SISTEMI MECCANICI UNIDIMENSIONALI (1 grado di libertà)

- $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$
- ci concentriamo su sistemi con $F = F(x)$

$\rightsquigarrow$ si conserva l'ENERGIA

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{en. cinetica}}}{E(x,v) = T(v)} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{en. potenziale}}}{V(x)}$$

è una cost. del moto

$$\rightarrow \quad E(x(t), v(t)) = \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{costante}}}{E}$$

- Le traiettorie sul piano di fase giacciono sulle curve di livello date dall'eq.

$$E(x, v) = E$$

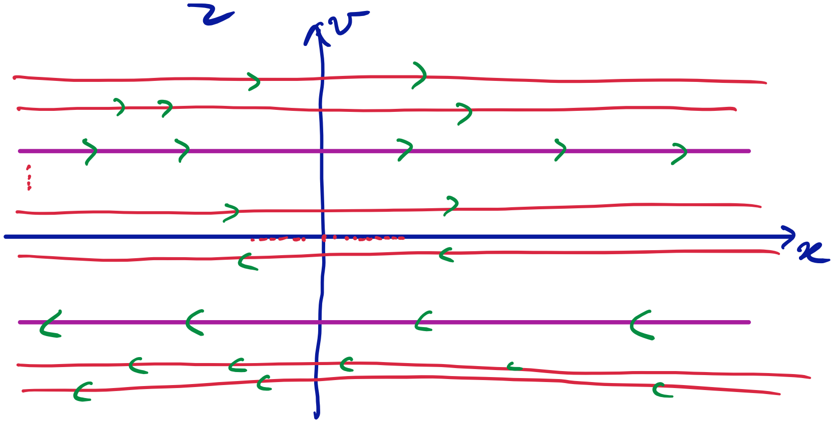
ES 1) PARTICELLA LIBERA

$\ddot{x} = 0 \qquad E(x,v) = \frac{mv^2}{2}$

$\bar{f} = \begin{pmatrix} v \\ f(x) \end{pmatrix}$

curve di livello sono date da eq.

$$\frac{mv^2}{2} = E \rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}}$$



$v = \dot{x}$

$v > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0$

$\Rightarrow x$ cresce cont

2) OSC. ARM.

$\ddot{x} = -\omega^2 x$, $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$, $E(x,v) = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$

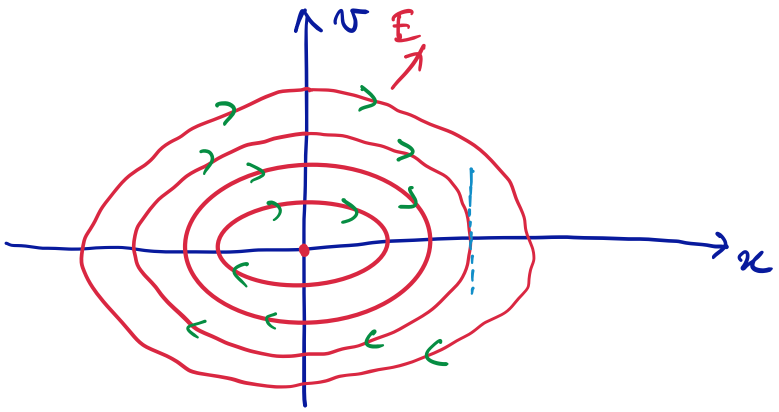
Curve di livello:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = E$$

$E \neq 0$

$$\frac{v^2}{2E/m} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \quad \leftarrow \text{ELLISSE}$$

$E = 0$ $\quad \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = 0 \rightsquigarrow (x,v) = (0,0) \rightarrow$ curva di liv. degenere (1 pto)



Traiettorie giacciono sulle curve di livello

- nel semipiano superiore le frecce vanno verso DESTRA,
  " " inferiore " " " " SINISTRA;
- traiettorie attraversano l'asse delle ascisse VERTICALMENTE (se il pto di intersez. NON è di equil.):

[Tang. a una curva $y = f(x)$ nel piano (x,y) in un pto x_0 è la retta $y = \alpha x + q$ con $\alpha = f'(x_0)$; una retta verticale ha pendenza m infinita]

La curva nel piano (x,v) avrà eq.

$$v = v(x)$$

$$\alpha = \frac{dv(x_0)}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = \dot{v} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{f(x_0)}{v(x_0)} \qquad (*)$$

x_0 è il pto di attraversam. dell'asse delle ascisse

→ se x_0 non è di equil. (cioè $f(x_0) \neq 0$), allora $\alpha \to \infty$ (perché $v(x_0) \to 0$). //

(*) $\alpha = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ $\qquad v(x) = v(t(x))$

$v(t)$

è l'inversa di $x(t)$

Analisi qualitativa

$$E(x, v) = T(v) + V(x)$$

le curve di livello: $T(v) + V(x) = E$

cost.

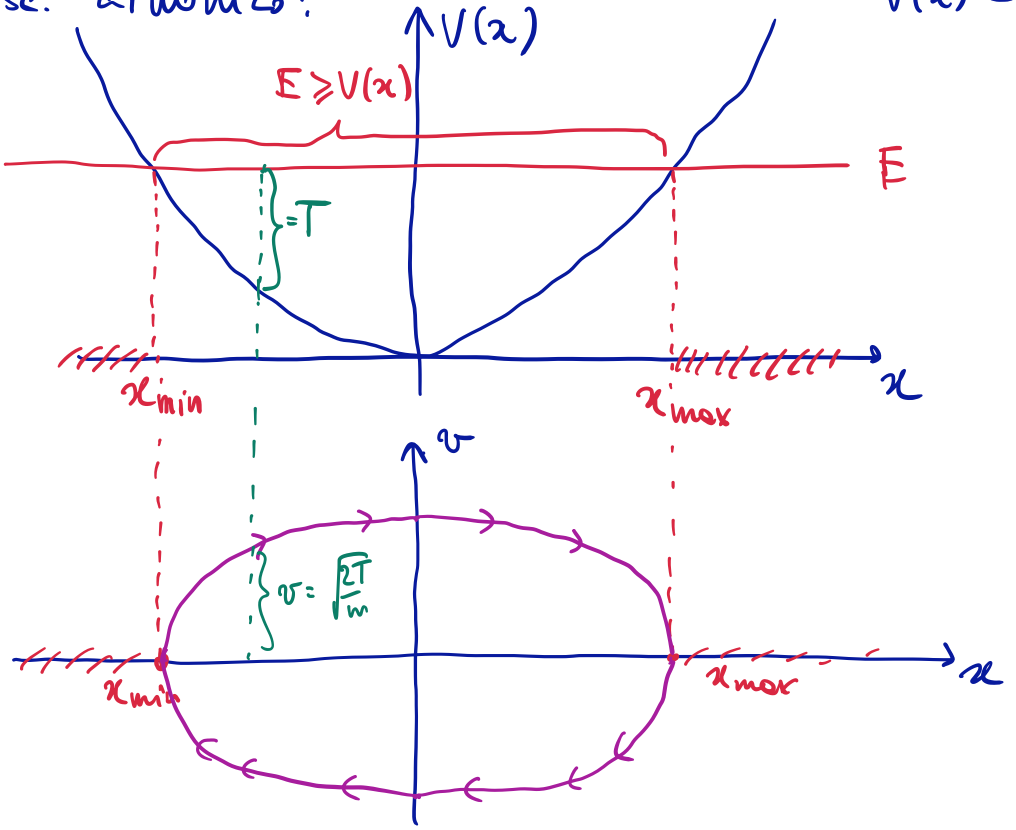
- $T(v) = \frac{mv^2}{2} \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$E - V(x) \geq 0 \qquad (\cdot)$$

un pto x può stare su una curva di livello (e quindi essere un pto permesso, cioè un pto attraverso cui può passare una traiettoria) se soddisfa $(\cdot)$, cioè $V(x) \leq E$

ES. Osc. armonico: $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$



Differenza tra E e V mi da T. Dato $T = \frac{mv^2}{2}$ ho $v = \pm\sqrt{\frac{2T}{m}}$

- $x(t) \in \{ x \in \mathbb{R} \mid V(x) \leq E \}$

per osc. armonico $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \leq E \rightarrow x^2 \leq \frac{2E}{m\omega^2}$

$$\hookrightarrow x(t) \in \Big[\underset{x_{min}}{\underset{\shortparallel}{-\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}} , \underset{x_{max}}{\underset{\shortparallel}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}} \Big]$$

- Nei pti dove $V(x) = E$ (x_{min} e x_{max} per osc. arm.)

$\hookleftarrow\!\!\!\rightarrow$ $T = 0 \Rightarrow v = 0$

Tali pti sono chiamati PUNTI D'INVERSIONE.

$$\ddot{x} = f(x) = -\frac{1}{m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pti invers. } V'(x) \neq 0}}{V'(x)}$$

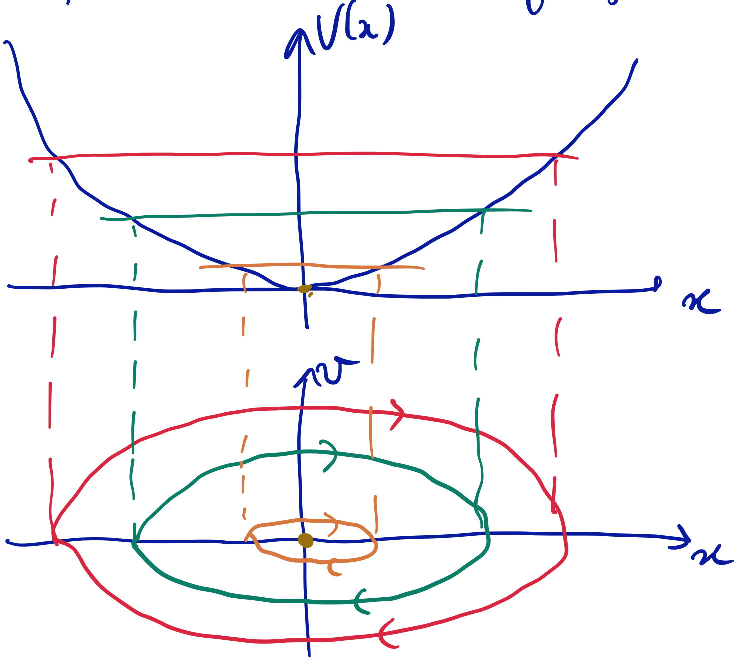
⇒ anche se $v=0$ la traiettoria transita per questi pti (forza non-nulla)

- Per osc. arm.

$E>0$: il moto è dato da una curva CHIUSA

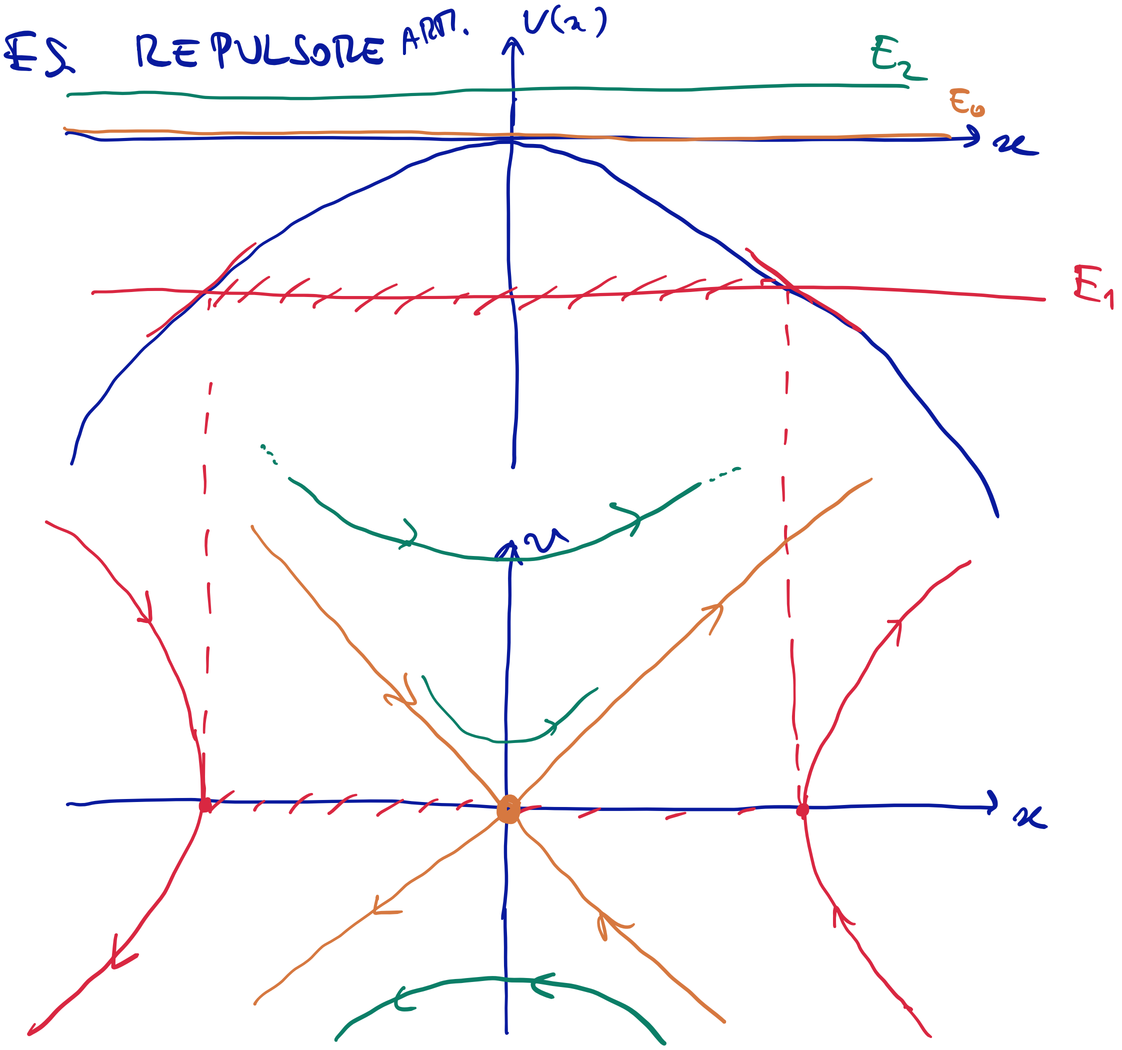
→ il moto $x(t)$ è una funz. PERIODICA

→ Traiettorie si possono ottenere (qualitativam.) semplicemente dal grafico di $V(x)$



$E=0$) l'unico pto per cui $V(x) \leq E$ è $x=0$ → il pto equil.

ES. REPULSORE ARM.



$V(x) = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

$(x,v)=(0,0)$ è pto di equil.

Notiamo delle traiettorie in $\mathbb{R}^2$ che si intersecano (non ce le aspettiamo poiché il sist. è autonomo)
→ questo può avvenire solo per $t \to \pm\infty$

Vediamo se effettivamente le curve di livello sono quelle ricavate con l'analisi qualitativa:

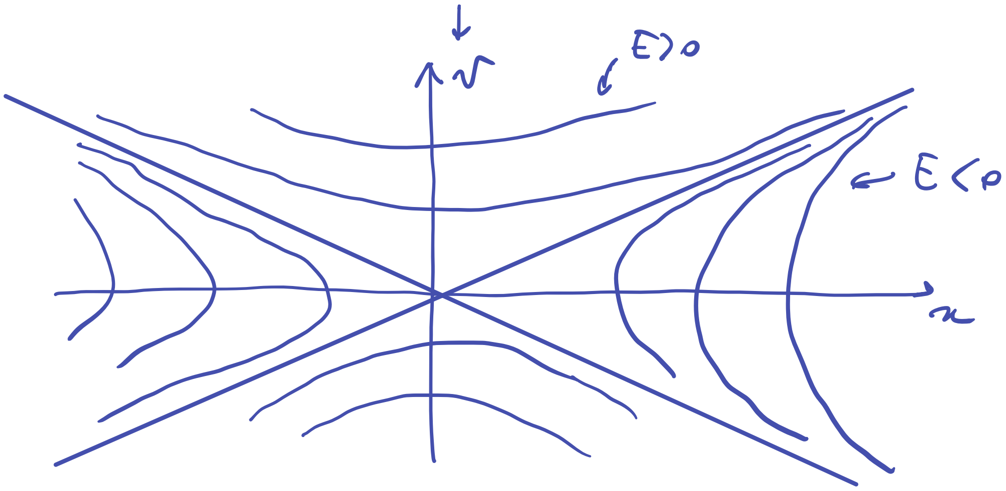
Rep. arm. $\ddot{x} = \omega^2 x$ $\quad E(x,v) = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

Curve di livello: $E(x,v) = E^{cost.}$

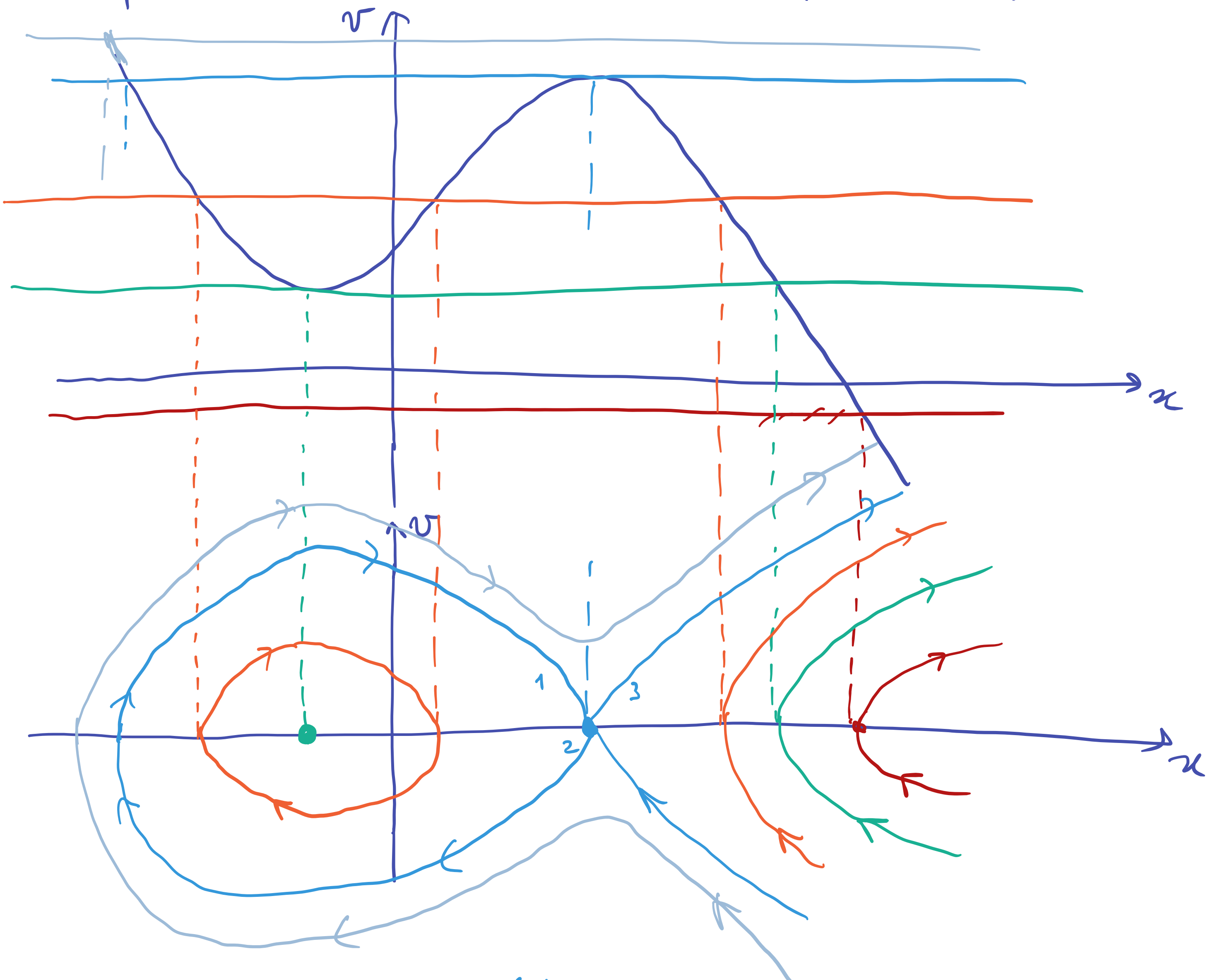
$E \neq 0 \quad \frac{v^2}{2E/m} - \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1$ IPERBOLE

$E = 0 \quad v^2 - \omega^2 x^2 = 0$

$(v - \omega x)(v + \omega x) = 0 \to$ UNIONE di due RETTE



ES) Dato l'andam. qualitativo di $U(x)$, determinare qualitativam. le traiettorie nel piano di fase (x, v).



$$\overset{v(x)}{\frac{dv}{dx}} \sim \frac{f}{v} \rightarrow \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$