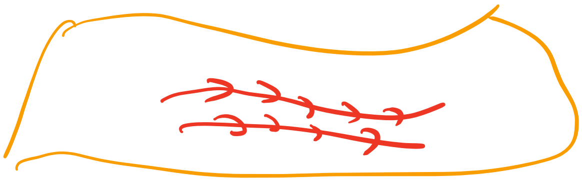
SISTEMI DINAMICI

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = f(x(\tau)) \quad \leftarrow$$

$$x_{i+1} = f(x_i)$$

STUDIO QUALITATIVO

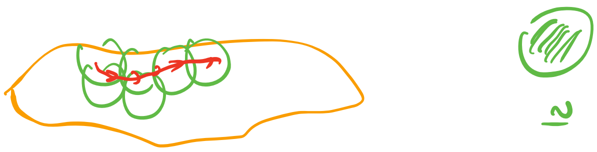


spazio delle fasi

M $\quad (x_1, \dots, x_n)$

$\mathbb{R}^n$

$\rightarrow$ M varietà differenziabile

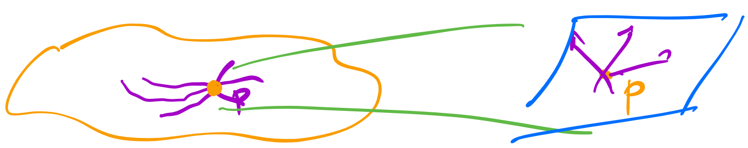


$x_1 \dots x_n$

$\cong \mathbb{R}^n$

$x_i = x_i(y_1 \dots y_n)$

— campi vettoriali su M



$$v(f) = \frac{d}{d\tau} f(\gamma(\tau)) \Big|_{\tau=0}$$

$$= \frac{d}{d\tau} f(x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau}$$

$$= \left(\sum_i \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f$$

$$X_p = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

$$v(fg) = f(p)\, v(g) + g(p)\, v(f)$$

Dipende in modo liscio da p.

v_p obbedisce Leibniz

Siamo arrivati a dire che un campo vettoriale $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

$$X(fg) = X(f)\,g + f\,X(g)$$

<u>Def</u> : $X \in \mathfrak{X}(M)$ una curva liscia $\gamma \in C^\infty(J, M)$ è una curva integrale per X

se $\dot\gamma(\tau) = \underline{X_{\gamma(\tau)}}$

$$\dot\gamma(\tau)(f) = \frac{d}{d\tau} f(x(\tau)) = \sum_i \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$\Rightarrow \quad \dot\gamma(\tau) = \sum_i \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$X = \sum_i a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

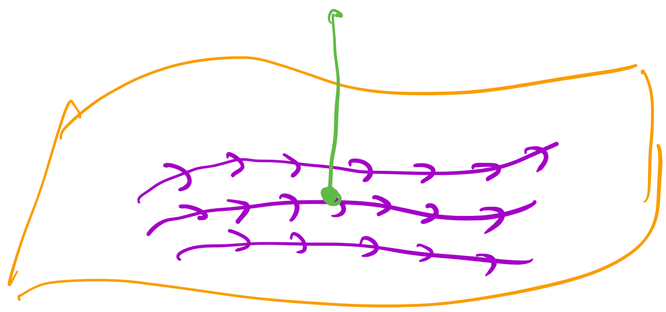
$$\frac{d}{d\tau} x^i(\tau) = a^i(x(\tau))$$

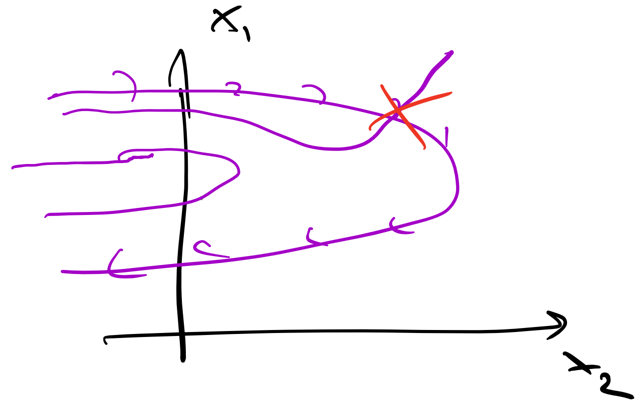
$$\boxed{\frac{d}{d\tau} x^i(\tau) = f(x(\tau))}$$

sistema eq diff ordinarie

campo vettoriale

$X = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$





Proprietà delle equazioni differenziali ordinarie

Risultato principale

Th: Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $a \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$

$\forall x_0 \in U$, esiste $J_{x_0} \subset \mathbb{R}$ intorno aperto centrato in 0, e una soluzione $x : J_{x_0} \longrightarrow U$ $\quad x(t=0)=x_0$

di
$$\frac{d}{dt} x^i(t) = a^i(x(t)) \qquad i = 1, \dots, n$$

con condizione iniziale $x(0) = x_0$ e che è massimale (nel senso che ogni altra soluzione si ottiene per restrizione a qualche sottointervallo di J_{x_0}).

Altro risultato: dipendenza condizioni iniziali

Th: $\forall\, a \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$, l'insieme

$$J = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in J_x \}$$

è un aperto di $\{0\} \times U$ in $\mathbb{R} \times U$

$x(t=0) = x_0$

e la mappa $\varphi : J \longrightarrow U$

$(t, x) \longmapsto \varphi_t(x)$

è liscia

Risultato analogo vale per la dipendenza dai parametri

Nel nostro caso, $X \in \mathcal{X}(M)$: se scegliamo

coordinate locali

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \rightsquigarrow \frac{d}{dt} x^i = a^i(x(t))$$

Prendiamo una carta (U, φ)

$$X = \sum_j a^j_{(u)} \frac{\partial}{\partial u^j} \qquad \dot{u}^i = a^i(u(t))$$

Se $a = (a^1 \dots a^n) : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ corrisponde a X, allora ogni curva integrale per a

$x : J \longrightarrow \varphi(U)$ definisce una curva integrale $\gamma(t) = \psi^{-1}(x(t))$ per X

Th $X \in \mathfrak{X}(M)$ campo vettoriale

$\forall\, p \in M$, $\exists$ un aperto $J_p \subseteq \mathbb{R}$ centrato in 0, e una soluzione $\gamma : J_p \longrightarrow M$ del problema ai dati iniziali

$$\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)} \quad , \quad \gamma(0) = p \qquad (*)$$

che è massimale (nel senso che ogni altra soluzione del problema ai dati iniziali si ottiene per restrizione a un sottointervallo)

L'insieme

$$J = \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in J_p\}$$

è un aperto di $\{0\} \times M$ e la mappa

$$\begin{aligned} \varphi : J &\longrightarrow M \\ (t,p) &\longmapsto \varphi_t(p) \end{aligned}$$

tale che $\gamma(t) = \varphi_t(p)$ risolve il problema ai dati iniziali, è liscia.

<u>Dim</u> [sketch]

Esistenza e unicità per T piccoli seguono da esistenza e unicità per eq. diff. ordinarie

Per dimostrare l'unicità per tempi più grandi

$\gamma : J \longrightarrow M$ soluzione massimale

$\gamma_1 : J \longrightarrow M$ altra soluzione

ma con $\gamma_1(T) \neq \gamma(T)$ per qualche $T \in J$, $T > 0$

Definiamo

$$b = \inf \{ T \in J \mid T > 0 , \gamma_1(T) \neq \gamma(T) \}$$

Sappiamo che $b > 0$.

<u>Caso 1</u> $\gamma_1(b) = \gamma(b) := q$. Allora

$\lambda_1(s) = \gamma_1(b+s)$

$\lambda(s) = \gamma(b+s)$ $\longrightarrow$ soluzioni di $\begin{cases} \lambda(0) = q \\ \dot{\lambda}(s) = X_{\lambda(s)} \end{cases}$

quindi sono uguali per $|s|$ piccolo

$\longrightarrow$ $\gamma_1(T)$ e $\gamma(T)$ sono uguali per T vicino a b $\longrightarrow$ in contraddizione con la definizione di b.

<u>Caso 2</u> $\gamma_1(b) \neq \gamma(b)$

Scegliamo due intorni aperti disgiunti U di $\gamma(b)$ e U_1 di $\gamma_1(b)$ [Hausdorff!]

Prendiamo $t = b - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo $\Rightarrow \gamma(t) \in U$ e $\gamma_1(t) \in U_1$

Ma questo è impossibile perché $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ per $0 \le t < b$

Le altre proprietà si dimostrano in maniera simile

☺

SISTEMI DINAMICI 1D

$\dot{x} = f(x)$ $x(t)$ funzione di una variabile reale a valori in $\mathbb{R}$

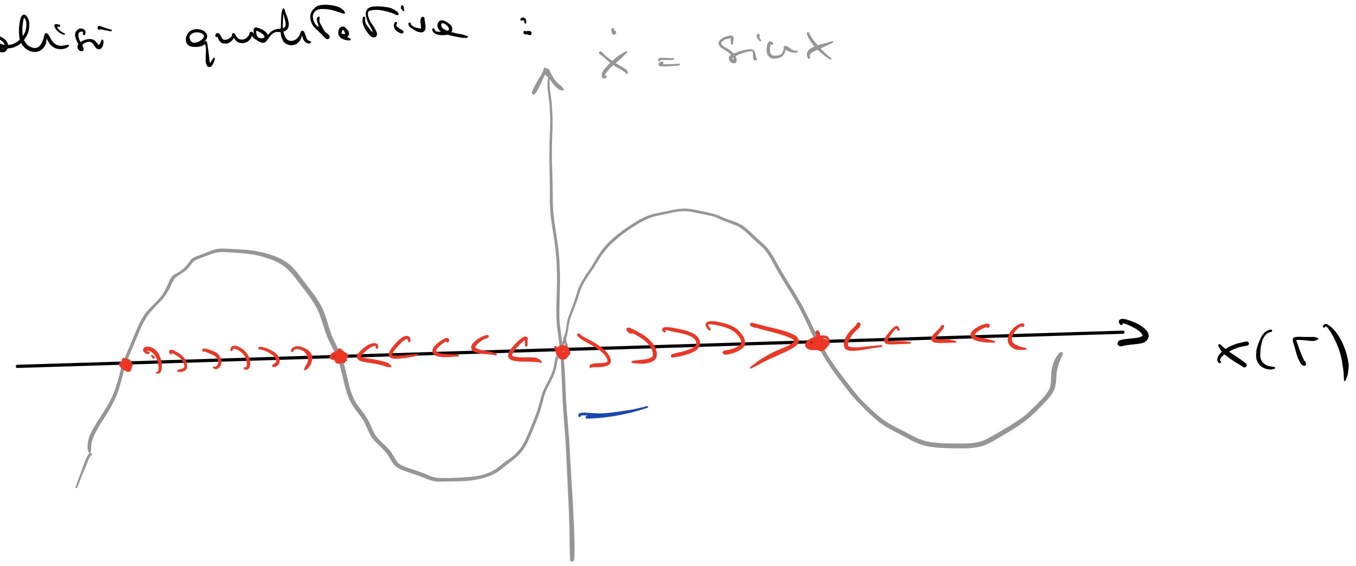
$f : \underset{\mathbb{R}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ ed è C^∞

Esempio: $x' = \sin x$

Si risolve per separazione delle variabili.

$$dt = \frac{dx}{\sin x} \longrightarrow t = \int \frac{dx}{\sin x} = -\ln\left|\frac{1}{\sin x} + \cot x\right| + \text{costante}$$

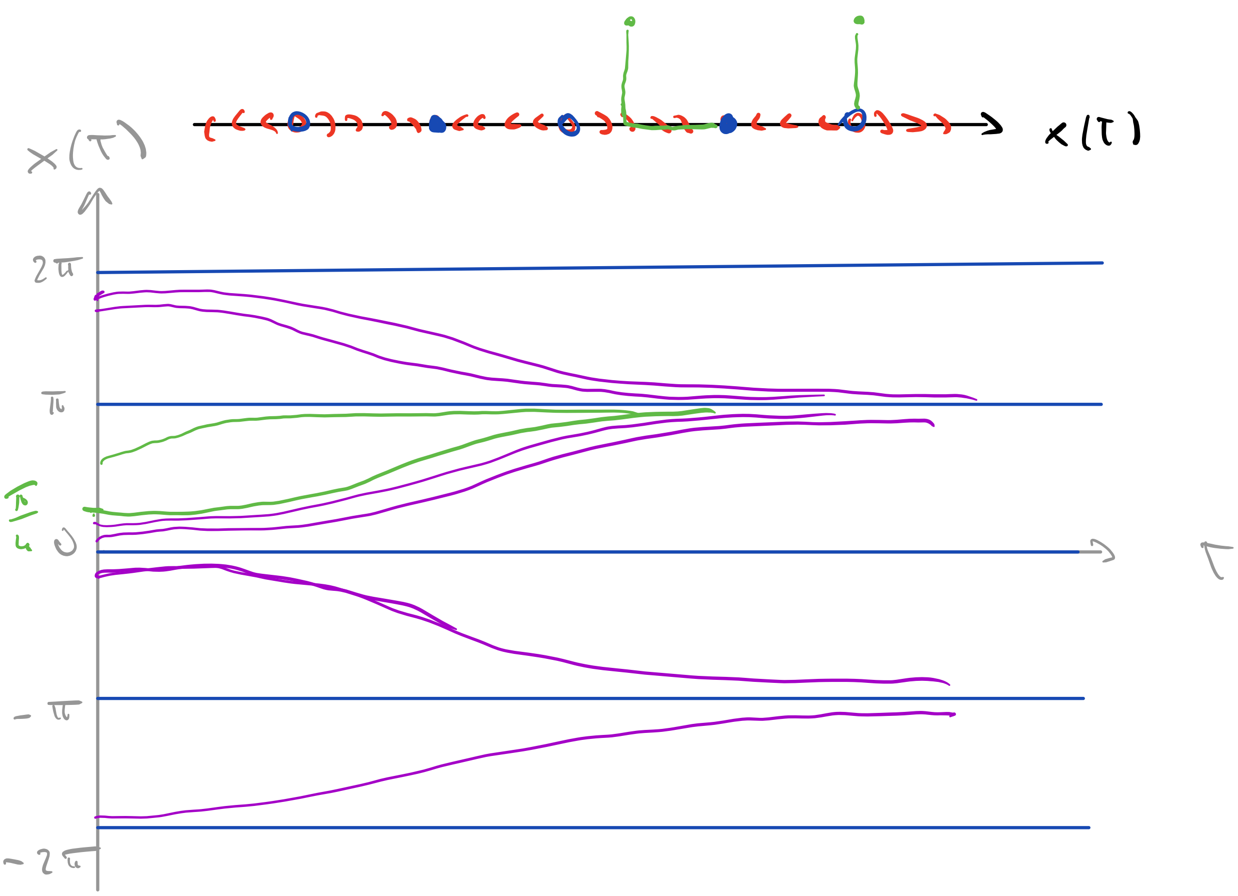
Analisi qualitativa :



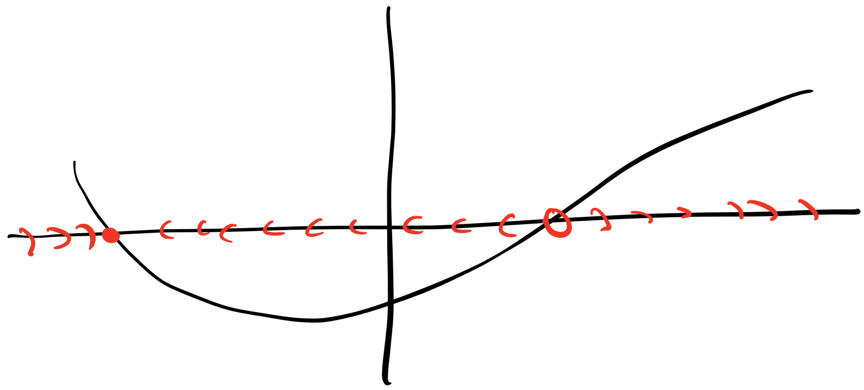
$$\frac{dx}{dt} = f(x) \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \sin x$$

Punti in cui $\dot{x} = 0$ $\left(\frac{dx}{dt} = 0 = \sin x \right)$

punti fissi (o critici, o di equilibrio)



Ritratto di fase $\dot{x} = f(x)$



Esercizio: Ritratto di fase per

1) $\dot{x} = x^2 - 1$

2) $\dot{x} = x - \cos x$