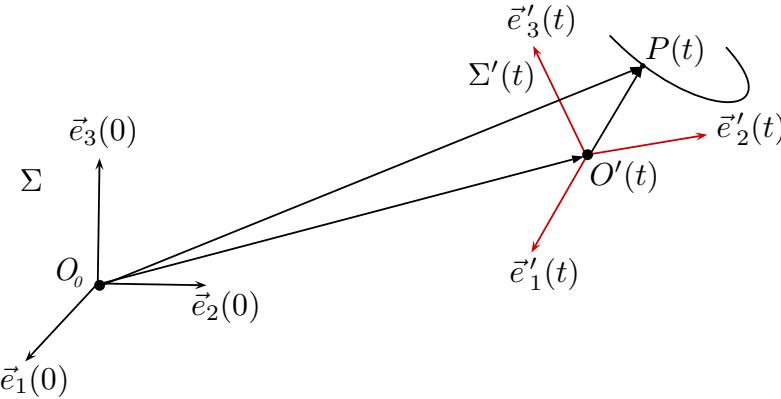
**Esercizio 4.6.1.** Calcolare i vettori derivati rispetto al tempo dei versori della base mobile adattata alle coordinate cilindriche e sferiche, tramite la formula di derivazione cinematica (4.6.2)

**Esercizio 4.6.2.** Dimostrare che il modulo di ogni vettore  $\vec{u}(t)$  ha derivate rispetto al tempo uguali nello spazio e nel corpo, cioè

$$(4.6.4) \quad \frac{d|\vec{u}|}{dt} |_{spazio} = \frac{d|\vec{u}|}{dt} |_{corpo}$$

## 4.6.2 Composizione delle velocità

Consideriamo due terne  $\Sigma := (O_0, \mathbf{e}(0))$  e  $\Sigma'(t) := (O'(t), \mathbf{e}'(t))$  in moto rigido una rispetto all'altra. Per convenzione, chiameremo  $\Sigma_0$  terna fissa e  $\Sigma'(t)$  terna mobile.



Vogliamo studiare il moto di un punto materiale che si muove rispetto ad entrambe le terne e, in particolare, come la sua velocità viene misurata dai due osservatori  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ . Denoteremo con

$$\vec{v}_P^{(ass)} : \quad \text{la velocità di } P \text{ valutata da } \Sigma$$

- $(\vec{v}_{O'}, \vec{\omega})$  : la velocità di  $O'$  e la velocità angolare di  $\Sigma'(t)$  valutate da  $\Sigma$   
 $\vec{v}_P^{(rel)}$  : velocità di  $P$  valutata da  $\Sigma'(t)$

Vale il

**Teorema 4.6.1** (Galileo, 1564-1642).

$$(4.6.5) \quad \vec{v}_P^{(ass)} = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)},$$

dove la velocità  $\vec{v}_P^{(tr)}$  è detta velocità di trascinamento di  $P$  in  $\Sigma'(t)$  ed è pari a

$$(4.6.6) \quad \vec{v}_P^{(tr)} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O') .$$

*Dimostrazione.* Scomponiamo il vettore posizione di  $P$  rispetto ad  $O$  come

$$P - O_0 = (P - O') + (O' - O_0)$$

e applichiamo la formula di derivazione cinematica (4.6.2) a tutti i suoi termini. Otterremo

$$\begin{aligned} (4.6.7) \quad \frac{d}{dt|_{\Sigma}}(P - O_0) &= \frac{d}{dt|_{\Sigma}}(P - O') + \frac{d}{dt|_{\Sigma}}(O' - O_0) \\ &= \frac{d}{dt|_{\Sigma'}}(P - O') + \vec{\omega} \times (P - O') + \vec{v}_{O'} \\ &= \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{\omega} \times (P - O') + \vec{v}_{O'} . \end{aligned}$$

□

Osserviamo che la differenza tra le velocità di  $P$  in  $\Sigma$  e  $\Sigma'(t)$  è data dal vettore  $\vec{v}_P^{(tr)}$ , che dipende dalla velocità di  $O'$ , da  $\vec{\omega}$  e dalla posizione di  $P$  rispetto ad  $O'$ . Se ad un istante fissato  $\vec{v}_P^{(rel)} = \vec{0}$ , il vettore  $\vec{v}_P^{(tr)}$  rappresenta la velocità di un punto solidale alla terna  $\Sigma'(t)$  che, quindi, viene trascinato nel moto di tale terna rispetto a  $\Sigma$ . Ciò spiega il motivo del termine velocità di trascinamento per la (4.6.6).

### Casi particolari

- Moto traslatorio.

Se la terna  $\Sigma'(t)$  si muove di moto traslatorio rispetto a  $\Sigma$ ,  $\vec{\omega} = \vec{0}$ . In questo caso

$$(4.6.8) \quad \vec{v}_P^{(tr)} = \vec{v}_{O'} ,$$

quindi il campo della velocità di trascinamento ha una struttura uniforme.

- Moto rotatorio

Se le due terne si muovono di moto rotatorio una rispetto all'altra, esiste un asse che rimane fisso sia in  $\Sigma$ , sia in  $\Sigma'(t)$ . Detto  $(O_0 \equiv O' = O, \vec{e}_3(0) \equiv \vec{e}'_3(t))$  tale asse, si ha che  $\vec{v}_{O'} = \vec{0}$  e  $\vec{\omega} = \omega(t) \vec{e}_3$ . Allora

$$(4.6.9) \quad \vec{v}_P^{(tr)} = \omega(t) \vec{e}_3 \times (P - O) ,$$

quindi il campo della velocità di trascinamento ha una struttura rotatoria intorno all'asse  $\vec{e}_3$ .

### 4.6.3 Composizione delle accelerazioni

Vogliamo studiare le accelerazioni del punto  $P$  misurate dai due osservatori  $\Sigma$  e  $\Sigma'(t)$ . Denoteremo con

$$\vec{a}_P^{(ass)} : \quad \text{l'accelerazione di } P \text{ , valutata da } \Sigma$$

$(\vec{a}_{O'}, \dot{\vec{\omega}})$  : l'accelerazione di  $O'$  e l'accelerazione angolare di  $\Sigma'(t)$  valutate da  $\Sigma$

$$\vec{a}_P^{(rel)} : \quad \text{accelerazione di } P \text{ valutata da } \Sigma'(t)$$

Vale il

**Teorema 4.6.2** (Coriolis, 1792-1843).

$$(4.6.10) \quad \vec{a}_P^{(ass)} = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(Cor)} ,$$

dove  $\vec{a}_P^{(tr)}$ ,  $\vec{a}_P^{(Cor)}$  sono dette rispettivamente accelerazione di trascinamento e accelerazione di Coriolis (o complementare) di  $P$  e sono pari a

$$(4.6.11) \quad \vec{a}_P^{(tr)} = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O'))$$

$$(4.6.12) \quad \vec{a}_P^{(Cor)} = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_P^{(rel)} .$$

*Dimostrazione.* Derivando rispetto al tempo la (4.6.5), otterremo

$$(4.6.13) \quad \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P = \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P^{(rel)} + \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P^{(tr)}$$

Tenendo conto di

$$(4.6.14) \quad \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P^{(rel)} = \frac{d}{dt}_{|\Sigma'} \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{\omega} \times \vec{v}_P^{(rel)} \\ = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{\omega} \times \vec{v}_P^{(rel)}$$

$$(4.6.15) \quad \frac{d}{dt}_{|\Sigma} \vec{v}_P^{(tr)} = \frac{d}{dt}_{|\Sigma} (\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times (P - O')) = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{v}_P - \vec{v}_{O'}) \\ = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times (P - O') + \vec{\omega} \times (\vec{v}_P^{(rel)} + \vec{\omega} \times (P - O')) .$$

□

Osserviamo che la differenza tra l'accelerazione di  $P$  in  $\Sigma$  e in  $\Sigma'(t)$  consta di 2 termini: il primo,  $\vec{a}_P^{(tr)}$ , dipende dall'accelerazione di  $O'$ , da  $\vec{\omega}$  e dalla sua derivata, dalla posizione di  $P$  rispetto a  $O'$ . Il secondo termine,  $\vec{a}_P^{(Cor)}$ , è ortogonale a  $\vec{\omega}$  e alla velocità di  $P$  in  $\Sigma'(t)$ . È detto accelerazione di Coriolis. Se ad un dato istante,  $\vec{v}_P^{(rel)} = \vec{0}$ , il termine (4.6.11) è l'unico che sopravvive, quindi, rappresenta l'accelerazione di un punto solidale alla terna  $\Sigma'(t)$ ; per questo motivo, esso viene detto accelerazione di trascinamento.

#### Casi particolari

- Moto traslatorio.

Se la terna  $\Sigma'(t)$  si muove di moto traslatorio rispetto a  $\Sigma$ ,  $\vec{\omega} = \vec{0}$  implica che

$$(4.6.16) \quad \vec{a}_P^{(tr)} = \vec{a}_{O'}$$

$$(4.6.17) \quad \vec{a}_P^{(Cor)} = \vec{0}.$$

Quindi il campo dell'accelerazione di trascinamento è uniforme e quello dell'accelerazione di Coriolis è nullo. Inoltre, se il moto traslatorio è *rettilineo* ed *uniforme*, anche  $\vec{a}_P^{(tr)} = \vec{0}$ , quindi

$$\vec{a}_P^{(ass)} = \vec{a}_P^{(rel)} \quad \forall P \in \mathcal{E}_3.$$

Dunque, tutti gli osservatori che si muovono di reciproco moto *traslatorio rettilineo uniforme*, attribuiscono ad un generico punto materiale  $P$  la stessa accelerazione (Principio d'Invarianza Galileiana).

- Moto rotatorio

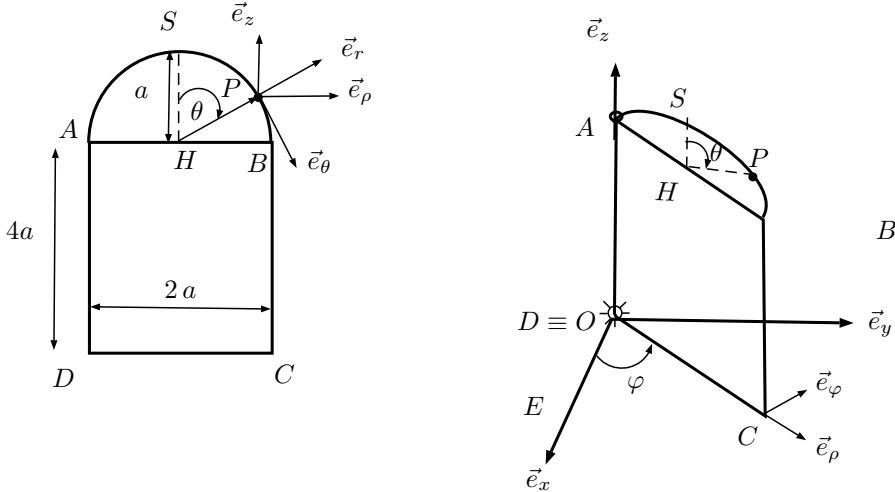
Se la terna  $\Sigma'(t)$  si muove di moto rotatorio rispetto a  $\Sigma$ ,  $O_0 \equiv O'$ ,  $\vec{\omega} = \omega(t) \vec{e}_3$  implicano che

$$(4.6.18) \quad \vec{a}_P^{(tr)} = \dot{\omega} \vec{e}_3 \times (P - O) - |\vec{\omega}|^2 (P - O)_\perp,$$

$$(4.6.19) \quad \vec{a}_P^{(Cor)} = 2\omega \vec{e}_3 \times \vec{v}_P^{(rel)}.$$

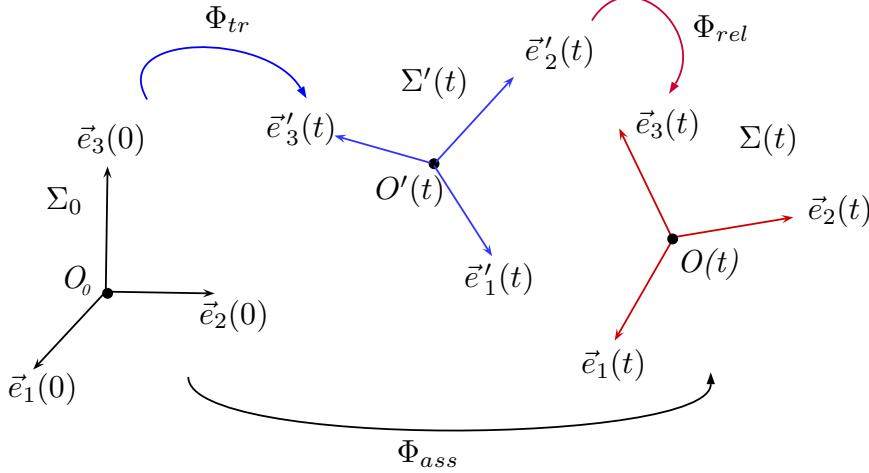
Quindi, il campo dell'accelerazione di trascinamento è la somma di un termine trasversale, dipendente dall'accelerazione angolare, che ha una struttura rotatoria intorno all'asse  $\vec{e}_3$  e di un termine "assipeto" dipendente linearmente dalla distanza di  $P$  dall'asse di rotazione. Infine, l'accelerazione di Coriolis sta nel piano ortogonale all'asse di rotazione ed è ortogonale a  $\vec{v}_P^{(rel)}$ .

**Esercizio 4.6.3.** Si consideri il modello del Tema d'esame del 29 Gennaio 2018. Si calcolino la velocità e l'accelerazione del punto  $P$  in funzione delle coordinate libere  $(\varphi, \theta)$ , applicando il Teorema di Galileo e quello di Coriolis alla terna fissa  $\Sigma = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  e a quella mobile  $\Sigma'(t) = (O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ .



#### 4.6.4 Composizione delle velocità angolari

In questa sezione studieremo in dettaglio la composizione di due moti rigidi qualsiasi, della parte lineare dei loro componenti polari, degli operatori di spin e delle loro velocità angolari. Precisamente, consideriamo una terna fissa  $\Sigma_0 = (O_0, \mathbf{e}(0))$  e due terne in moto  $\Sigma'(t) = (O'(t), \mathbf{e}'(t))$  e  $\Sigma(t) = (O(t), \mathbf{e}(t))$ . La terna  $\Sigma'(t)$  sarà detta *intermedia*, la terna  $\Sigma(t)$  *solidale*. Chiameremo moto di *trascinamento*  $\Phi_{tr}$  e moto *assoluto*  $\Phi_a$ , rispettivamente, quello della terna intermedia e della terna solidale rispetto alla terna fissa. Chiameremo moto *relativo*  $\Phi_{rel}$  quello della terna solidale rispetto alla terna intermedia.



Posto

$$(4.6.20) \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}'(t)[R_{rel}] , \quad \mathbf{e}'(t) = \mathbf{e}(0)[R_{tr}] , \quad \mathbf{e}(t) = \mathbf{e}(0)[R_{ass}] ,$$

i corrispondenti operatori di spin sono

$$(4.6.21) \quad A_{rel} = \dot{R}_{rel}R_{rel}^T , \quad A_{tr} = \dot{R}_{tr}R_{tr}^T , \quad A_{ass} = \dot{R}_{ass}R_{ass}^T .$$

Concatenando le prime due equazioni della (4.6.20) e confrontando il risultato con la terza segue che la matrice di piazzamento del moto composto

$$\Phi_{ass} = \Phi_{rel} \circ \Phi_{tr}$$

è data da

$$(4.6.22) \quad [R_{ass}] = [R_{tr}][R_{rel}] .$$

**Teorema 4.6.3** (Frisi 1728-1784). *Detta  $\vec{\omega}_{tr}$  la velocità angolare della terna intermedia rispetto alla terna fissa e  $\vec{\omega}_{rel}$  la velocità angolare della terna solidale rispetto a quella intermedia, la velocità angolare della terna solidale rispetto a quella fissa è pari alla somma delle suddette velocità angolari*

$$(4.6.23) \quad \vec{\omega}_{ass} = \vec{\omega}_{tr} + \vec{\omega}_{rel} .$$

*Dimostrazione.* L'operatore di spin del moto assoluto è dato da

$$A_{ass} = \dot{R}_{ass}R_{ass}^T ,$$

quindi la matrice associata rispetto alla base fissa risulta per la (4.6.22)

$$(4.6.24) \quad [A_{ass}] = \frac{d}{dt} ([R_{tr}][R_{rel}]) ([R_{tr}][R_{rel}])^T = ([\dot{R}_{tr}][R_{rel}] + [R_{tr}]\dot{[R_{rel}}])[R_{rel}]^T[R_{tr}]^T = \\ = [\dot{R}_{tr}][\underline{R_{rel}}]\overline{[R_{rel}]}^T[R_{tr}]^T + [R_{tr}]\dot{[R_{rel}}][R_{rel}]^T[R_{tr}]^T = [A_{tr}] + [R_{tr}][A_{rel}][R_{tr}]^{-1}$$

La tesi si ottiene osservando che la matrice  $[A_{tr}]$  è la matrice rappresentativa dell'operatore di spin nel moto di *trascinamento*, rispetto alla base fissa;  $[A_{rel}]$  è la matrice rappresentativa dell'operatore di spin nel moto *relativo*, rispetto alla base *intermedia*, quindi  $[R_{tr}][A_{rel}][R_{tr}]^T$  è la matrice rappresentativa dello stesso operatore rispetto alla base fissa. Infatti, in base alla (4.4.13)

$$\vec{\omega}_{rel} \times \vec{y} = \mathbf{e}(0)[A_{rel}]_{\mathbf{e}(0)}^{\mathbf{e}(0)}[\vec{y}]^{\mathbf{e}(0)} = \mathbf{e}(0)[R_{tr}][A_{rel}][R_{tr}]^{-1}[\vec{y}]^{\mathbf{e}(0)} \stackrel{(4.6.20)}{=} \mathbf{e}'(t)[A_{rel}][\vec{y}]^{\mathbf{e}'(t)}$$

□

**Corollario 4.6.2.** *Supponiamo che le due terne mobili siano entrambe solidali a un rigido. Allora  $R_{rel}$  è indipendente dal tempo, quindi  $A_{rel} = 0_{E_3}$ ,  $\vec{\omega}_{rel} = \vec{0}$  e  $\vec{\omega}_{ass} = \vec{\omega}_{tr}$ . Pertanto, le velocità angolari di tutte le terne solidali a un rigido coincidono.*

**Esempio 4.6.1.** Consideriamo un rigido con un punto fisso  $O$ . Applicando il Teorema di Frisi alla terna fissa  $(O, \mathbf{e}(0))$ , alle due terne intermedie  $(O, \mathbf{e}'(t))$  e  $(O, \mathbf{e}''(t))$ , a quella solidale al rigido  $(O, \mathbf{e}(t))$ , già utilizzate nella dimostrazione del Teorema di Eulero 4.3.1, si ricava che la velocità angolare  $\vec{\omega}$  del moto polare, sulla terna non ortogonale  $(O; \vec{e}_3(0), \vec{n}(t), \vec{e}_3(t))$ , assume la forma

$$(4.6.25) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_3(0) + \dot{\theta} \vec{n}(t) + \dot{\psi} \vec{e}_3(t) .$$

**Esercizio 4.6.4.** Verificare che la (4.6.25) equivale alla (4.5.3) e alla (4.5.4).

## 4.7 Moto di precessione

In questa sezione, studieremo un caso particolare di moto polare che ha notevoli applicazioni al moto delle trottole e a quello del pianeta Terra: il moto di precessione.

**Definizione 4.7.1.** Il moto di precessione è un moto rigido che preserva un punto  $O$  del modello (moto polare) e un angolo compreso tra due assi concorrenti in  $O$ , il primo fisso nello spazio, detto asse di precessione, il secondo solidale al rigido, detto asse di figura.

Tale moto si può realizzare, per esempio, montando l'asse di figura del modello su un telaio rigido in modo che il modello sia libero di ruotare intorno a tale asse e vincolando, a sua volta, il telaio a ruotare intorno all'asse di precessione.

Il suo flusso sarà

$$\Phi_t : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{E}_3, P_0 \mapsto P(t) = \Phi_t(O) + \hat{\Phi}_t(P_0 - O) = O + R_t(P_0 - O) ,$$

dove l'operatore di rotazione  $R_t$  deve essere un caso particolare di quello del moto polare. Per determinare  $R_t$ , scegliamo come terna fissa  $(O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  con l'asse  $(O; \vec{E}_3)$  coincidente con l'asse di precessione e la terna solidale  $(O; \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$  con l'asse  $(O; \vec{e}_3(t))$  coincidente con l'asse

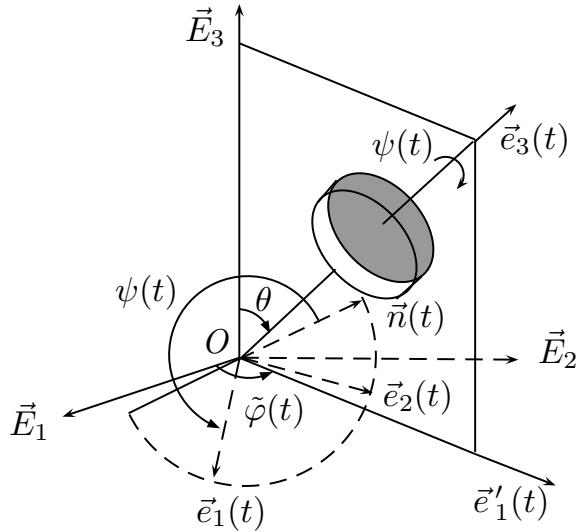


Figura 4.7.1: Moto di precessione

di figura, come nella Fig. 4.7.1. Come coordinate sovrabbondanti possiamo scegliere gli angoli di Eulero della terna solidale rispetto alla terna fissa. Possiamo calcolare il numero dei gradi di libertà con il metodo del bilancio, tenendo conto che l'equazione di vincolo è data da

$$\theta = \text{cost}$$

ed ha matrice Jacobiana di rango massimo. Dunque, il rigido così vincolato ha  $l = 3 - 1 = 2$  gradi di libertà. Come coordinate libere possiamo prendere

- l'angolo  $\tilde{\varphi}$  di rotazione del telaio, cioè l'angolo formato dal piano fisso  $(O; \vec{E}_1, \vec{E}_3)$  e il piano mobile  $(O; \vec{E}_3, \vec{e}_3(t))$ , contenente sia l'asse di precessione sia l'asse di figura;
- l'angolo di Eulero  $\psi$  di rotazione del rigido intorno all'asse di figura, compreso tra  $\vec{n}(t)$  ed  $\vec{e}_1(t)$ .

È facile convincersi che l'angolo  $\tilde{\varphi}$  differisce dall'angolo di precessione  $\varphi$  di Eulero per una costante

$$(4.7.1) \quad \varphi = \tilde{\varphi} + \pi/2 ,$$

quindi la sua derivata rispetto al tempo coincide con quella di  $\varphi$ . Dunque, dal teorema di Eulero sul moto polare segue che

**Proposizione 4.7.1.** *Un moto di precessione si può sempre scomporre in modo unico in due moti rotatori, uno intorno all'asse fisso e uno intorno all'asse di figura.*

Allora, la matrice rappresentativa dell'operatore di rotazione  $R_t$  rispetto alla base fissa  $\mathcal{B}_0 = (\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ , si calcola semplicemente sostituendo la (4.7.1) nella (4.3.12)

$$(4.7.2) \quad [R_t]^{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} -\sin \tilde{\varphi} \cos \psi - \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \sin \psi & \sin \tilde{\varphi} \sin \psi - \cos \tilde{\varphi} \cos \theta \cos \psi & \cos \tilde{\varphi} \sin \theta \\ \cos \tilde{\varphi} \cos \psi - \sin \tilde{\varphi} \cos \theta \sin \psi & -\cos \tilde{\varphi} \sin \psi - \sin \tilde{\varphi} \cos \theta \cos \psi & \sin \tilde{\varphi} \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Analogamente, la matrice di spin del moto di precessione si calcola sostituendo la (4.7.1) e la sua derivata rispetto al tempo nella (4.5.2), ottenendo così

$$(4.7.3) \quad [A]^{\mathcal{B}_0} := [\dot{R}R^T]^{\mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) & \dot{\psi} \sin \tilde{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\tilde{\varphi}} + \dot{\psi} \cos \theta & 0 & -\dot{\psi} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta \\ -\dot{\psi} \sin \tilde{\varphi} \sin \theta & \dot{\psi} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta & 0 \end{bmatrix},$$

e, quindi, il vettore velocità angolare

$$(4.7.4) \quad \vec{\omega} = \dot{\psi} \cos \tilde{\varphi} \sin \theta \vec{E}_1 + \dot{\psi} \sin \tilde{\varphi} \sin \theta \vec{E}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{E}_3.$$

Una maniera più veloce di determinare  $\vec{\omega}$  è quella di utilizzare il teorema di addizione delle velocità angolari. A tale scopo, introduciamo la terna intermedia  $(O; \vec{e}'_1(t), \vec{n}(t), \vec{e}_3(0))$  con  $\vec{e}'_1(t)$  e  $\vec{n}(t)$  versori, rispettivamente, paralleli e ortogonali alla base del telaio e introduciamo la terna solidale  $(O; \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ . Allora, si ha

$$\vec{\omega}_{tr} = \dot{\varphi} \vec{E}_3, \quad \vec{\omega}_{rel} = \dot{\psi} \vec{e}_3(t)$$

Dunque, la velocità angolare totale si può scrivere

$$(4.7.5) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{E}_3 + \dot{\psi} \vec{e}_3(t),$$

cioè somma di due componenti

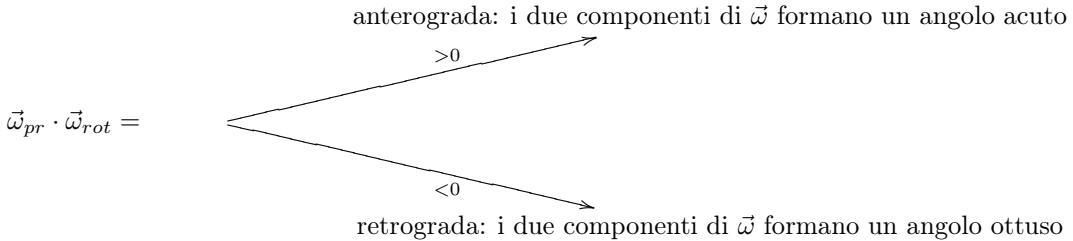
- la velocità angolare di precessione intorno all'asse fisso  $\vec{\omega}_{pr} = \dot{\varphi} \vec{E}_3$
- la velocità angolare di rotazione intorno all'asse di figura  $\vec{\omega}_{rot} = \dot{\psi} \vec{e}_3(t)$ .

Si noti che, scomponendo il versore dell'asse di figura sulla terna fissa, risulta

$$\vec{e}_3(t) = \sin \theta (\cos \tilde{\varphi} \vec{E}_1 + \sin \tilde{\varphi} \vec{E}_2) + \cos \theta \vec{E}_3,$$

quindi la (4.7.4) e la (4.7.5) coincidono.

Se  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ , la precessione si distingue in



Proprietà del moto di precessione:

- (1) I versori  $\vec{E}_3, \vec{\omega}, \vec{e}_3(t)$  sono complanari  $\forall t \in I$ ;
- (2) l'asse di figura  $(O; \vec{e}_3(t))$  descrive un cono circolare di semiapertura  $\theta$  intorno all'asse fisso  $(O; \vec{E}_3)$ , come nella Fig. 4.7.2;

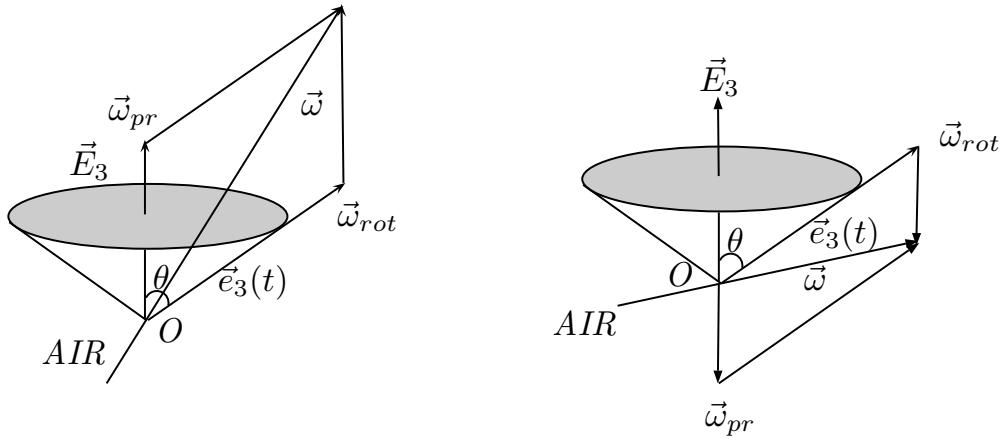


Figura 4.7.2: Coni di precessione anterograda e retrograda

- (3) il campo delle velocità è rotatorio e l'AIR passa per il punto fisso  $O$  (come in ogni moto polare).

La scomposizione (4.7.5) caratterizza il moto di precessione all'interno della classe dei moti polari. Infatti, vale il seguente

**Teorema 4.7.1.** *Un moto polare è una precessione se e solo se esistono due versori, uno fisso nello spazio,  $\vec{c}$ , uno solidale al rigido,  $\vec{k}(t)$ , tali che*

$$(4.7.6) \quad \vec{\omega}(t) = \lambda(t)\vec{c} + \mu(t)\vec{k}(t),$$

dove  $\lambda, \mu : I \rightarrow \mathbb{R}$  sono funzioni regolari del tempo.

*Dimostrazione.* Detto  $\theta$  l'angolo compreso tra  $\vec{c}$  e  $\vec{k}(t)$ , dimostriamo che esso è costante nel tempo. Infatti,

$$\frac{d}{dt}(\cos \theta(t)) = \frac{d}{dt}(\vec{c} \cdot \vec{k}) = \vec{c} \cdot \frac{d}{dt}\vec{k} \stackrel{(4.6.1)}{=} \vec{c} \cdot \vec{\omega} \times \vec{k} \stackrel{(4.7.6)}{=} 0$$

□

Se, in particolare, la precessione è *regolare* (o uniforme), cioè  $\lambda$  e  $\mu$  sono costanti, vale la seguente

**Proposizione 4.7.2.** *In una precessione regolare*

- il modulo della velocità angolare è costante;
- sono costanti gli angoli compresi tra due qualunque dei vettori  $(\vec{c}, \vec{\omega}, \vec{k})$ ;
- l'AIR descrive due coni rotondi detti *coni di Poinsot*, uno intorno all'asse di precessione (cono fisso) e uno intorno all'asse di figura (cono mobile). Tali coni sono tangenti lungo la comune generatrice avente la direzione di  $\vec{\omega}$  e rotolano senza strisciare uno sull'altro. Si vedano le Fig. 4.7.3 e 4.7.4

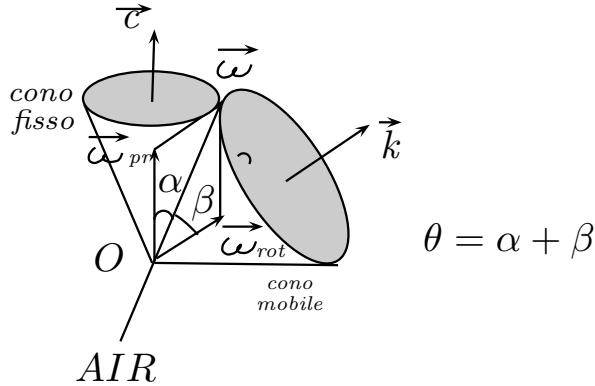


Figura 4.7.3: Coni di Poinsot: precessione anterograda

*Dimostrazione.* .

- Dalla (4.7.6) segue che  $|\vec{\omega}|^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \cos \theta$ . Dal fatto che  $\theta$ ,  $\lambda$  e  $\mu$  sono costanti per ipotesi, segue la tesi.
- Detti  $\alpha$  e  $\beta$  gli angoli compresi rispettivamente tra  $(\vec{c}, \vec{\omega})$  e  $(\vec{\omega}, \vec{k}(t))$ , si ha

$$\cos \alpha = \frac{\vec{c} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\lambda + \mu \cos \theta}{|\vec{\omega}|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{k}(t) \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\mu + \lambda \cos \theta}{|\vec{\omega}|}.$$

- Dal punto precedente segue che, durante il moto, l'AIR descrive un cono rotondo di semi-apertura  $\alpha$  intorno all'asse  $(O; \vec{c})$  e un altro cono di semi-apertura  $\beta$  intorno all'asse  $(O; \vec{k}(t))$ . I due coni hanno in comune la generatrice coincidente con l'asse d'istantea rotazione che, ricordiamo, è il luogo geometrico di tutti e soli i punti del rigido con velocità istantanea nulla.

□

**Esempio 4.7.1.** Il moto di precessione retrograda, quasi-regolare della Terra, con angolo di inclinazione  $\theta$  dell'asse terrestre di circa  $23^\circ$  rispetto all'asse fisso, ortogonale al piano dell'eclittica (orbita solare). Ha un periodo di circa 26.000 anni e causa un anticipo di circa  $20'$ /anno dell'arrivo degli equinozi. Tali giorni corrispondono alle due intersezioni dell'asse dei nodi con l'eclittica, quindi al momento in cui i raggi solari arrivano ortogonali all'asse terrestre. Tale anticipo è noto come precessione degli equinozi. Si veda la Fig. 4.7.5.

## 4.8 Moto rigido piano

Definiamo moto rigido piano quello che lascia invariato l'insieme dei punti di un piano  $\pi$  solidale a  $\mathcal{R}$ . In altri termini,  $\mathcal{R}$  possiede un piano  $\pi$  i cui punti si muovono parallelamente a un piano direttore fisso  $\pi'$ , parallelo a  $\pi$ . Dunque, tutte le linee di corrente sono curve appartenenti a piani paralleli a  $\pi'$ . Abbiamo già incontrato un particolare esempio di moto piano: il moto rotatorio di un

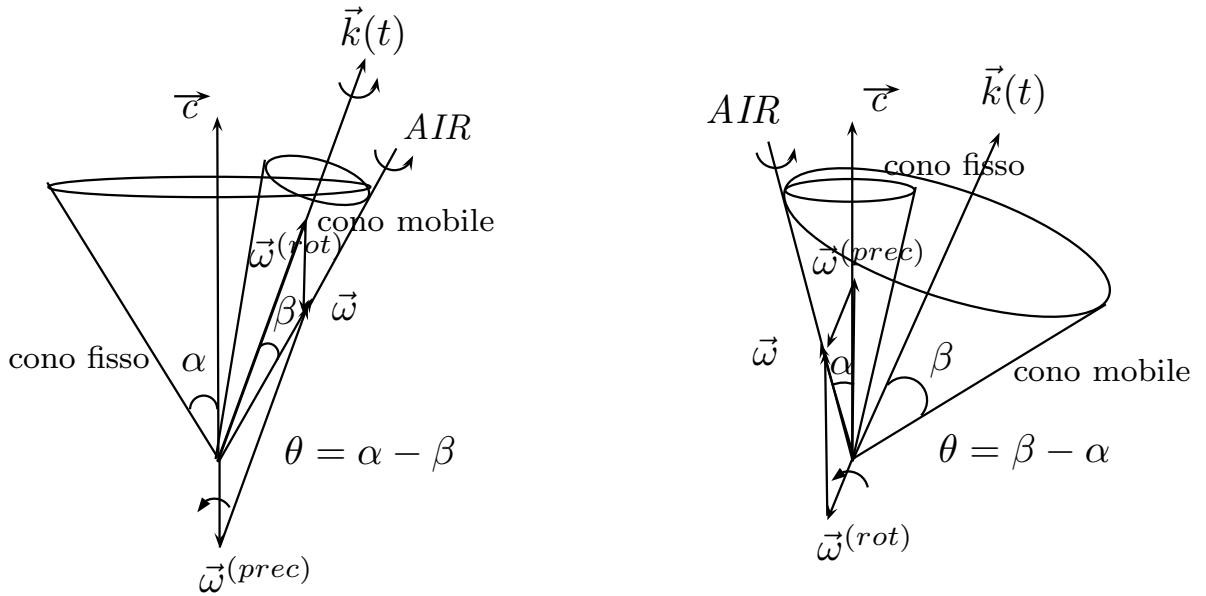


Figura 4.7.4: Coni di Poinsot: precessioni retrograde

rigido tridimensionale attorno ad un asse fisso. Un altro esempio è quello di una lamina vincolata a muoversi nel suo piano.

**Teorema 4.8.1** (Eulero). *Il più generale moto piano si può scomporre (in infiniti modi) in un moto traslatorio, con il vettore della traslazione sempre parallelo al piano direttore, e un moto rotatorio intorno ad un asse ortogonale al piano direttore. Quindi, scelto un arbitrario punto del rigido  $O(t)$ , il suo flusso  $\Phi$  è dato da*

$$(4.8.1) \quad P(t) = \Phi_t(P_0) = \rho_t(\tau_{\vec{s}(t)}) = O(t) + R_t(P_0 - \Phi_t^{-1}(O(t))) = O_0 + \vec{s}(t) + R_t(P_0 - O_0) ,$$

dove,  $\forall t \in I$ ,

$$(4.8.2) \quad O_0 = \Phi_t^{-1}(O(t)) , \quad \vec{s}(t) = (O(t) - O_0) \parallel \pi' , \quad R_t = R_{(\varphi, \vec{k})} \vec{k} \perp \pi' .$$

Di conseguenza,  $\vec{\omega} = \omega(t) \vec{k}$  e il campo di velocità del rigido ad un istante  $\bar{t}$ , o è traslatorio, se  $\omega(\bar{t}) = 0$ , oppure è rotatorio intorno all'AIR, che è sempre parallelo a  $\vec{k}$ . In questo caso, il punto  $\Omega_\pi$  d'intersezione dell'AIR con una qualunque sezione piana  $\pi$  del rigido, parallela al piano direttore, è detto centro d'istantanea rotazione (CIR) relativo a  $\pi$ . La sua posizione è data dal vettore

$$(4.8.3) \quad \Omega_\pi - O = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|^2} \quad O \in \pi .$$

*Dimostrazione.* Sappiamo dal Teorema 4.4.1 che il più generale moto rigido si scomponete (in infiniti modi) in un moto traslatorio composto con un moto polare. Per il moto piano, la traslazione deve

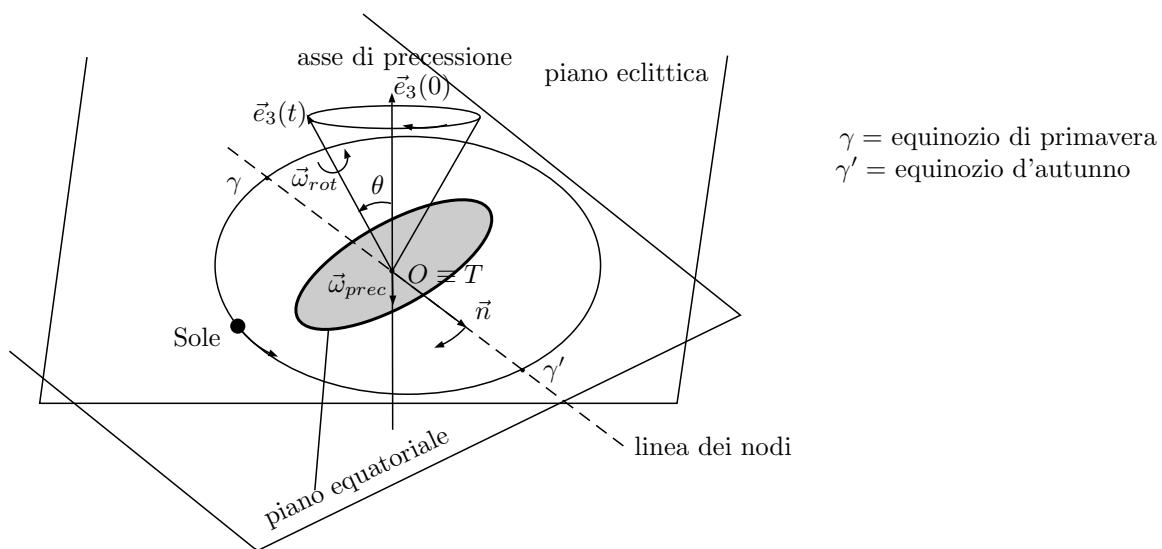
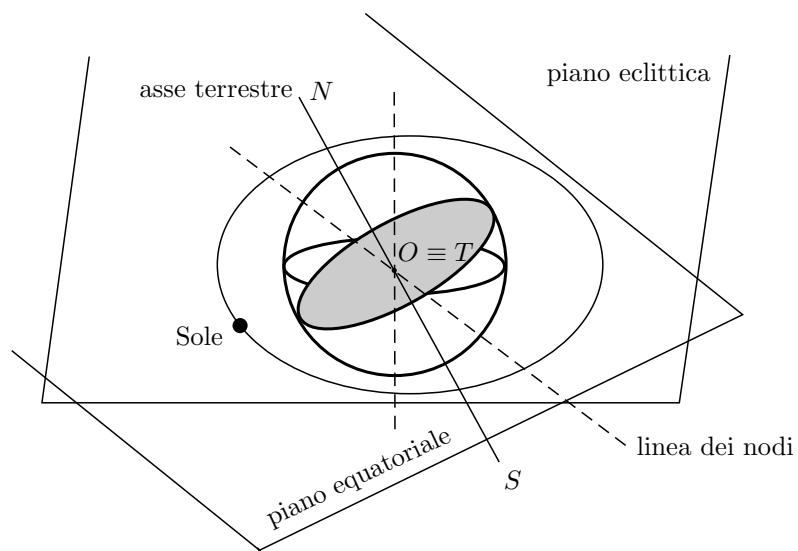


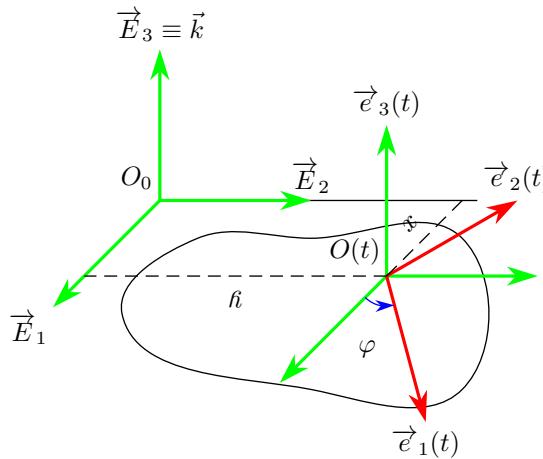
Figura 4.7.5: precessione degli equinozi

necessariamente essere parallela al piano direttore, mentre il moto polare, lasciando invariati tutti i piani solidali paralleli al piano direttore, deve essere necessariamente rotatorio intorno ad una asse ortogonale al piano invariante. Quindi, il suo flusso è dato dalla (4.8.1) con le condizioni (4.8.2). Naturalmente, la (4.8.2) comporta che la velocità angolare di un rigido che si muove di moto piano è sempre ortogonale al piano direttore. Tale proprietà, insieme al fatto che i punti di  $\mathcal{R}$  hanno velocità parallela al piano direttore, implica che l'invariante scalare cinematico si annulla

$$(4.8.4) \quad \mathcal{I} = \vec{v}_P \cdot \omega \vec{k} = 0 .$$

Dunque, il campo di velocità non può essere elicoidale.  $\square$

**N.B.** Attenzione a non confondere il concetto di moto con quello di campo delle velocità (o atto di moto). Nel caso del moto piano il moto è roto-traslatorio, come abbiamo visto, mentre il campo di velocità è semplicemente traslatorio, oppure rotatorio.

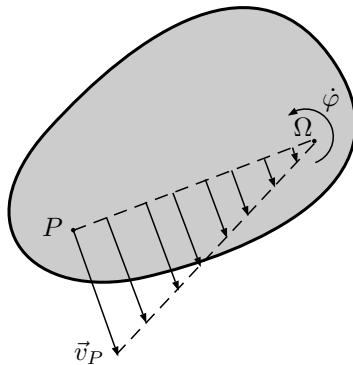


È chiaro che, per il moto piano, tutte le sezioni di  $\mathcal{R}$  parallele a  $\pi'$  si muovono anch'esse parallellamente al piano direttore  $\pi'$ , dato che devono mantenere distanza invariata da  $\pi$  per il vincolo di rigidità. Quindi, il moto piano lascia invariata la *giacitura* di ogni piano di  $\mathcal{R}$  parallelo a  $\pi$ . D'altra parte, nota la posizione di una sezione di  $\mathcal{R}$  e quindi quella di 3 suoi punti non allineati, è determinata la configurazione di  $\mathcal{R}$ . Quindi, nel moto piano, non è restrittivo limitarsi a studiare il moto di una sezione del rigido appartenente al piano direttore. Dunque, scegiamo una sezione del rigido, chiamiamo  $\pi$  il piano solidale alla sezione e  $\pi'$  il piano contenente la stessa sezione ma immaginato fisso. Scelta una terna fissa su  $\pi'$  e una mobile solidale a  $\pi$ , come in figura, possiamo prendere come coordinate libere di  $\mathcal{R}$  le coordinate cartesiane  $\{(x, y)\}$  dell'origine  $O(t)$  della terna mobile e il suo angolo di rotazione  $\varphi$ . Allora

$$(4.8.5) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{E}_3 .$$

**Corollario 4.8.1.** Se  $\vec{\omega}(\bar{t}) \neq \vec{0}$ , il CIR è l'unico punto solidale a  $\mathcal{R}$  e appartenente al piano  $\pi$  del moto che, all'istante  $\bar{t}$ , ha velocità nulla. Inoltre, vale che

$$(4.8.6) \quad \vec{v}_P = \dot{\varphi} \vec{E}_3 \times (P - \Omega) \quad \forall P \in \mathcal{R} .$$



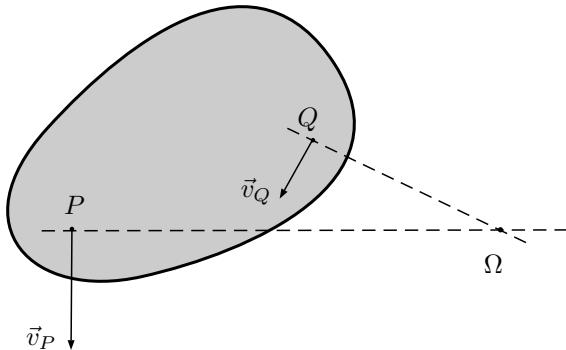
È chiaro che, se sono noti il CIR e la velocità angolare, cioè la coppia  $(\Omega, \dot{\phi})$ , grazie alla (4.8.6) si può determinare la velocità di ogni punto del rigido, che avrà

- modulo pari a  $|\vec{v}_P| = |\dot{\phi}| \overline{\Omega P}$ ;
- direzione ortogonale al segmento  $\Omega P$ ;
- verso determinato dalla regola della mano destra.

Viceversa, dalla (4.8.6) segue un metodo per determinare la coppia  $(\Omega, \dot{\phi})$ , noti i vettori velocità di 2 soli punti del rigido,  $P$  e  $Q$ , appartenenti alla sezione piana  $\pi$ .

**Teorema 4.8.2** (Chasles, 1793-1880). .

- Se  $\vec{v}_P$  non è parallela a  $\vec{v}_Q$ , il CIR è il punto d'intersezione delle rette passanti per  $P$  e  $Q$  e ortogonalmente, rispettivamente, alle loro velocità. Il modulo della velocità angolare risulta  $|\dot{\phi}| = \frac{|\vec{v}_P|}{\overline{\Omega P}}$ .



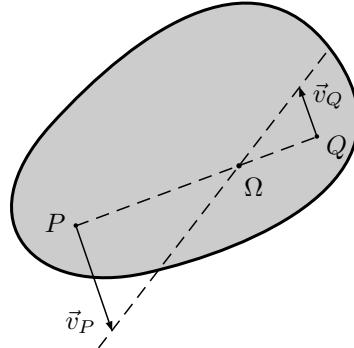
- Se  $\vec{v}_P$  e  $\vec{v}_Q$  sono parallele, si possono verificare due casi.
  - $\vec{v}_P = \vec{v}_Q$ , allora il campo di velocità è traslatorio (dimostrarlo per esercizio),  $\dot{\phi} = 0$  e il CIR non è definito;

- $\vec{v}_P \neq \vec{v}_Q$ , allora, a causa della proprietà di equiproiettività, la retta congiungente i punti  $P$  e  $Q$  è ortogonale alle due velocità (dimostrarlo per esercizio). In questo caso, il CIR sta su tale congiungente, in modo che

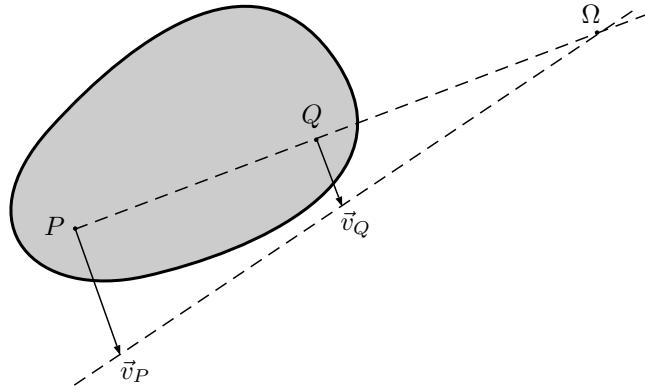
$$\frac{|\vec{v}_P|}{\Omega P} = \frac{|\vec{v}_Q|}{\Omega Q} = |\dot{\varphi}|$$

In particolare,

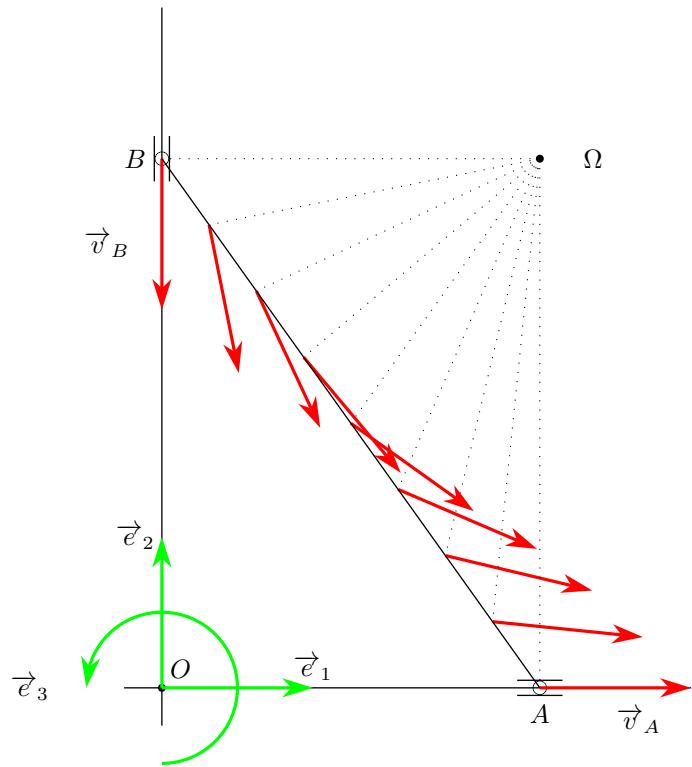
- \* se le due velocità sono discordi, il CIR è interno al segmento  $PQ$  lo divide in parti direttamente proporzionali ai moduli delle velocità.



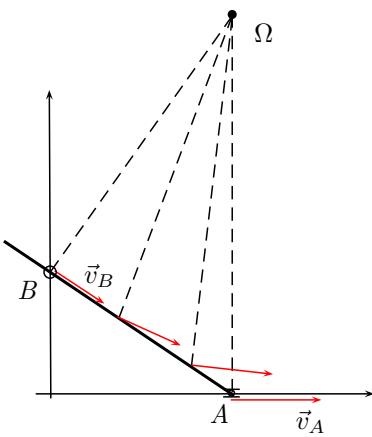
- \* se le due velocità sono concordi, il CIR è esterno al segmento  $PQ$ , dalla parte del punto con velocità minore.



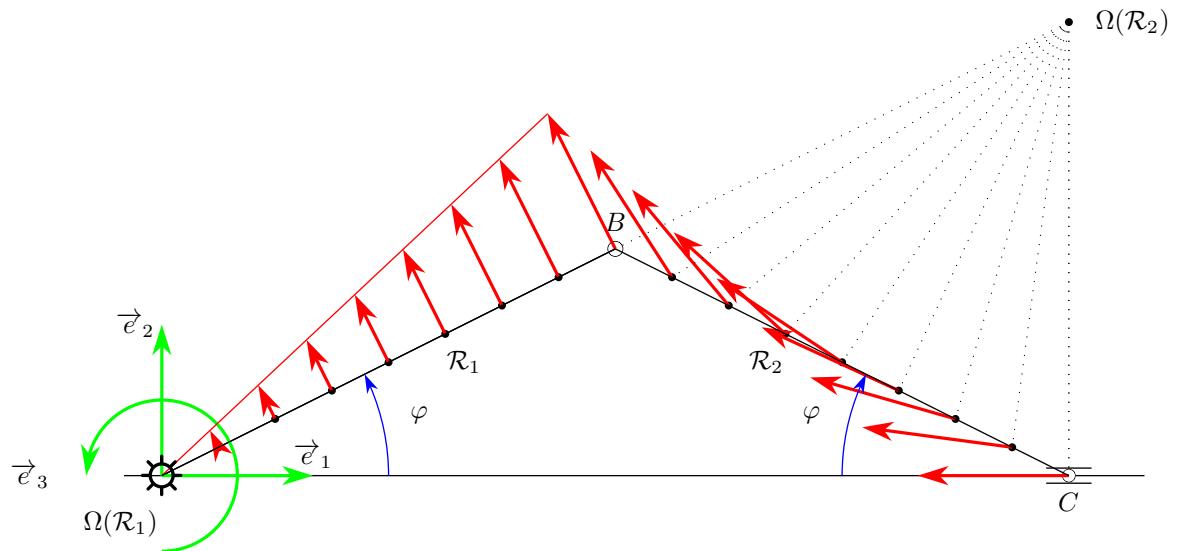
Esempio: campo delle velocità di una scala con due appoggi



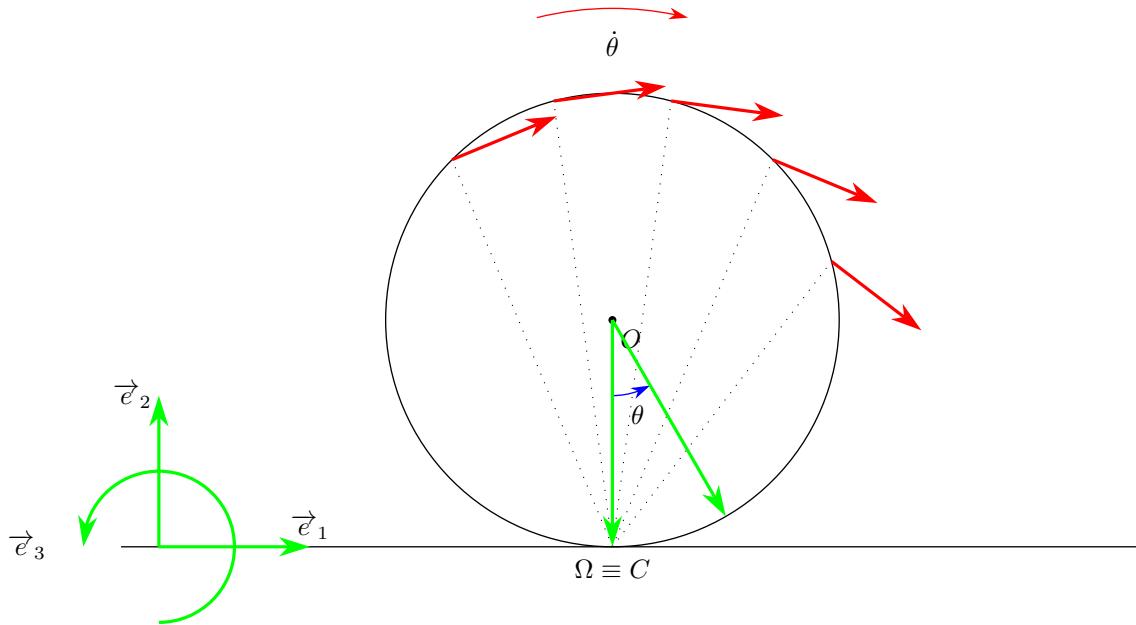
Esempio: campo delle velocità di un'asta appoggiata in  $A$  e infilata in  $B$ .



Esempio: campo delle velocità di un sistema biella-manovella



Esempio: campo delle velocità di un disco in puro rotolamento



#### 4.8.1 Accelerazioni del moto piano

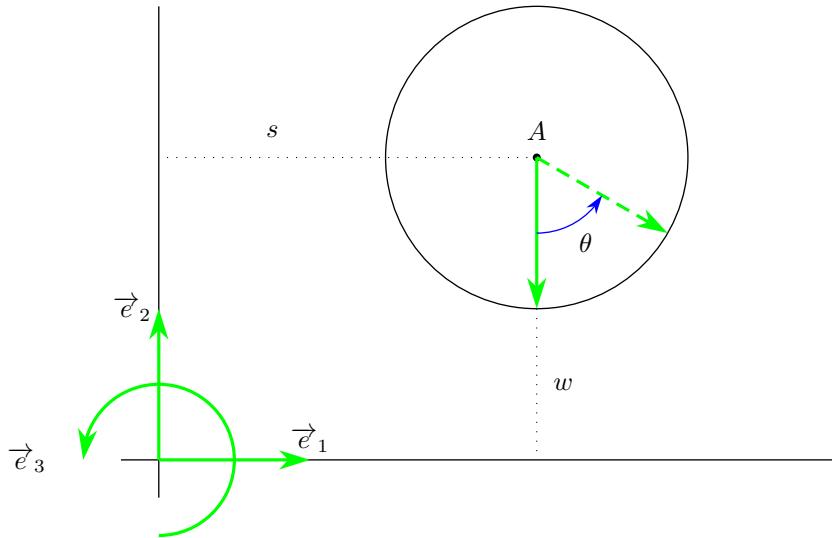
Dalla (4.5.11), tenendo conto che la velocità angolare è sempre ortogonale al piano del moto e  $(P - O)_\perp = P - O$ , si ha

$$(4.8.7) \quad \vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{P} - \vec{O})) = \vec{a}_O + \ddot{\varphi} \vec{E}_3 \times (\vec{P} - \vec{O}) - \dot{\varphi}^2 (\vec{P} - \vec{O}) ,$$

dove  $P$  e  $O$  sono punti del rigido appartenenti a  $\pi$ .

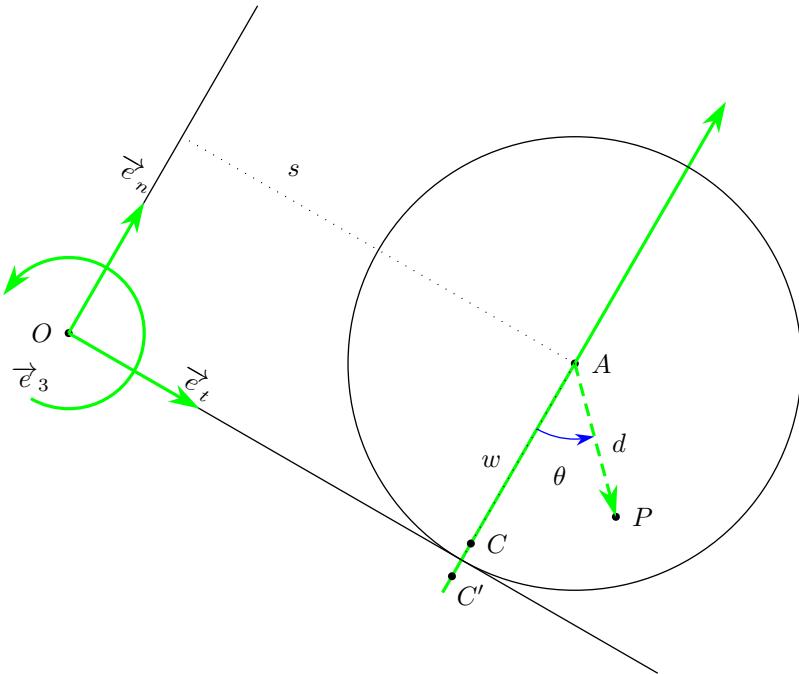
#### 4.8.2 Disco appoggiato su di una guida rettilinea

Consideriamo un disco di raggio  $R$  e di spessore trascurabile, vincolato a stare nel suo piano. Come tutti i rigidi piani ha 3 gradi di libertà. Come coordinate libere, possiamo prendere le due coordinate cartesiane del centro del disco e un angolo  $\theta$  compreso tra un asse fisso e uno solidale al disco, ad esempio come nella figura.



Supponiamo, ora, che il disco sia ulteriormente vincolato a stare appoggiato su una guida rigida rettilinea (eventualmente mobile). Tale vincolo è semplice. Infatti, introducendo la terna fissa  $(O; \vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_3)$  di figura e le coordinate sovrabbondanti  $\{(s, w, \theta)\}$  possiamo rappresentare il vincolo unilatero come

$$w \geq R$$



La matrice Jacobiana corrispondente ha rango massimo, quindi possiamo concludere che

- $v = r = 0$  nelle configurazioni ordinarie

- $v = r = 1$  nelle configurazioni di confine.

Da ora in poi, studieremo il modello soltanto nelle configurazioni di confine ( $l = 2$ ), scegliendo come coordinate libere  $\{(s, \theta)\}$ .

Prima di tutto, osserviamo che il contatto fra il disco e la guida individua 2 punti:

1.  $C \in \mathcal{R}$ , è il punto del rigido che ad un istante fissato  $\bar{t}$  si trova a contatto con la guida;
2.  $C' \in$  alla guida, è il punto della guida che allo stesso istante  $\bar{t}$  si trova a contatto con il rigido.

Scriviamo la velocità del punto  $C$  all'istante  $\bar{t}$ . Poiché  $C \in \mathcal{R}$ , si ha

$$(4.8.8) \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (C - A) = \dot{s}\vec{e}_t + \dot{\theta}\vec{e}_3 \times (-R\vec{e}_n) = (\dot{s} + R\dot{\theta})\vec{e}_t$$

Sottolineamo che tale rappresentazione è una rappresentazione spaziale o euleriana, cioè fornisce la velocità del punto del disco che all'istante  $\bar{t}$  passa per il corrispondente punto  $C'$  appartenente alla guida. Per calcolare l'accelerazione di  $C$ , utilizziamo la (4.8.7) per i punti  $C$  e  $A$

$$(4.8.9) \quad \vec{a}_C = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times (C - A) - |\vec{\omega}|^2(C - A) = \ddot{s}\vec{e}_t + \ddot{\theta}\vec{e}_3 \times (-R\vec{e}_n) - \dot{\theta}^2(-R\vec{e}_n) = (\ddot{s} + R\ddot{\theta})\vec{e}_t + R\dot{\theta}^2\vec{e}_n$$

**N.B.** L'accelerazione del punto  $C$  del rigido a contatto con la guida non coincide con la derivata rispetto al tempo della (4.8.8) che è la velocità calcolata in  $C$  e non in un generico punto del rigido, ma con la derivata rispetto al tempo della velocità di un generico punto sul bordo del disco, valutata nel punto  $C$ . Infatti, preso un generico punto  $P$  sul disco a distanza  $d$  dal centro  $A$  e detto  $\theta$  l'angolo tra i vettori  $-\vec{e}_n$  e  $P - A$  si ha

$$(4.8.10) \quad P - A = d(\sin \theta \vec{e}_t - \cos \theta \vec{e}_n) \Rightarrow (P - A)|_{\theta=2k\pi} = -d\vec{e}_n$$

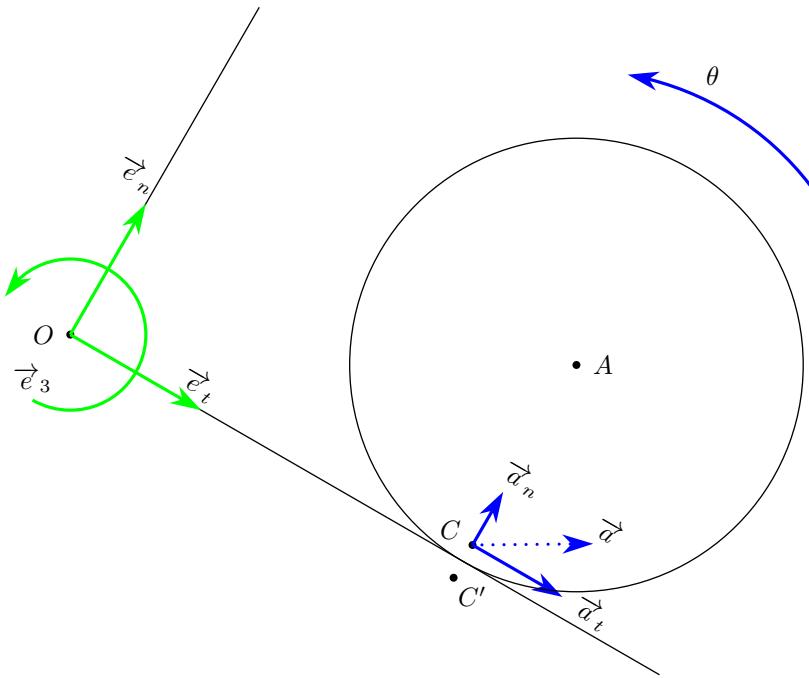
Allora, la velocità di  $P$  è data da

$$(4.8.11) \quad \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (P - A) = \dot{s}\vec{e}_t + \dot{\theta}\vec{e}_3 \times d(\sin \theta \vec{e}_t - \cos \theta \vec{e}_n) = \dot{s}\vec{e}_t + d\dot{\theta}(\sin \theta \vec{e}_n + \cos \theta \vec{e}_t) = (\dot{s} + d\dot{\theta} \cos \theta)\vec{e}_t + d\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_n,$$

quindi  $\vec{v}_{P|_{\theta=2k\pi}} = (\dot{s} + d\dot{\theta})\vec{e}_t$  e coincide con  $\vec{v}_C$  se  $d = R$ . Inoltre

$$(4.8.12) \quad \vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P(\theta) = (\ddot{s} + d(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta))\vec{e}_t + d(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)\vec{e}_n$$

e quindi  $\vec{a}_{P|_{\theta=2k\pi}} = (\ddot{s} + d\ddot{\theta})\vec{e}_t + d\dot{\theta}^2\vec{e}_n$  e coincide con  $\vec{a}_C$  se  $d = R$ .

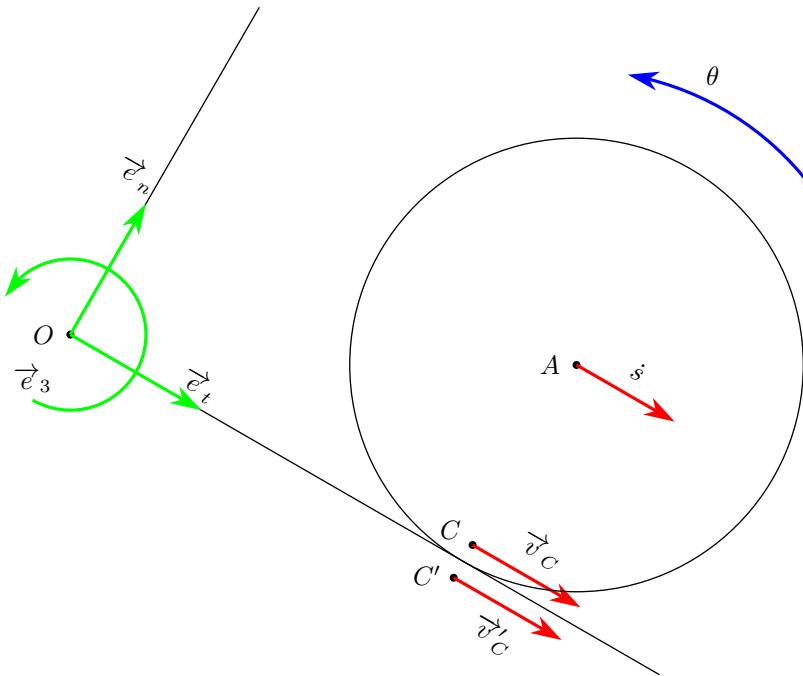


Nella prossima sezione studieremo la cinematica del disco nell' ipotesi che al vincolo d'appoggio si aggiunga il vincolo di puro rotolamento.

#### 4.8.3 Vincolo di puro rotolamento

Supponiamo che il disco rotoli senza strisciare su una guida scabra, eventualmente mobile. Tale vincolo impone che

$$(4.8.13) \quad \vec{v}_C = \vec{v}_{C'} .$$



### Disco su guida fissa

Da ora in poi, supponiamo che la guida sia fissa. Allora, dalla (4.8.13) segue che

$$(4.8.14) \quad \vec{v}_C = \vec{0}$$

cioè la velocità di tutti i punti del rigido che passano per il punto \$C'\$ della guida è nulla. Pertanto, dalla (4.8.8) si ottiene

$$(4.8.15) \quad \dot{s} + R\dot{\theta} = 0,$$

cioè un vincolo sulle velocità lagrangiane \$\{(\dot{s}, \dot{\theta})\}\$, quindi di mobilità. Tuttavia, tale vincolo è integrabile rispetto al tempo e si riduce al vincolo *olonomo*

$$(4.8.16) \quad f(s, \theta) := s + R\theta - s_0 = 0 \quad \theta \in \mathbb{R},$$

che è un vincolo semplice poiché la matrice Jacobiana \$J = [1, R]\$ ha rango massimo.

**N.B.** Per gli scopi della prossima sezione, possiamo facilmente verificare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial \theta} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta \partial s}$$

cioè le derivate seconde miste sono uguali, come segue dalla regolarità del vincolo e dal Lemma di Schwarz.

Dunque, il vincolo di puro rotolamento toglie un ulteriore grado di libertà al disco appoggiato, che si riduce a un modello con un solo grado di libertà. Come coordinata libera, possiamo prendere

la coordinata  $\theta$  e, per semplicità, porremo  $s_0 = 0$ , in modo che  $s_{|\theta=0} = 0$ . Dalla (4.8.9) ricaviamo che

$$(4.8.17) \quad \vec{a}_C = R\dot{\theta}^2 \vec{e}_n ,$$

cioè l'accelerazione del punto  $C$  si riduce al solo componenente ortogonale alla guida.

**N.B.** Possiamo classificare i moti di un disco appoggiato su di una guida in

1. rotolamento con slittamento:  $|\dot{s}| < R|\dot{\theta}|$
2. puro rotolamento:  $|\dot{s}| = R|\dot{\theta}|$
3. rotolamento con strisciamento:  $|\dot{s}| > R|\dot{\theta}|$

Quindi, il puro rotolamento è interpretabile come la fase di transizione tra il regime di slittamento e quello di strisciamento.

Nel caso di puro rotolamento, la (4.8.11) si riduce a

$$(4.8.18) \quad \vec{v}_P = \dot{\theta}(d \cos \theta - R) \vec{e}_t + d\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_n ,$$

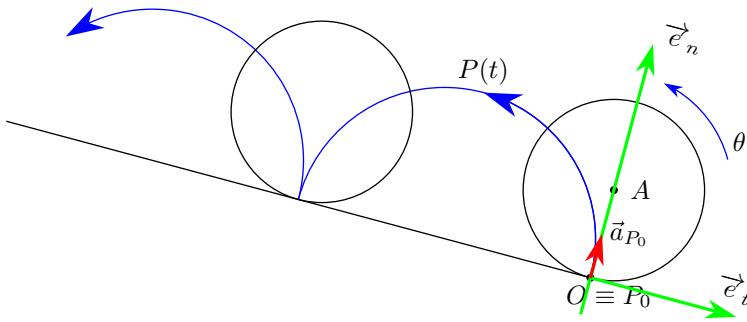
che si può integrare rispetto al tempo per ottenere

$$P(\theta(t)) = ((d \sin \theta - R\theta + c_1) \vec{e}_t + (c_2 - d \cos \theta) \vec{e}_n) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Posto  $P_0 = P_{|\theta=0} = (c_1 \vec{e}_t + (c_2 - d) \vec{e}_n)$  possiamo scrivere il flusso del disco

$$\Phi(t, P_0) = (d \sin \theta(t) - R\theta(t)) \vec{e}_t + d(1 - \cos \theta(t)) \vec{e}_n + P_0 .$$

Ad esempio, scegliendo,  $P_0 \equiv O$  tale equazione diventa l'equazione parametrica della *cicloide* disegnata in figura.



Tale traiettoria è quella di un punto luminoso fissato sulla ruota di una bicicletta che rotola senza strisciare né slittare.

### Centro d'istantanea rotazione del disco

Ricordiamo che il campo di velocità di un rigido piano è, negli istanti in cui  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , rotatorio, quindi ammette un punto  $\Omega$  solidale che ha velocità istantanea nulla, il CIR. Nel caso del disco solo appoggiato su di una guida, denotato con  $C$  il punto del disco a contatto con la guida, l'equazione del CIR può scriversi come

$$(4.8.19) \quad \Omega - C = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_C}{|\vec{\omega}|^2} ,$$

In particolare, se il moto è di puro rotolamento e la guida è fissa,  $\vec{v}_C = \vec{0}$ ), quindi

$$(4.8.20) \quad \Omega \equiv C ,$$

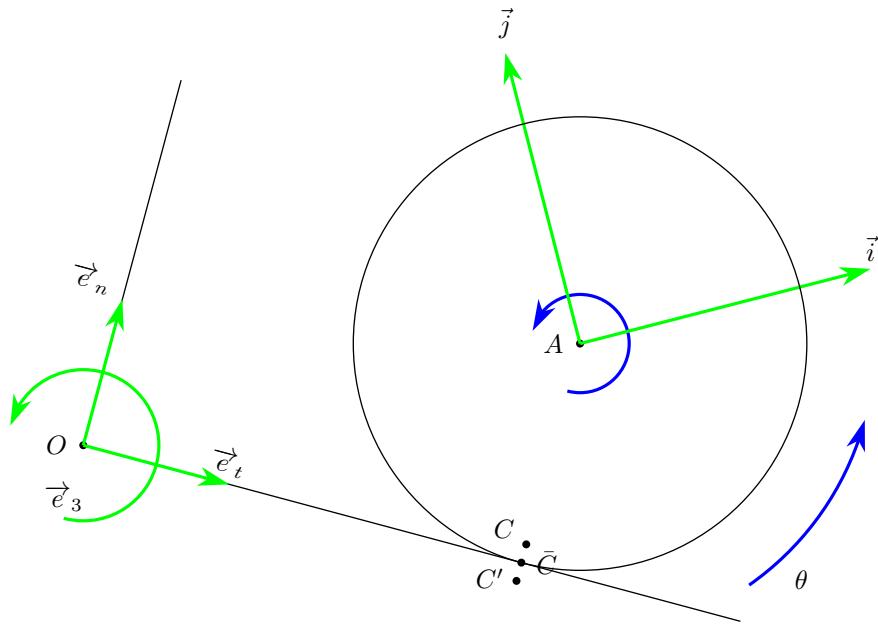
cioè il CIR coincide con il punto di contatto del disco con la guida. Osserviamo che, il CIR non è un punto fisso del disco (il disco non ha alcun punto fisso) nonostante  $\vec{v}_C = \vec{0}$  nell'istante  $\bar{t}$  in cui si trova a contatto con la guida. Infatti  $C$  ha un'accelerazione non nulla, pari a

$$(4.8.21) \quad \vec{a}_C = R\dot{\theta}^2 \vec{e}_n ,$$

quindi sempre diretta nel verso positivo di  $\vec{e}_n$ . Pertanto, ad ogni istante il CIR cambia. Il luogo geometrico descritto dai CIR al variare del tempo è detto

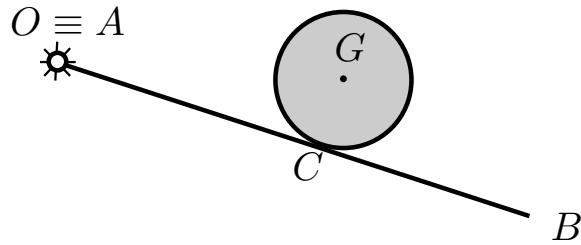
1. base del moto, se visto da un osservatore fisso;
2. rulletta, se visto da un osservatore solidale a  $\mathcal{R}$ .

Nel caso di puro rotolamento si può osservare che la base è la retta coincidente con la guida rigida. Invece, la rulletta è la circonferenza coincidente con il bordo del disco, poiché la distanza tra il punto  $A$  solidale al rigido e i centri  $C$  si mantiene costante durante il moto. Si vede inoltre che durante il moto la rulletta rotola senza strisciare sulla base del moto, poiché le velocità dei punti di contatto  $C$  e  $C'$  sono uguali.

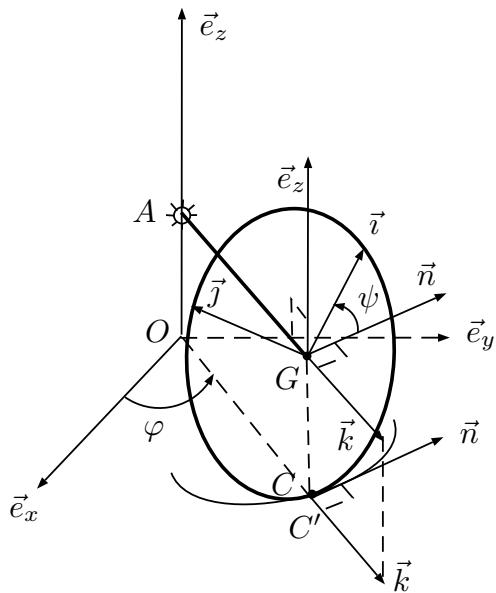


Ora, è naturale introdurre un nuovo punto che sarà utile nel seguito: il punto *geometrico*  $\bar{C}$  che percorre la base del moto "inseguendo" i punti di contatto  $C$  e, per tale ragione, sarà detto **polo mobile**. Mentre  $\bar{C}$  è associato ad un intervallo di tempo, i punti di contatto  $C$  e  $C'$  sono associati ad istanti di tempo.

**Esercizio 4.8.1.** Si consideri il modello articolato della figura sottostante, costituito da un asta vincolata a ruotare in un piano tramite una cerniera cilindrica nell'estremo  $A$  e fissata in  $O$ , e da un disco, vincolato a rotolare sull'asta senza strisciare. Si calcolino la velocità angolare del disco, la velocità e l'accelerazione del suo centro  $G$ , del punto di contatto  $C$  e del polo mobile  $\bar{C}$ .



**Esercizio 4.8.2.** Un rigido è formato da un disco omogeneo, di massa  $m$  e raggio  $R$ , saldato nel suo centro  $G$  ad un asta  $AG$  di massa trascurabile e lunghezza  $d$ , il cui estremo  $A$  è vincolato ad un asse fisso verticale  $(O, \vec{e}_z)$  mediante una cerniera sferica posta a quota  $R$  sull'asse  $(O, \vec{e}_z)$ . L'asta  $AG$  è ortogonale al piano del disco, il quale rotola senza strisciare sul piano orizzontale scabro passante per  $O$ . Si classifichi il moto, il campo di velocità del rigido e si determini l'asse di Mozzi. Inoltre, si calcoli la velocità angolare in funzione delle coordinate libere.



## 4.9 Classificazione dei moti rigidi

Nella tabella seguente, ricapitoliamo tutti i moti rigidi studiati, classificati in base ai loro componenti elementari.

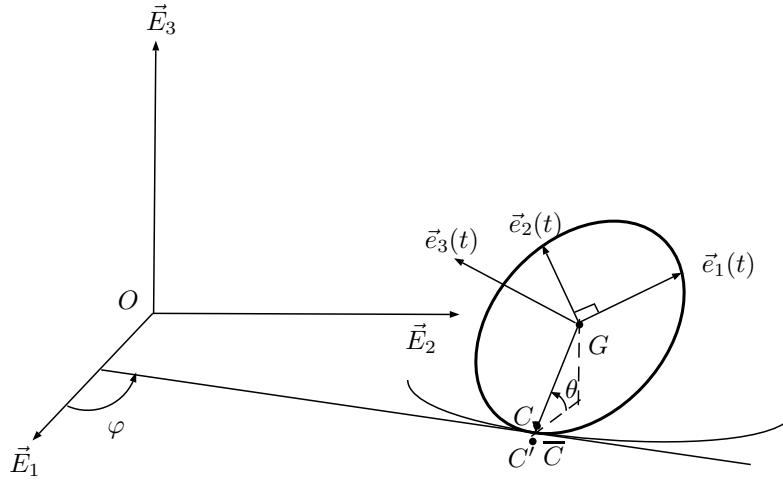
Tabella 4.9.1: Alcuni moti rigidi

Moti traslatori: $\tau_{\vec{s}}$	Moti polari: $\sigma_O$	Moti rototraslatori: $\tau_{\vec{s}} \circ \rho_{(\varphi, \vec{k})}, \dot{\vec{k}} = \vec{0}$	Moti rigidi: $\tau_{\vec{s}} \circ \sigma_O$
Moti curvilinei: $\vec{s}(t) = s(t) \vec{u}(t)$	Moti polari: $\rho_\psi \circ \rho_\theta \circ \rho_\varphi$	Moti roto-traslatori	
Moti rettilinei: $\vec{s}(t) = s(t) \vec{u}$	Moti di precessione: $\rho_\psi \circ \rho_\varphi$	Moti elicoidali: $(\vec{s} \parallel \vec{k})$	
Moti rettilinei uniformi: $\vec{s}(t) = (s_0 + v_0 t) \vec{u}$	Moti rotatori: $\rho_\varphi$	Moti piani: $(\vec{s} \perp \vec{k})$	

Osserviamo che le classi non sono disgiunte: per esempio un moto rotatorio è anche un particolare moto piano.

## 4.10 Approfondimento 1: disco appoggiato su un piano

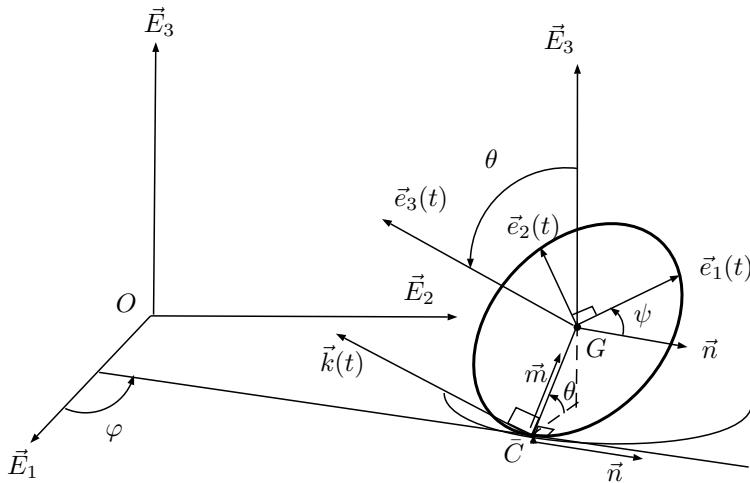
Consideriamo un disco di raggio  $a$  e spessore trascurabile, appoggiato su di un piano fisso o mobile e premettiamo alcune considerazioni geometriche e cinematiche di carattere generale.



A parte la configurazione in cui il piano di vincolo e il piano del disco coincidono, il disco si appoggia sul piano in modo che la sua circonferenza sia tangente al piano, cioè in modo che la retta tangente alla circonferenza nel punto di contatto appartenga al piano di vincolo. Inoltre, osserviamo che, nel contatto tra un corpo rigido e una curva o una superficie di vincolo, entrambe rigide, giocano un ruolo importante i seguenti punti:

- i punti *materiali*  $C$  solidali al rigido che, istante per istante, vengono a contatto con il vincolo;
- i punti *materiali*  $C'$  del vincolo che, istante per istante, vengono a contatto con il corpo rigido;
- il punto *geometrico* dello spazio  $\bar{C}$  che “insegue” i punti di contatto, cioè che durante il moto del rigido, istante per istante, coincide con  $C$  e  $C'$ . Tale punto è detto *polo mobile*.

Questi tre punti, malgrado occupino la stessa posizione nello spazio ad ogni istante, sono di diversa natura, quindi hanno velocità diverse. Ad esempio, nel problema della Sezione precedente, il polo mobile  $\bar{C}$  coincide con la proiezione ortogonale del centro del disco  $A$  sulla guida, quindi si muove lungo la guida con la stessa velocità di  $G$ , mentre, nel caso di puro rotolamento su guida fissa,  $\vec{v}_C = \vec{v}_{C'} = \vec{0}$ . Nel problema che stiamo esaminando, calcoleremo più avanti la velocità di  $C$  e  $\bar{C}$ .



Per iniziare l'analisi cinematica, determiniamo i gradi di libertà del disco con il metodo del bilancio. Il corpo rigido svincolato ha 6 gradi di libertà. Quindi, come coordinate sovrabbondanti, possiamo introdurre, ad esempio, le coordinate cartesiane  $(x_G, y_G, z_G)$  del centro del disco  $G$ , rispetto a una terna fissa  $\Sigma = (O; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$  con  $O$  appartenente al piano di vincolo, il versore

$\vec{E}_3$  ortogonale al piano, il versore  $\vec{E}_1$  parallelo a detto piano ed  $\vec{E}_2 = \vec{E}_3 \times \vec{E}_1$ . Inoltre, per definire l'orientazione del disco nello spazio, possiamo prendere gli angoli di Eulero  $(\varphi, \theta, \psi)$  formati, rispetto alla terna fissa, da una terna  $(G; \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$  solidale al disco, con  $\vec{e}_3(t)$  ortogonale al disco, il versore  $\vec{e}_1(t)$  scelto ad arbitrio nel piano nel disco ed  $\vec{e}_2(t) = \vec{e}_3(t) \times \vec{e}_1(t)$ . Oltre a tali due terne, considereremo anche una terna intermedia con origine, istante per istante, nel polo mobile  $\bar{C}$  e versori  $(\vec{n}(t), \vec{m}(t), \vec{k}(t))$  con  $\vec{n}(t)$  versore dei nodi,  $\vec{k}(t) = \vec{e}_3(t)$  e  $\vec{m}(t) = \vec{k}(t) \times \vec{n}(t)$ . Tale terna sarà detta *stereonodale*, giacché include il versore dei nodi. Si osservi che le basi associate alle tre terne così definite coincidono rispettivamente con le basi  $e(0)$ ,  $e(t)$ ,  $e''(t)$ , già usate nella dimostrazione del Teorema di Eulero 4.3.1. Dunque, la trasformazione che manda la base fissa in quella intermedia è la composizione delle sole precessione e nutazione

$$(4.10.1) \quad [\vec{n}(t) \vec{m}(t) \vec{k}(t)] = [\vec{E}_1 \vec{E}_2 \vec{E}_3][R_\varphi R_\theta] ,$$

con la matrice

$$(4.10.2) \quad [R_\varphi R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} .$$

Osserviamo che il vincolo (unilatero) di appoggio del disco sul piano costringe il centro del disco  $G$  a soddisfare la disequazione

$$(4.10.3) \quad z_G - a \sin \theta \geq 0$$

Limitandoci a considerare le configurazioni di confine, cioè quelle in cui vale

$$(4.10.4) \quad z_G - a \sin \theta = 0 ,$$

poichè il vincolo è semplice possiamo concludere che il disco appoggiato ha 5 gradi di libertà. Quindi, possiamo prendere come coordinate lagrangiane, ad esempio,  $(x_G, y_G, \varphi, \theta, \psi)$ . Calcoliamo, in tali coordinate, la velocità angolare del disco e la velocità spaziale dei punti  $C$  solidali al disco che, istante per istante, vanno a contatto con il piano in  $\bar{C}$ . A tale scopo, ricordiamo che, poichè  $C, G \in \mathcal{R}$ , dalla (4.5.1) segue

$$\vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times (C - G) .$$

Quindi, in base al vincolo d'appoggio (4.10.4)

$$\vec{v}_G = \dot{x}_G \vec{E}_1 + \dot{y}_G \vec{E}_2 + a \cos \theta \dot{\theta} \vec{E}_3 ,$$

grazie alla (4.4.16)

$$(4.10.5) \quad \vec{\omega} = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta) \vec{E}_1 + (\dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi) \vec{E}_2 + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{E}_3 ,$$

$$C - G = -a \vec{m}(t) \stackrel{(4.10.2)}{=} -a(-\sin \varphi \cos \theta \vec{E}_1 + \cos \varphi \cos \theta \vec{E}_2 + \sin \theta \vec{E}_3)$$

e

$$\vec{\omega} \times (C - G) = \begin{vmatrix} \vec{E}_1 & \vec{E}_2 & \vec{E}_3 \\ \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta & \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi & \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \\ a \sin \varphi \cos \theta & -a \cos \varphi \cos \theta & -a \sin \theta \end{vmatrix} .$$

Dunque, si trova

$$(4.10.6) \quad \vec{v}_C = \left( \dot{x}_G + a((\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos \varphi - \sin \varphi \sin \theta \dot{\theta}) \right) \vec{E}_1 + \\ + \left( \dot{y}_G + a((\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi}) \sin \varphi + \cos \varphi \sin \theta \dot{\theta}) \right) \vec{E}_2 .$$

Calcoliamo, ora, la velocità del polo mobile  $\bar{C}$ . Il suo vettore posizione è dato da

$$(4.10.7) \quad \bar{C} - O = (\bar{C} - G) + (G - O) = -a \vec{m}(t) + (x_G \vec{E}_1 + y_G \vec{E}_2 + a \sin \theta \vec{E}_3) \\ \stackrel{(4.10.2)}{=} (-a(-\sin \varphi \cos \theta) + x_G) \vec{E}_1 + (-a \cos \varphi \cos \theta + y_G) \vec{E}_2$$

Dunque, la sua velocità è data da

(4.10.8)

$$\vec{v}_{\bar{C}} = (-a(-\cos \varphi \cos \theta \dot{\varphi} + \sin \varphi \sin \theta \dot{\theta}) + \dot{x}_G) \vec{E}_1 + (-a(-\sin \varphi \cos \theta \dot{\varphi} - \cos \varphi \sin \theta \dot{\theta}) + \dot{y}_G) \vec{E}_2 .$$

Confrontando la (4.10.6) con la (4.10.8), possiamo concludere che, introducendo le coordinate di  $\bar{C}$

$$(4.10.9) \quad x_{\bar{C}} = x_G + a \sin \varphi \cos \theta , \quad y_{\bar{C}} = y_G - a \cos \varphi \cos \theta ,$$

la relazione tra le velocità di  $C$  e di  $\bar{C}$  si può scrivere

$$(4.10.10) \quad \vec{v}_C = (\dot{x}_{\bar{C}} + a \dot{\psi} \cos \varphi) \vec{E}_1 + (\dot{y}_{\bar{C}} + a \dot{\psi} \sin \varphi) \vec{E}_2 = \vec{v}_{\bar{C}} + a \dot{\psi} \vec{n}(t)$$

Vista la semplicità della (4.10.10) rispetto alla (4.10.6), conveniamo, da ora in poi, di sostituire le coordinate di  $G$  con quelle di  $\bar{C}$  e di utilizzare quindi, come coordinate libere del modello le 5 coordinate  $(x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}, \varphi, \theta, \psi)$  al posto di quelle originarie.

**N.B.** Osserviamo che la (4.10.10) si può ricavare più semplicemente, applicando il Teorema di Galileo 4.6.1 alla terna fissa e alla terna stereonodale. Infatti, con ovvie notazioni, vale

$$(4.10.11) \quad \vec{v}_C = \vec{v}_C^{(ass)} = \vec{v}_C^{(rel)} + \vec{v}_C^{(tr)} = \dot{\psi} \vec{k}(t) \times (C - G) + \vec{v}_{\bar{C}} = a \dot{\psi} \vec{n} + \vec{v}_{\bar{C}}$$

poiché il moto del disco relativamente alla terna stereonodale è rotatorio intorno all'asse  $(G, \vec{k}(t))$ , e la velocità di trascinamento di  $C$  coincide con la velocità dell'origine  $\bar{C}$  della terna stereonodale.

**N.B.** Si osservi che la (4.10.10) non dipende dall'angolo di nutazione  $\theta$ . Quindi, coincide con la velocità di  $C$  calcolata nella particolare configurazione in cui  $\theta = \pi/2$ . In tale configurazione il calcolo è semplificato dal fatto che  $C$  e  $\bar{C}$  coincidono con il piede della proiezione ortogonale di  $G$  sul piano. Per esercizio, rifare il calcolo di  $\vec{v}_C$  in questa maniera.

### 4.10.1 Puro rotolamento

Ora aggiungiamo il vincolo di puro rotolamento richiedendo che il disco rotoli senza strisciare sul piano di vincolo. Ciò impone che le velocità dei punti di contatto del rigido e del piano siano uguali

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C'} .$$

Se, in più, supponiamo che il piano di vincolo sia fermo rispetto alla terna  $\Sigma$ , allora  $\vec{v}_C = \vec{0}$  e, per la (4.10.10), segue che

$$(4.10.12) \quad \vec{v}_{\bar{C}} = -a \dot{\psi} \vec{n}(t)$$

o che, equivalentemente, devono essere soddisfatti i due vincoli di mobilità

$$(4.10.13) \quad \dot{x}_{\bar{C}} + a \cos \varphi \dot{\psi} = 0$$

$$(4.10.14) \quad \dot{y}_{\bar{C}} + a \sin \varphi \dot{\psi} = 0 ,$$

Studiamo in dettaglio i suddetti vincoli di mobilità e dimostriamo che non sono integrabili, cioè non derivano da vincoli olonomi. A tale scopo, presentiamo una condizione necessaria e sufficiente per la (locale) integrabilità di una classe rilevante di vincoli di mobilità, nella seguente

**Proposizione 4.10.1.** *Consideriamo un modello meccanico olonomo con l gradi di libertà e coordinate libere  $(q_1, \dots, q_l)$ . Supponiamo che sia soggetto a un vincolo addizionale di mobilità regolare  $g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$ , affine nelle velocità generalizzate*

$$(4.10.15) \quad g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^l a_i(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + b(\mathbf{q}, t) ,$$

dove  $\mathbf{q} := (q_1, \dots, q_l)$  e  $\dot{\mathbf{q}} := (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_l)$ . Allora, esso è localmente integrabile se e solo se in ogni intorno dello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}_V$  sono soddisfatte le condizioni di compatibilità

$$(4.10.16) \quad \frac{\partial a_j}{\partial q_k} = \frac{\partial a_k}{\partial q_j} , \quad \frac{\partial a_j}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial q_j} \quad j, k = 1, \dots, l .$$

In particolare, se tutte le funzioni  $a_i$  sono indipendenti dal tempo deve risultare  $b = 0$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo la necessità delle suddette condizioni. Supponiamo che esista un vincolo olonomo e bilatero

$$f(\mathbf{q}, t) = 0$$

tale che

$$(4.10.17) \quad g(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{q}, t) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Confrontando tale equazione con la (4.10.15), devono valere

$$a_j(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial f}{\partial q_j} , \quad b(\mathbf{q}, t) = \frac{\partial f}{\partial t} .$$

Dal Lemma di Schwarz, segue che

$$(4.10.18) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_k \partial q_j} , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_j} \quad j, k = 1, \dots, l$$

e quindi le (4.10.16). Si può dimostrare (ma non lo facciamo qui) che tali condizioni sono anche sufficienti a garantire la locale integrabilità. Non affrontiamo qui il problema dell'integrabilità globale.  $\square$

Le condizioni (4.10.18) possono essere espresse in forma più compatta nel modo seguente. Infatti, se consideriamo la matrice jacobiana  $J(a)$  dei coefficienti  $a_j(\mathbf{q}, t)$  e il vettore derivato (parzialmente) rispetto al tempo degli stessi coefficienti, possiamo concludere che il vincolo (4.10.15) è integrabile se e solo se

$$J(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_i}{\partial q_j} \end{bmatrix} \text{ è simmetrica et } \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial a_l}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial b}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial b}{\partial q_l} \end{bmatrix} .$$

Tornando al vincolo (4.10.13), verifichiamo se le (4.10.16) sono soddisfatte. Considerato che le coordinate libere sono  $\mathbf{q} = (x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}, \varphi, \theta, \psi)$ , risulta

$$a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = a \cos \varphi, b = 0$$

Dunque,

$$\frac{\partial a_5}{\partial q_3} = -a \sin \varphi \neq \frac{\partial a_3}{\partial q_5} = 0$$

quindi il primo vincolo non è integrabile. Analogamente, succede per il vincolo (4.10.14).

**Esercizio 4.10.1.** *Verificare che anche il vincolo (4.10.14) non è integrabile.*

**Esercizio 4.10.2.** *Verificare che, nel caso del vincolo (4.8.15), le (4.10.16) sono soddisfatte.*

**Esercizio 4.10.3.** *Classificare il campo di velocità del disco in puro rotolamento su di un piano.*

## 4.11 Approfondimento 2: angoli nautici di Blagoveščenskij

Per completezza, illustriamo un'altra terna di coordinate libere per il corpo rigido con un punto fisso  $O$ , gli angoli nautici, di uso comune nella navigazione navale e aerea. A tale scopo, osserviamo che la scelta degli angoli di Eulero si può generalizzare al seguente metodo:

- scelta di due assi *fondamentali* concorrenti in  $O$ , un asse fisso e uno solidale, e scelta dei piani a loro ortogonali, detti piani fondamentali;
- versore dei nodi  $\vec{n}$  come prodotto vettoriale normalizzato del versore fondamentale fisso per il versore fondamentale solidale;
- scelta di due assi di riferimento concorrenti in  $O$  nei due piani fondamentali, quindi un asse di riferimento fisso e uno solidale.

Allora, gli angoli sono:

- angolo di rotazione intorno all'asse fondamentale fisso, misurato tra l'asse di riferimento fisso e il versore dei nodi  $\vec{n}$ ;
- angolo di rotazione intorno al versore dei nodi, misurato tra l'asse fondamentale fisso e l'asse fondamentale solidale (angolo che, a volte, viene sostituito dall'opposto del suo complementare a  $\frac{\pi}{2}$ );
- angolo di rotazione intorno all'asse fondamentale solidale, misurato tra il versore dei nodi e l'asse di riferimento solidale.

Nel caso degli angoli di Eulero, l'asse fondamentale fisso e quello solidale sono, rispettivamente,  $\vec{E}_3$  ed  $\vec{e}_3(t)$ ; il piano fondamentale fisso e quello solidale sono il piano dell'eclittica e quello equatoriale. Gli assi di riferimento sono  $\vec{E}_1$  e  $\vec{e}_1(t)$ . Nel caso degli angoli nautici, di solito si sceglie come origine della terna solidale alla nave il suo baricentro  $G$ , che si suppone appartenga al piano longitudinale di simmetria della nave (piano diametrale), come asse fondamentale fisso l'asse verticale  $(G; \vec{e}_z)$  diretto verso il basso, come asse fondamentale solidale l'asse longitudinale della nave  $(G; \vec{i})$  orientato positivamente da poppa a prua. Inoltre, si sceglie come asse di riferimento fisso un asse orizzontale arbitrario  $(G; \vec{e}_y)$  e come asse di riferimento solidale l'asse trasversale alla nave  $(G; \vec{j})$ , orientato positivamente da sinistra a dritta. Di conseguenza gli angoli nautici sono definiti come:

- angolo di imbardata o di rotta  $\psi$ : è l'angolo di rotazione intorno all'asse verticale discendente  $(G, \vec{e}_z)$ , misurato fra  $(\vec{e}_y, \vec{n}(t))$ , che risulta positivo per accostata a destra;
- angolo di beccheggio  $\theta$ : è l'angolo di rotazione intorno all'asse dei nodi, misurato tra la superficie dell'acqua tranquilla e l'asse longitudinale nave, risulta positivo per un appoggiamiento della nave. Si noti che  $\theta + \frac{\pi}{2}$  è l'angolo tra il versore fondamentale fisso e quello fondamentale mobile;
- angolo di rollio  $\varphi$  o di sbandamento: è l'angolo di rotazione intorno all'asse fondamentale mobile  $\vec{i}(t)$ , misurato fra  $(\vec{n}(t), \vec{j}(t))$ , positivo con sbandamento sulla murata destra.

Per ulteriori dettagli, si veda [R. Nabergoj, *Fondamenti di Tenuta della Nave al Mare*, Appendice B].

		Eulero	Nautici [Blagoveščenskij]
Basi	Fissa	$(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) : \text{arbitraria}$	$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) : \text{adattata}$
	Solidale	$(\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t))$ arbitraria	$(\vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t)) : \text{adattata}$
Assi fondamentali	Fisso	$\vec{E}_3$	$\vec{e}_z$ : verticale discendente
	Solidale	$\vec{e}_3(t)$	$\vec{i}(t)$ : longitudinale nave da poppa a prua
Piani fondamentali	Fisso	$(O; \vec{E}_1, \vec{E}_2)$ : eclittica	$(G; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ : orizzontale parallelo alla superficie dell'acqua tranquilla)
	Solidale	$(O; \vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t))$ : equatoriale	$(G; \vec{j}(t), \vec{k}(t))$ : trasversale nave al mezzo
Linea del nodi	Versore $\vec{n}(t)$	$\frac{\vec{E}_3 \times \vec{e}_3(t)}{ \vec{E}_3 \times \vec{e}_3(t) }$	$\frac{\vec{e}_z \times \vec{i}(t)}{ \vec{e}_z \times \vec{i}(t) }$
Assi di riferimento	Fisso	$\vec{E}_1$	$\vec{e}_y$ : orizzontale arbitrario
	Solidale	$\vec{e}_1(t)$	$\vec{j}(t)$ : asse trasversale nave da sinistra a dritta
Angoli	Rotazione intorno all'asse fondamentale fisso	$\varphi$ : precessione, fra $(\vec{E}_1, \vec{n}(t))$	$\psi$ : imbardata o rotta fra $(\vec{e}_y, \vec{n}(t))$
	Rotazione intorno a $\vec{n}(t)$	$\theta$ : nutazione, fra $(\vec{E}_3, \vec{e}_3(t))$	$\theta$ : beccheggio, fra la superficie dell'acqua tranquilla e $\vec{i}(t)$
	Rotazione intorno all'asse fondamentale mobile	$\psi$ : rotazione propria, fra $(\vec{n}(t), \vec{e}_1(t))$	$\varphi$ : rollio fra $(\vec{n}(t), \vec{j}(t))$

## 4.12 Soluzione degli esercizi

### Esercizio 4.2.2

Innanzitutto, osserviamo che a causa del vincolo di rigidità, tutti punti dell'asse  $r$  del moto elicoidale  $\Phi(t)$  (ad un istante fissato) subiscono lo stesso spostamento parallelo all'asse

$$\vec{s}(t, O_0) = O(t) - O_0 = O'(t) - O'_0 = \vec{s}(t) \quad \forall O_0, O'_0 \in r$$

Ora scegliamo come centro di riduzione proprio un punto  $O(t)$  sull'asse del moto e poniamo

$$O_0 = \Phi_t^{-1}(O), \quad \vec{s}(t, O_0) = O(t) - O_0 = \vec{s}(t).$$

Consideriamo il moto traslatorio

$$(4.12.1) \quad \tau_{\vec{s}}(t, P_0) = P_0 + \vec{s}(t) \quad \forall P_0 \in \mathcal{B}_0$$

e il moto

$$\rho = \Phi \circ \tau_{\vec{s}}^{-1} = \Phi \circ \tau_{-\vec{s}}$$

Mostriamo che il punto  $O(t)$  è un punto fisso per  $\rho_t$ . Infatti,

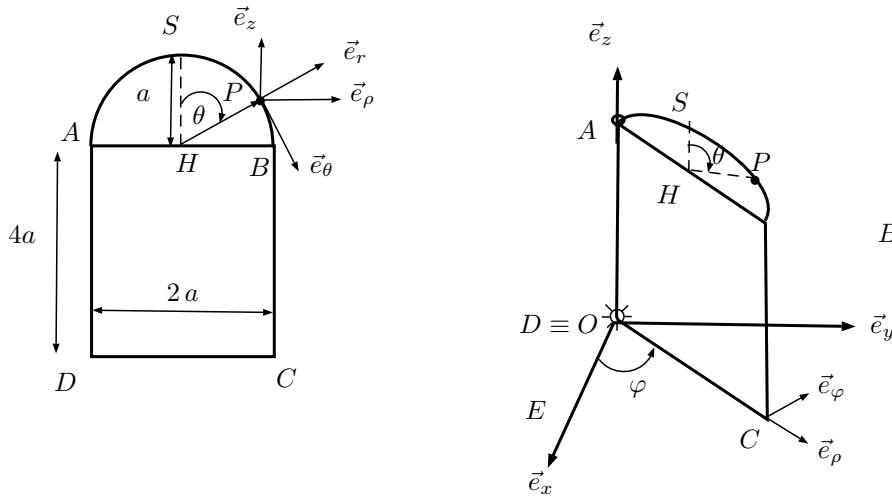
$$\rho(O(t)) = \Phi \circ \tau_{\vec{s}}^{-1}(O(t)) = \Phi(O(t) - \vec{s}(t)) = \Phi(t, O_0) = O(t).$$

Questo discorso si può ripetere per qualunque altro punto  $O'(t) \in r$  ottenendo che

$$\rho' = \Phi \circ \tau_{\vec{s}'}^{-1} = \Phi \circ \tau_{-\vec{s}} = \rho$$

Quindi, tutti i punti dell'asse  $r$  sono fissi per lo stesso  $\rho$  che, quindi, risulta un moto rotatorio intorno ad  $r$ .

### Esercizio 4.6.3



Per iniziare, consideriamo le due terne:

$$\Sigma = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$\Sigma' = (O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$$

e le legge di trasformazione fra di esse

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

Applichiamo al modello il Teorema di Galileo, considerando la terna  $\Sigma$  come fissa e  $\Sigma'$  come intermedia. Allora,

$$\vec{v}_P^{(ass)} = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)}$$

Calcoliamo  $\vec{v}_P^{(rel)}$ , cioè la velocità di  $P$  relativa a  $\Sigma'$ . Il moto di  $P$  rispetto a  $\Sigma'$  è un moto lungo l'arco circolare  $AB$  sul piano del telaio e di centro  $H$ . Quindi, la sua velocità sarà tangente all'arco  $AB$  e proporzionale al prodotto del raggio per  $\dot{\theta}$ . Allora, per esprimere in forma semplice, conviene introdurre una terna ortonormale adattata al punto  $P$ ,

$$\Sigma'' = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$$

legata a  $\Sigma'$  dalla legge di trasformazione

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \vec{e}_\rho + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

Su tale terna, la velocità relativa di  $P$  è

$$\vec{v}_P^{(rel)} = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta = a \dot{\theta} (\cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_z) .$$

Calcoliamo la velocità di trascinamento di  $P$ , cioè la velocità di  $P$  immaginato solidale al telaio

$$\vec{v}_P^{(tr)} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (P - A) ,$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare della terna  $\Sigma'$  e quindi del telaio, che compie un moto rotatorio attorno all'asse fisso  $(O, \vec{e}_z)$ . Quindi,

$$\omega = \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

e

$$P - A = (P - H) + (H - A) = a \vec{e}_r + a \vec{e}_\rho .$$

Dunque,

$$\vec{v}_P^{(tr)} = \dot{\varphi} \vec{e}_z \times a(\vec{e}_r + \vec{e}_\rho) = a \dot{\varphi} (\vec{e}_z \times \vec{e}_r + \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho) = a \dot{\varphi} (\sin \theta + 1) \vec{e}_\varphi .$$

Allora,

$$\begin{aligned} \vec{v}_P^{(ass)} &= a[\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} (\sin \theta + 1) \vec{e}_\varphi] = a[\dot{\theta} (\cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{e}_z) + \dot{\varphi} (\sin \theta + 1) \vec{e}_\varphi] \\ &= a[\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} (1 + \sin \theta) \sin \varphi] \vec{e}_x + a[\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} (1 + \sin \theta) \cos \varphi] \vec{e}_y - a \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_z . \end{aligned}$$

Ora, applichiamo al modello il Teorema di Coriolis per calcolare l'accelerazione di  $P$ . Sappiamo che

$$\vec{a}_P^{(ass)} = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(Cor)} .$$

Allora,

$$\begin{aligned}\vec{a}_P^{(rel)} = \dot{\vec{v}}_P^{(rel)} &= a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + a\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta \\ &= a(\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{e}_r) = a\ddot{\theta}(\cos\theta\vec{e}_\rho - \sin\theta\vec{e}_z) - a\dot{\theta}^2(\sin\theta\vec{e}_\rho + \cos\theta\vec{e}_z) \\ &= a[(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{e}_\rho - (\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{e}_z] ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_P^{(tr)} &= \vec{\alpha}_A + \dot{\vec{\omega}} \times (P - A) - |\vec{\omega}|^2(P - A)_\perp \\ &= \dot{\varphi}\vec{e}_z \times a(\vec{e}_r + \vec{e}_\rho) - \dot{\varphi}^2 a(\sin\theta + 1)\vec{e}_\rho \\ &= a\dot{\varphi}(\sin\theta + 1)\vec{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 a(\sin\theta + 1)\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

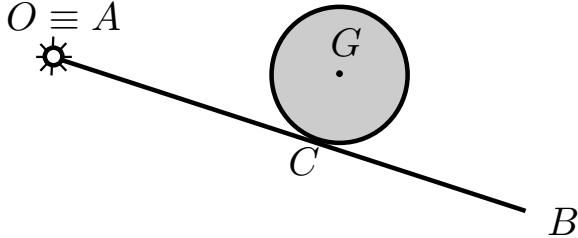
e

$$\vec{a}_P^{(Cor)} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_P^{(rel)} = 2\dot{\varphi}\vec{e}_z \times a\dot{\theta}\vec{e}_\theta = 2a\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\vec{e}_\varphi = 2a\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{e}_\varphi .$$

Dunque,

$$\vec{a}_P^{(ass)} = a[(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) - \dot{\varphi}^2(1 + \sin\theta)]\vec{e}_\rho + a[\dot{\varphi}(\sin\theta + 1) + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta]\vec{e}_\varphi - a(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\vec{e}_z .$$

### Esercizio 4.8.1



Il sistema meccanico è costituito da 2 corpi rigidi vincolati fra loro tramite un vincolo di puro rotolamento.

Calcoliamo i gradi di libertà del modello con il metodo del *bilancio*. I gradi di libertà per 2 rigidi liberi nel piano sono  $g = 3 + 3 = 6$ . I gradi di vincolo sono pari a 2 per la cerniera cilindrica fissa più altri 2 per il vincolo di puro rotolamento. Allora  $v = 4 = r$  è il grado di vincolo sia apparente, sia effettivo (dimostrarlo per esercizio). Quindi,  $l = g - r = 2$ . Dopo aver studiato il metodo dei *congelamenti successivi* nel Cap. 5, si può verificare il risultato con tale metodo.

Scegliamo 2 coordinate libere per il sistema dei 2 corpi rigidi, per esempio le coordinate polari  $(\rho, \varphi)$  del polo mobile  $\bar{C}$  che corre lungo l'asta, con  $0 \leq \varphi < 2\pi$  e  $0 \leq \rho \leq L$ . È chiaro che  $\varphi$  individua univocamente la configurazione dell'asta, mentre  $\rho$  quella del disco. Ora dobbiamo calcolare i vettori posizione e le velocità angolari dei 2 rigidi in funzione delle 2 coordinate libere  $(\rho, \varphi)$ . Considerando una terna adattata al problema, cioè  $(O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ , abbiamo

$$\bar{C} - O = \rho\vec{e}_\rho , \quad G - O = (G - \bar{C}) + (\bar{C} - O) = R\vec{e}_\varphi + \rho\vec{e}_\rho$$

Derivando rispetto al tempo, otteniamo le velocità:

$$(4.12.2) \quad \vec{v}_{\bar{C}} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi , \quad \vec{v}_G = R\dot{\vec{e}}_\varphi + \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = (\dot{\rho} - R\dot{\varphi})\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi .$$

Per calcolare la velocità angolare del disco, ricorriamo alla cinematica relativa, considerando una terna fissa  $(O, \Sigma_0)$ , una terna intermedia solidale all'asta  $(O, \Sigma') = (O; \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$  e una terna solidale al disco  $(G; \Sigma(t)) = (G; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Per il Teorema di Frisi,

$$\vec{\omega}^{(disco, ass)} = \vec{\omega}^{(disco, rel)} + \vec{\omega}^{(tr)} .$$

Introducendo come coordinata *sovabbondante* l'angolo di rotazione del disco  $\theta$  rispetto alla terna  $(O, \Sigma')$ , si può scrivere  $\vec{\omega}^{(disco, rel)} = \dot{\theta} \vec{k}$ . D'altra parte, per il vincolo di puro rotolamento risulta

$$\vec{0} = \vec{v}_{C'}^{(rel)} = \vec{v}_C^{(rel)} = (\dot{\rho} + R\dot{\theta})\vec{e}_\rho$$

Dunque, si ottiene  $\vec{\omega}^{(disco, rel)} = -\frac{\dot{\rho}}{R}\vec{k}$ , quindi

$$\vec{\omega}^{(disco, ass)} = -\frac{\dot{\rho}}{R}\vec{k} + \dot{\varphi}\vec{k} = (\dot{\varphi} - \frac{\dot{\rho}}{R})\vec{k} .$$

Si osservi, che la velocità del punto di contatto del disco con l'asta è

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C'} = \vec{\omega}^{(asta)} \times (C - O) = \dot{\varphi}\vec{k} \times \rho\vec{e}_\rho = \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi ,$$

diversa da  $\vec{v}_{\bar{C}}$ . Naturalmente, anche le formule (4.12.2) si possono ricavare tramite la cinematica relativa. Lo si verifichi per esercizio e si calcolino anche le accelerazioni dei punti  $C$ ,  $\bar{C}$  e  $G$ .

#### Esercizio 4.8.2

Si veda la correzione del tema d'esame del 20/01/2020: <https://moodle2.units.it/mod/folder/view.php?id=260444>