

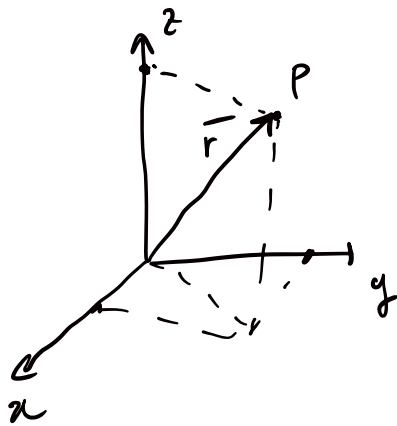
FORMALISMO LAGRANGIANO

Permette di scrivere le eq. del moto in un sistema di coordinate adatto al problema in esame.

Consideriamo un pto materiale (di massa m).

Nota la forza \vec{F} che agisce su esso, l'eq. di Newton ci fornisce

un'eq. diff. per il moto $\vec{r}(t)$ $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \vec{r}(t)$



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

↑
coordinate

Un set di coordinate di \mathbb{R}^3 è un insieme di tre numeri che individuano UNIVOCAMENTE un pto di \mathbb{R}^3 .

Ci sono infiniti set di coord. Per es. in \mathbb{R}^3 ci sono anche le coord. POLARI

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Il moto è descritto da una funt. $\vec{r}(t)$ a valori in \mathbb{R}^3 cioè da tre funt. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ d.c.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

→ per ogni t vengono assegnati 3 numeri, che individuano univocam. dove si trova il pto all'istante t .

PUNTO MATERIALE

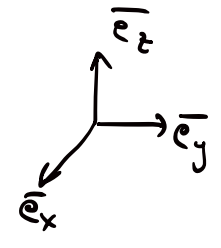
$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ sia la risultante delle forze agenti sul pto.

→ $m\vec{a} = \vec{F}$ (in sist. di rif. inerziale)

vettori : sono uguali se sono uguali le loro componenti rispetto a una base

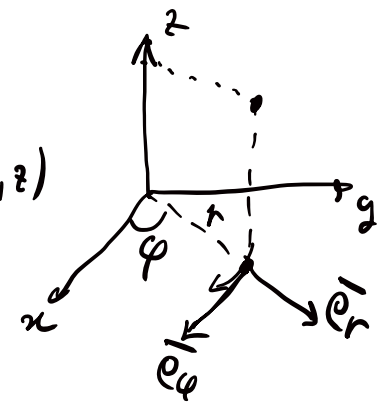
Sist. di rif. cartesiane :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$



Sist. di rif. con coord. cilindriche (r, φ, z)

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_\varphi \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$



→ Ad ogni sist. di coordinate è associata una base!

Cambio di coordinate

$\{x, y, z\}$ $\{q_1, q_2, q_3\}$

Per passare da un set di coord. all'altro, abbiamo bisogno di tre funzioni:

$$\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, q_3) \\ y &= y(q_1, q_2, q_3) \\ z &= z(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$



"trasf. di coordinate"

Es. $(q_1, q_2, q_3) = (r, \varphi, z)$
coord. cilindriche

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Deve essere INVERTIBILE, cioè la matrice jacobiana della mappa è una matrice invertib. ($\Leftrightarrow \det \neq 0$)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \dots & \dots \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \end{matrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

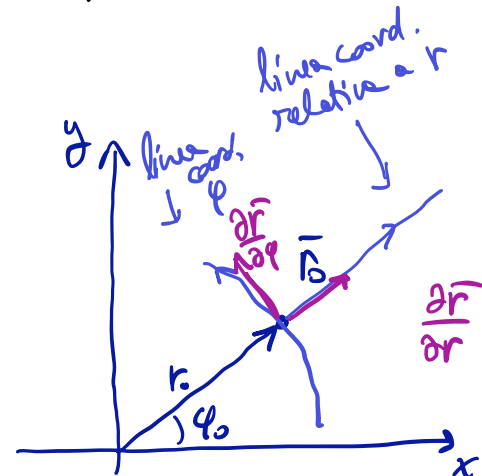
devono essere LINEARI. INDEP.

cioè devono formare una BASE in \mathbb{R}^3

vettori tangenti alle linee coordinate

ES.) $\mathbb{R}^2 \quad (x, y) \quad (r, \varphi)$

Tranf. coord:
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

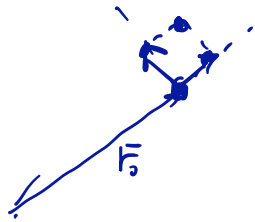


(r, φ) è un buon sist. di coord. se dati r e φ , qti individuano un pto e se ogni pto del piano è individuato da una coppia (r, φ) .

In particolare, se parto da un punto \vec{r}_0 (individuato da (r_0, φ_0)), variando r e φ in un intorno di r_0, φ_0 devo essere in grado di toccare tutti i pti dell'intorno di \vec{r}_0 !

linee coord.: $\begin{pmatrix} x(r, \varphi_0) \\ y(r, \varphi_0) \end{pmatrix}$ parametro delle curve tenendo fisso φ_0 e variando r

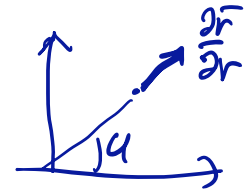
linee coord.: $\begin{pmatrix} x(r_0, \varphi) \\ y(r_0, \varphi) \end{pmatrix}$ (circonferenza di raggio r_0)



← i vett. tg alle linee coord.

devono essere LINEARMENTE INDIPENDENTI
(cioè le linee coord. si intersecano trasversalmente)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$



Punto vincolato a stare su una SUPERFICIE Q in \mathbb{R}^3 :

"spazio delle CONFIGURAZIONI"

Come descriviamo la superficie Q in \mathbb{R}^3 ?

1) l'insieme di pt. che soddisfano

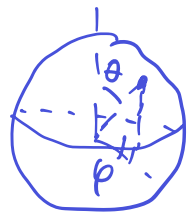
$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{con } f \text{ regolare e t.c. } \nabla f \neq 0 \quad \forall \text{ pt. di } Q$$

2) in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2) \\ y = y(q_1, q_2) \\ z = z(q_1, q_2) \end{cases} \quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2)$$

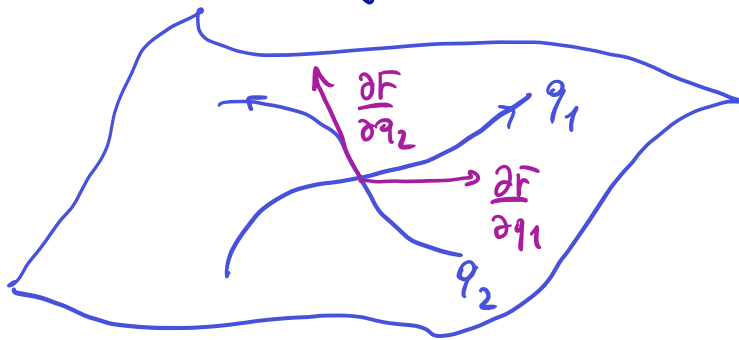
ES.) SFERA in \mathbb{R}^3 di raggio R

$$1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$



$$2) \quad \begin{cases} x = R \cos\varphi \sin\theta \\ y = R \sin\varphi \sin\theta \\ z = R \cos\theta \end{cases} \quad (q_1, q_2) = (\theta, \varphi)$$

Torniamo a una superficie generica descritta in forma parametrica.



$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}$ sono due vett. indipend. tg alla superficie
(altrimenti la parametrizzazione non sarebbe buona).



Tutti i vettori tangenti alla superficie in un pt $(q_1^{(0)}, q_2^{(0)})$ sono esprimibili come combinat. lineare d.

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \sim \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2}$$

L'insieme di tutti i vett. tg nel pt P è chiamato
SPAZZO TANGENTE $T_P Q$

$\delta F \in T_P Q$ "spostamento virtuale"

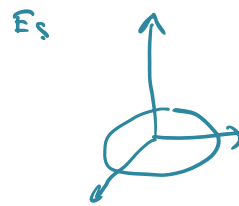
$$\hookrightarrow \delta F = \sum_{h=1}^2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} \delta q_h \quad \delta q_h \in \mathbb{R}$$

↑
coeff. del vett. δF rispetto alle base coordinate

Le coordinate q_1 e q_2 sono dette **COORD. LIBERE**

Punto materiale vincolato a stare su una CURVA Q in \mathbb{R}^3 :

$$1) \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

$$2) \quad \bar{r} = \bar{F}(q)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad q \equiv \varphi$$

Formalmente la descrizione parametrica è analoga per tutti i tre casi visti (pto in \mathbb{R}^3 in coord. q_1, \dots, q_m ; pto su surf., pto su linea)

$$\bar{r} = \bar{F}(q_1, \dots, q_m)$$

↑
coord.
libere

$$m = 1, 2, 3$$

↑
NUMERO DI GRADI
DI LIBERTA'

Dinamica

Vincolo è fisicamente realizzato da una FORZA (REAZIONE VINCOLARE) che in generale NON è nota a priori.

In presenza di un vincolo, l'eq. di Newton può essere scritta

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{\Phi}$$

↑
forza esterna
attiva

↑
reaz. vincolare (un'ulteriore incognita del problema)

Def. VINCOLI IDEALI se la superficie o la curva sono "lisce", cioè se la reazione vincolare in P è sempre \perp alla superf. o alla curva in P :

$$\bar{\Phi} \cdot \delta \bar{r} = 0 \quad \forall \delta \bar{r} \in T_P Q$$

$$\Updownarrow$$

$$(\ast) \quad \bar{\Phi} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} = 0 \quad \forall h = 1, \dots, m$$

↑ Conditione realistica (approssim.) in molti casi reali

$(\ast) \Rightarrow \bar{\Phi}$ compie lavoro nullo \forall spostamento virtuale

$(\ast) \Rightarrow$ permette di ottenere m eq. d'ff. pure (in cui non appaiono le reaz. vincolari) proiettando le eq. di Newton (vett.) sulla superf. (in realtà m $T_P Q$)

$$m\bar{a} - \bar{F} = \bar{\Phi} \xrightarrow{\substack{\text{proiettiamo sui} \\ \text{vett. di base} \\ \text{di } T_P Q}} (m\bar{a} - \bar{F}) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} = 0 \quad h=1, \dots, m$$

\nearrow
 m equazioni (\ast)

Il moto su Q è descritto dalle funzioni $q_h(t)$

$$t \mapsto (q_1(t), \dots, q_m(t)) \quad \leftarrow m \text{ funzioni } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Se conosciamo le $q_h(t)$ possiamo descrivere il resto in \mathbb{R}^3

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(q_1(t), \dots, q_m(t))$$

(\ast) sono m equazioni nelle m incognite $q_h(t)$ $h=1, \dots, m$

Generalizzazione: VINCOLO MOBILE

$$\bar{r}(q_1, \dots, q_m, t)$$

($m=3$: moti relativi)

SISTEMI VINCOLATI DI N PTI MATERIALI

N pt materiali sono individuati da $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N$

$\rightarrow 3N$ coord. cartesiane

Notazione: $\bar{w} = (w_1, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2, z_2}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_N, y_N, z_N}_{\bar{r}_N})$
 $w_j \quad j=1, \dots, 3N$

$\bar{w} \in \mathbb{R}^{3N} \rightarrow$ un pt di \mathbb{R}^{3N} mi da una configurazione di N pt

Def. Si dice che un sist. di N pt $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N$ è soggetto

• π VINCOLI OLONOMI ($0 < \pi < 3N$), se

l'insieme delle configurazioni accessibili soddisfa

π equazioni delle forme

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \quad s=1, \dots, \pi \quad (\neq)$$

dove $f^{(1)}, \dots, f^{(\pi)}$ sono funz. regolari e indep., cioè

$$\text{rk} \left(\frac{\partial f^{(s)}}{\partial w_j} \right) = \pi \quad \forall \text{ confj. accessibile, cioè che soddisfa } (\neq)$$

"rank"

$$\nabla f^{(1)}, \dots, \nabla f^{(\pi)} \text{ sono lin. indep.}$$

$\Rightarrow \forall$ tempo t , resta definita una varietà $Q \subset \mathbb{R}^{3N}$
di d'u. $n = 3N - \pi$

Q è chiamato SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI

n è detto NUMERO DI GRADI DI LIBERTA'

Possiamo introdurre (almeno localm.) una parametrizzazione di Q , cioè esprimere le w_i in funzione di n parametri q_h detti **COORDINATE LIBERE**

(Teorema delle funz. implicite ci assicura che possiamo esprimere r variabili in funz. delle rimanenti: $3N - r \rightarrow$ es. di una parametrizzazione)

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_n, t) \quad j=1, \dots, 3N$$

h.c.

$$\text{rk} \left(\frac{\partial w_j}{\partial q_h} \right) = n \iff \frac{\partial w}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial q_n} \text{ sono l'n. i'ndip.}$$

$$j=1, \dots, 3N \\ h=1, \dots, n$$

↑
rett. t_j alle linee coordinate relative a q_1, \dots, q_n

(Ci sono infinite parametrizzazioni possibili; data una parametr. con q_1, \dots, q_n , possiamo fare una trasform. di coord. e passare a $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$)