# FISICA  NUCLEARE  (3)

- Calcolo della Neutron drip line
- La misura e la sezione d’urto di Rutherford
- Struttura dei nuclei e modelli nucleari: modello a gas di Fermi

# Neutron drip line

Fissato $Z$, crescita $N$ porta a ***isotopi instabili*** ($n$ in livelli sempre meno legati _ princ. esclusione)

Massimo # $n$ che per dato $Z$ ⇒ ***isotopi stabili***: ***neutron drip line*** ⇒ nuclidi per i quali nulla energia $S_n$ di separazione d'un $n$

$$\boxed{S_n} = -[M(A,Z) - M(A-1,Z) - m_n]c^2 =$$

$$= -[Zm_p + Nm_n - B(A,Z) - Zm_p - (N-1)m_n + B(A-1,Z) - m_n]c^2 =$$

$$\boxed{= B(A,Z) - B(A-1,Z)}$$

sgocciolamento … d'un $n$

$B(A,Z)$ ∼ funz. continua di $A$ e $Z$ ⇒ sviluppo Taylor fino 1° termine

$B(A+\delta A, Z+\delta Z) \approx B(A,Z) + [\partial B/\partial A]\delta A + [\partial B/\partial Z]\delta Z + \ldots$ ed essendo $\delta A = -1$ , $\delta Z = 0$

$$B(A+\delta A, Z+\delta Z) \approx B(A,Z) - [\partial B/\partial A]$$

da cui

$$\boxed{S_n \approx B(A,Z) - B(A+\delta A, Z+\delta Z) \approx B(A,Z) - B(A-1,Z) \approx \partial B/\partial A}$$

Da ***Weizsäcker***, trascurando accoppiamento e con $Z \simeq (Z-1)$

$$B(A,Z) = b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A}$$

Derivando $\partial/\partial A$ :

$$\partial B/\partial A \simeq S_n = b_V + \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} - \frac{1}{3} b_C Z^2 A^{-4/3} + b_{sim} \left[1 - \frac{4Z^2}{A^2}\right]$$

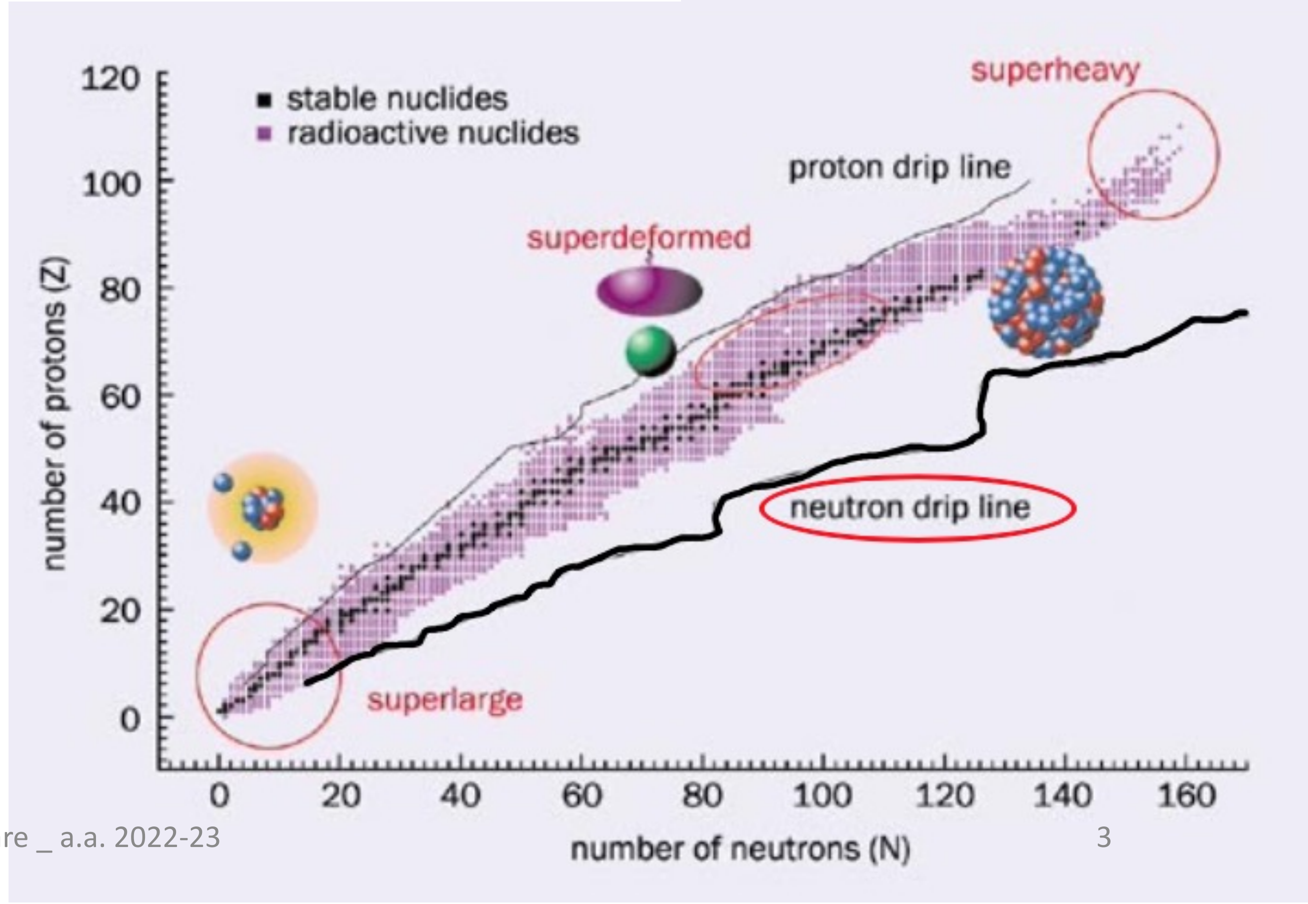
**Condizione per "drip line": $S_n = 0$**

$$b_V + b_{sim} - \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} = Z^2 \left(\frac{1}{3} b_C A^{-4/3} + \frac{4 b_{sim}}{A^2}\right)$$

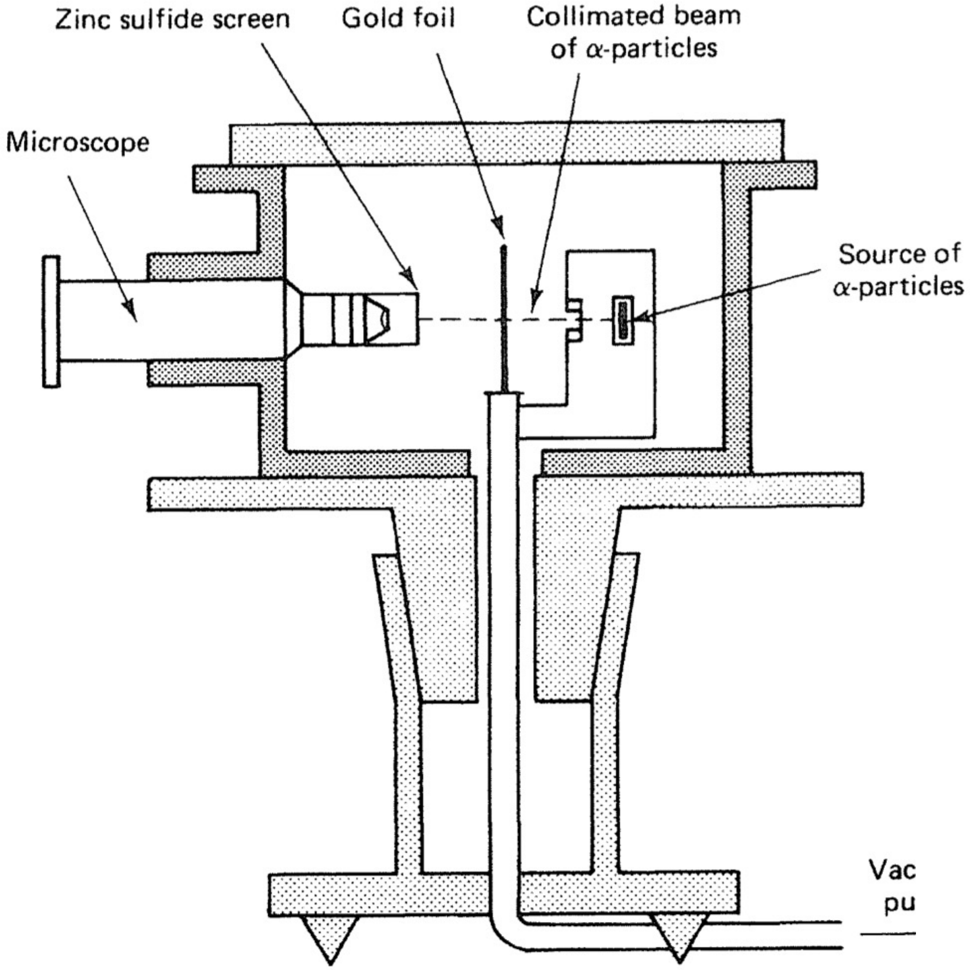
da cui

$$\boxed{Z_{n\_dline} = \sqrt{\frac{b_V + b_{sim} - \frac{2}{3} b_S A^{-1/3}}{\frac{b_C}{3} A^{-4/3} + 4 \frac{b_{sim}}{A^2}}}}$$

Similmente si può dedurre anche una **"proton drip line"**



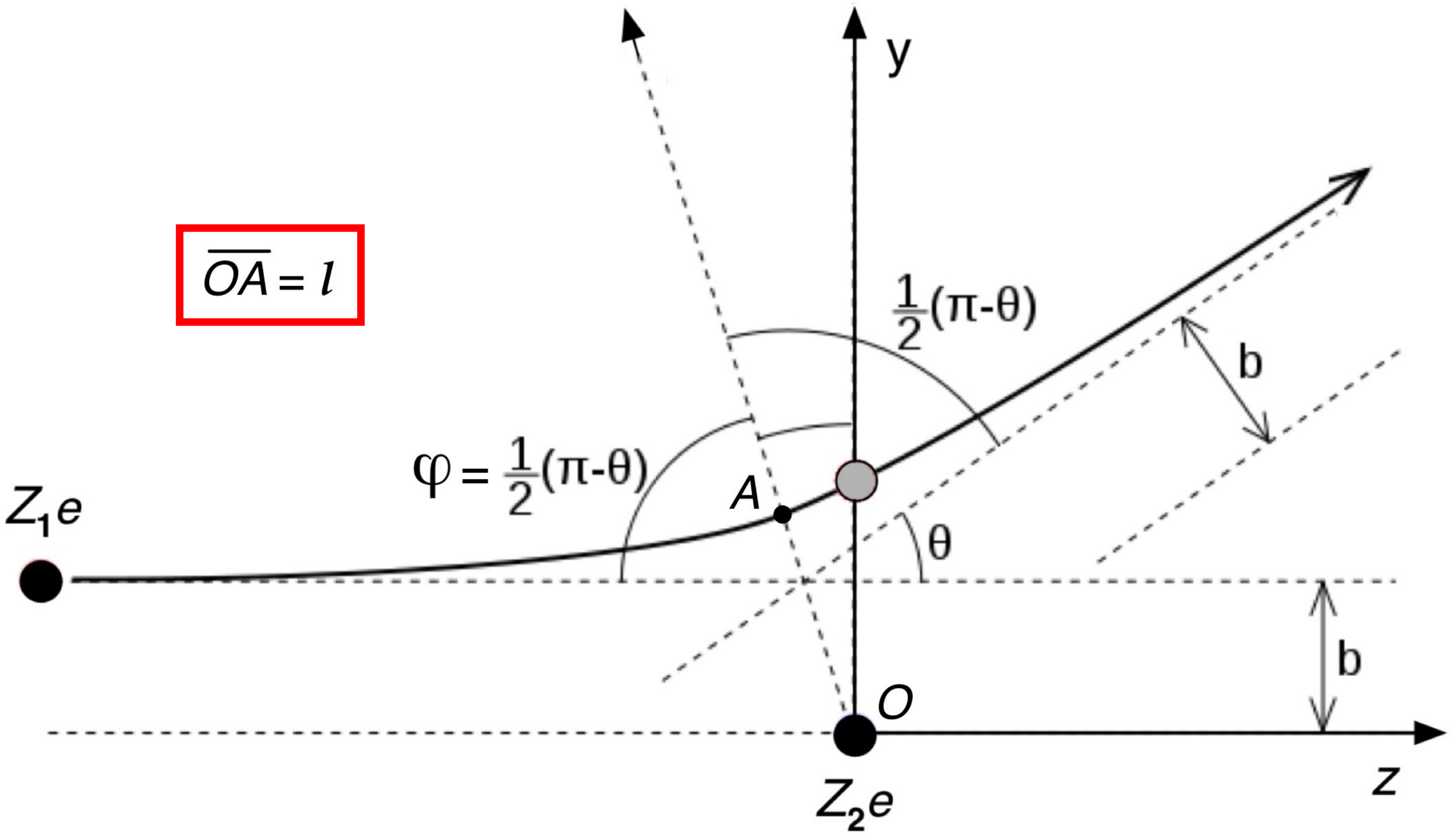
# La misura di Rutherford, Geiger e Mardsen




Fascio monocinetico particelle di massa e carica $\boldsymbol{m}$ e $Z_1 e$, incidenti su nuclei di massa $\boldsymbol{M \gg m}$ e carica $Z_2 e$, a riposo in $\boldsymbol{O}$ (SL)

$\boldsymbol{m \ll M} \ \Rightarrow$ si trascura il rinculo di $\boldsymbol{M}$

$\boxed{\overline{OA} = l}$



Pot. coulombiano bersaglio $V = Z_2 e/(4\pi\varepsilon_0 r)$. Particella incide con velocità $v$ su traiettoria // asse $z$ e distante $b$ da esso ($b$ ***parametro d'urto***)

- Classicamente determinare angolo $\vartheta(b)$; si procede trovando $b(\vartheta)$

  $V$ ***pot. centrale-kepleriano***. En. totale: $E_T = E_k + E_P$. Traiettoria: ***ellisse*** $E_T < 0$, ***iperbole*** $E_T > 0$,

  $E_T \equiv E_k = mv^2/2 > 0 \;\Rightarrow$ **iperbole**

- **Conservazione *mom. ang.* ed *energia*** $\Rightarrow$ all'$\infty$ questi valgono $mvb$ ed $mv^2/2$; in $A$ (***max. avvicinamento***) valgono $mv_A l$ e $[mv_A{}^2/2 + Z_1 Z_2 e^2/(4\pi\varepsilon_0 l)]$

Quindi: $\boxed{b = \dfrac{l v_A}{v}}$ , $\boxed{v^2 = v_A^2 + \dfrac{2 Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0\; ml}}$

Si pone: $l_0 = \dfrac{2 Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0\; mv^2} = \dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0\; E_k}$ che fissata $E_k = mv^2/2$, coincide col punto $A^*$ di max. avvicinamento

per un urto centrale ($b = 0$) $\Rightarrow$ $v_{A*} = 0$

Quindi: $\boxed{v^2 = v_A^2 + v^2 \dfrac{l_0}{l}}$

In urto centrale elastico particella carica $Z_1 e$ avvicina il nucleo lungo $z$ fino a distanza minima $l_0$, corrispondente ad $A^*$, poi inverte il moto diffusa ad angolo $\pi$. Da quanto ottenuto segue

$$v_A^2 = \frac{b^2}{l^2} v^2 \quad , \quad v_A^2 = v^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad , \quad b^2 = l^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$$

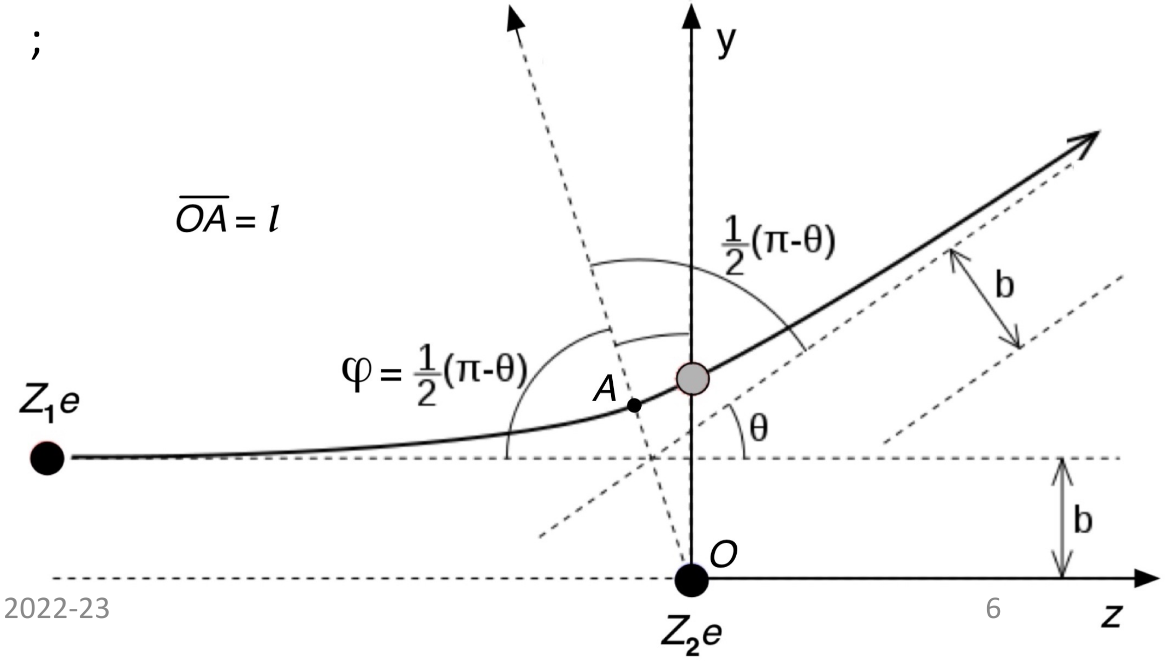
ma dalle proprietà dell'iperbole $l = b \, \mathrm{cotg} \frac{\varphi}{2}$

che sostituito nella terza $\mathrm{cotg}^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{l_0}{b} \mathrm{cotg} \frac{\varphi}{2} - 1 = 0$ da cui $\boxed{l_0 = 2 \, b \, \mathrm{cotg} \varphi}$

Dalla figura si ha $\boxed{\vartheta + 2\varphi = \pi}$, da cui: $\mathrm{cotg} \varphi = \mathrm{tg} \frac{\vartheta}{2}$ ;

e infine quanto cercato

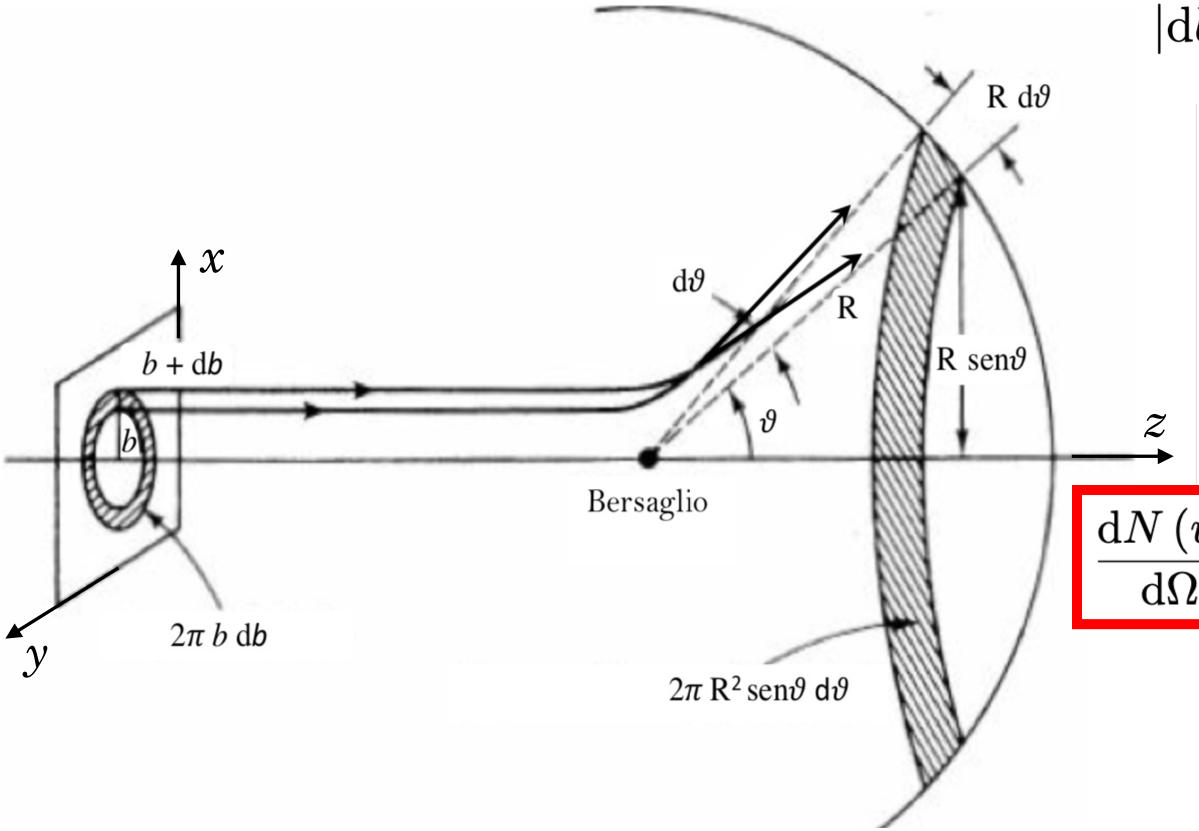
$$\boxed{b(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 \, E_k} \mathrm{cotg} \frac{\vartheta}{2}}$$




***Rutherford voleva prevedere quante $\alpha$ diffondono a un certo angolo, sapendo quante incidevano sul bersaglio***

$n_0$ partic. attraversano, a dist. ∞ dal bersaglio, unità sup. del piano $(x,y)$ nell'unità di tempo, ⇒

⇒ $\mathrm{d}N = 2\pi n_0 b\,\mathrm{d}b$ partic. attraversano anello circolare fra $b$ e $b+\mathrm{d}b$. Se particelle si conservano, cerchiamo diffuse fra $\vartheta$ e $\vartheta+d\vartheta$




$$|\mathrm{d}b\,(\vartheta)| = \left| \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k}\, \mathrm{d}\left(\mathrm{cotg}\frac{\vartheta}{2}\right)\right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0\ E_k}\ \frac{\mathrm{d}\vartheta}{2\ \mathrm{sen}^2\vartheta/2}$$

Sostituendo in $\mathrm{d}N$:

$$\mathrm{d}N\,(\vartheta) = 2\pi\ n_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0\ E_k}\right)^2 \frac{\mathrm{cotg}\vartheta/2}{2\ \mathrm{sen}^2\vartheta/2}\ \mathrm{d}\vartheta$$

da cui:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}N\,(\vartheta)\,/n_0}{\mathrm{d}\Omega\,(\vartheta)} = \frac{\mathrm{d}\sigma\,(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega}} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0\ E_k}\right)^2 \frac{\mathrm{cotg}\vartheta/2}{2\ \mathrm{sen}\vartheta\ \mathrm{sen}^2\vartheta/2} =$$

$$= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0\ E_k}\right)^2 \frac{\cos\vartheta/2}{2\ \mathrm{sen}^3\vartheta/2 \cdot 2\ \mathrm{sen}\vartheta/2\ \cos\vartheta/2} =$$

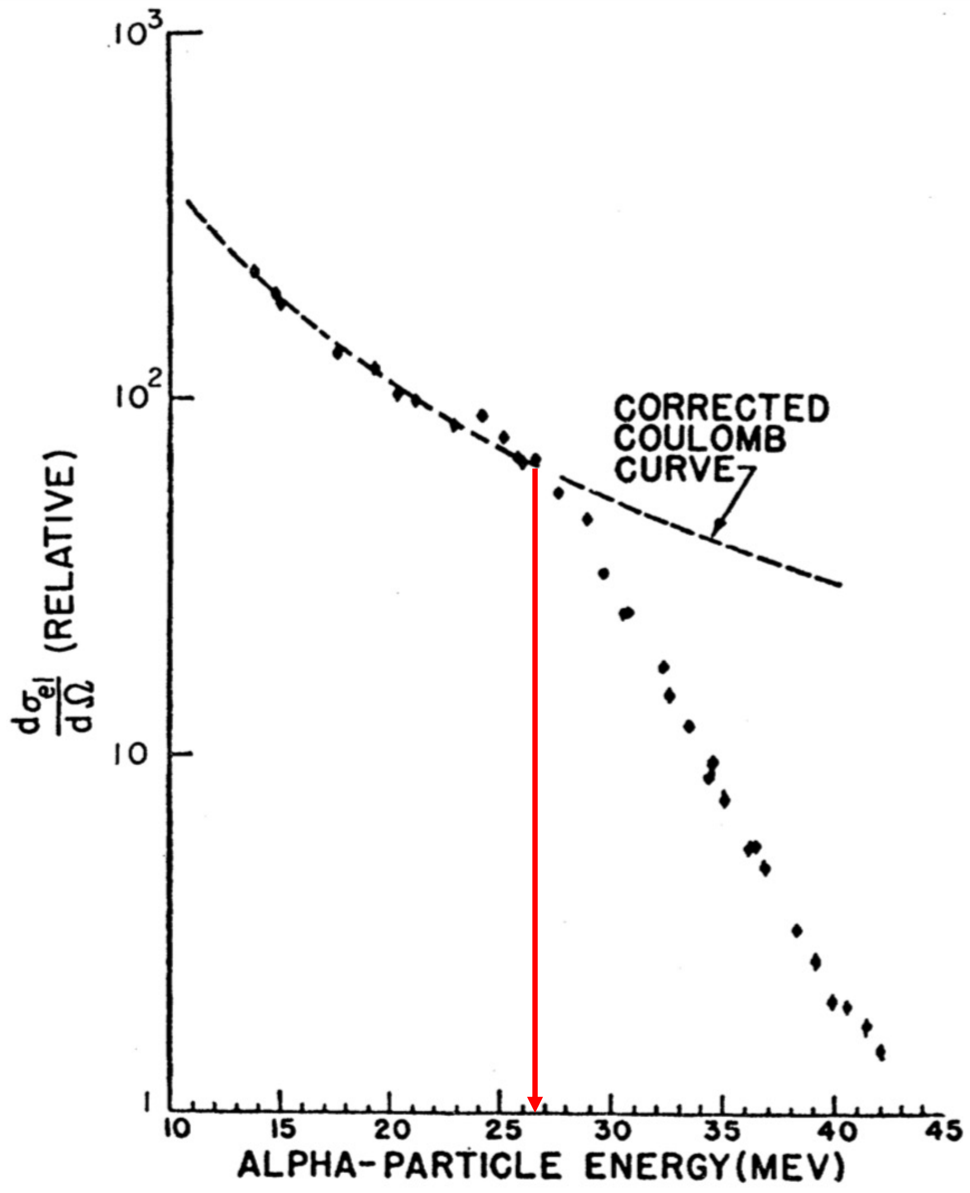
***Sezione d'urto di Rutherford*** →
$$\boxed{= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0\ E_k}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{sen}^4\vartheta/2}}$$

Se carica uniform. distrib. in sfera di raggio $r_0$ ,
al crescere di $E_k$ tutto dovrebbe andare come Rutherford, finchè $b > r_0$

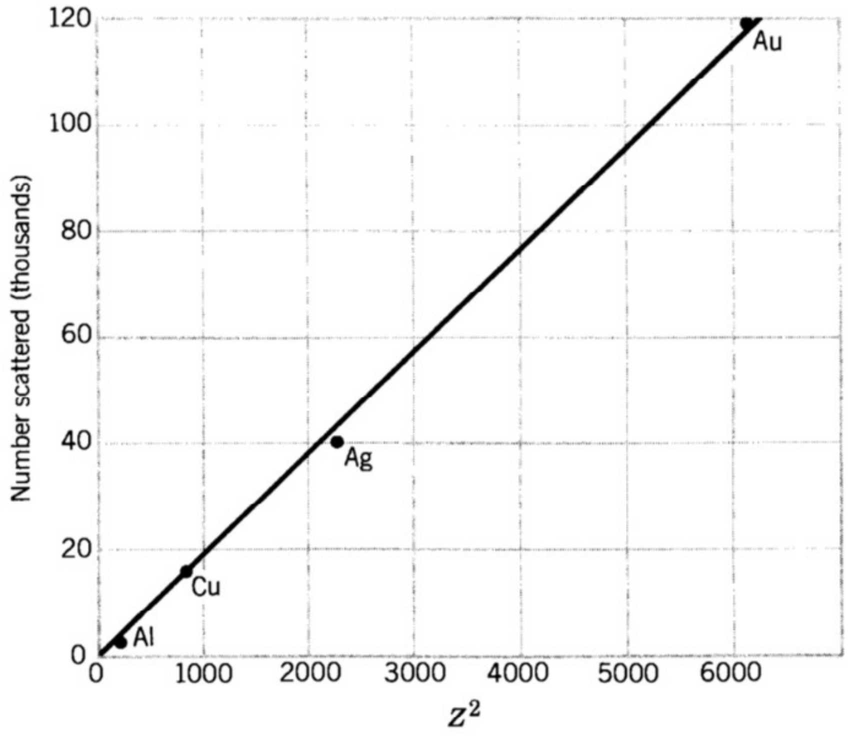
$$\boxed{r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 \, E_k} \, \mathrm{cotg} \frac{\vartheta_0}{2}}$$

Ma crescendo $E_k$ ⇒ effetti da dimensioni del nucleo: sez. d'urto devia da quella puramente coulombiana

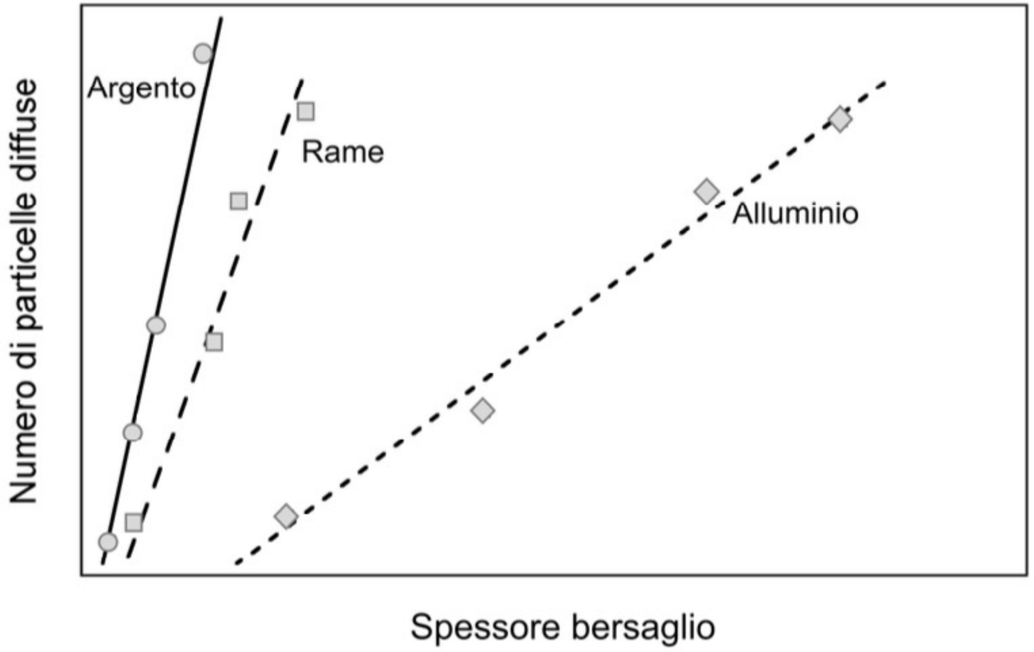
Crescendo $E_k$ ***α*** si avvicinano al nucleo e sentono effetti dell'**interazione nucleare**, oltre a quelli **coulombiani**



## La sezione d’urto di Rutherford spiega risultati sperimentali!



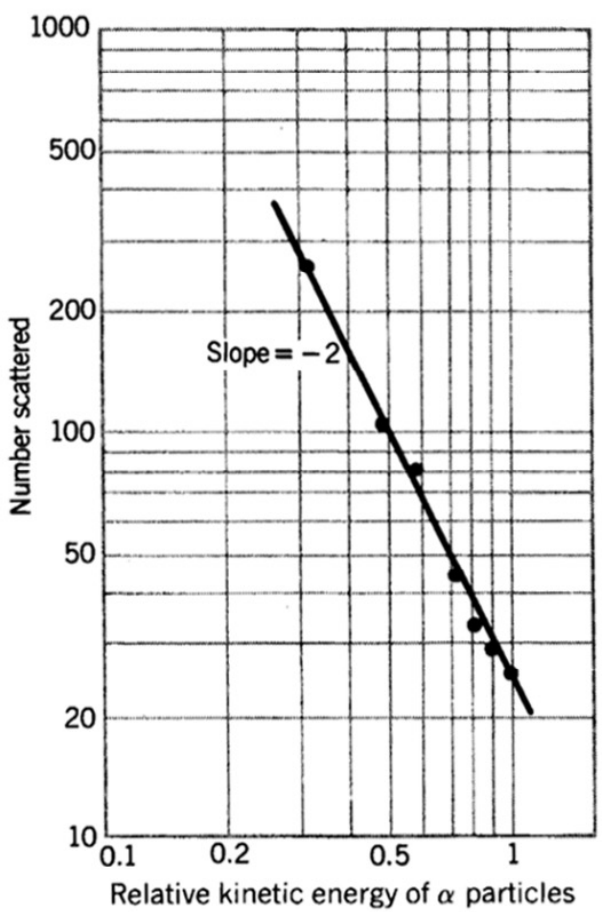

Dipendenza del rateo di diffusione dal quadrato del numero atomico $Z_2$ del bersaglio. Andamento conferma previsioni della formula di Rutherford



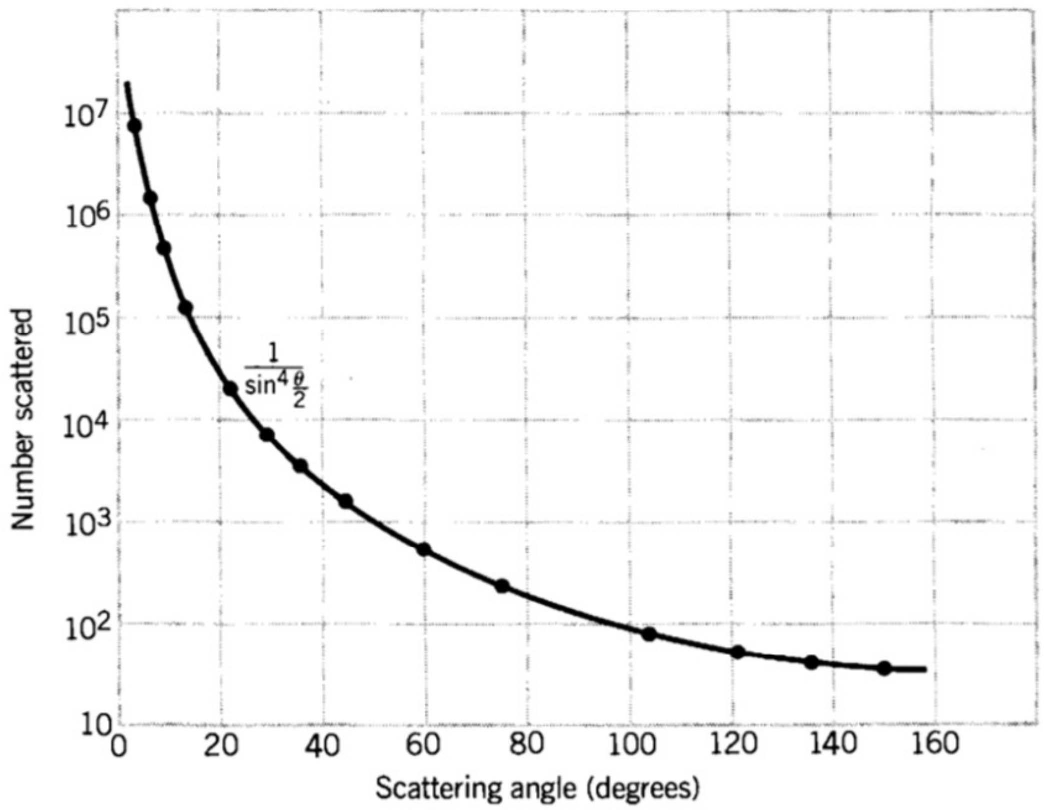

Dipendenza da spessore del bersaglio del rateo di diffusione. Andamento lineare suffraga ipotesi del modello atomico di Rutherford (no oscuramento significativo ⇒ nucleo molto più piccolo dell’atomo, prevalentemente singolo urto … )

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma\,(\vartheta)}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0\ E_k}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{sen}^4\vartheta/2}}$$

## La sezione d'urto di Rutherford spiega risultati sperimentali!




Dipendenza rateo diffusione dall'energia cinetica per particelle α incidenti su un bersaglio sottile. Andamento conferma previsioni della formula di Rutherford




Dipendenza da $\vartheta$ del rateo di diffusione per sottile bersaglio d'oro. Andamento conferma previsioni della formula di Rutherford

$$\boxed{\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{sen}^4\vartheta/2}}$$

# Modelli

**Modello Standard** dovrebbe descrivere anche struttura e fenomenologia dei nuclei, **ma** :

- limitati approcci matematico-computazionali per risolvere **QCD su sistemi a bassa energia**, come nuclei. *Transizione fase fra materia Q-G ad alta energia e adronica a più bassa energia, rende inutilizzabili approcci perturbativi*
- forza nucleare a corto raggio, ma serve enorme potenza di calcolo per riprodurre accuratamente caratteristiche nucleo con approccio *ab initio*

Modelli storici relativamente grezzi e approssimati ***ma spesso unico approccio per risultati quantitativi***

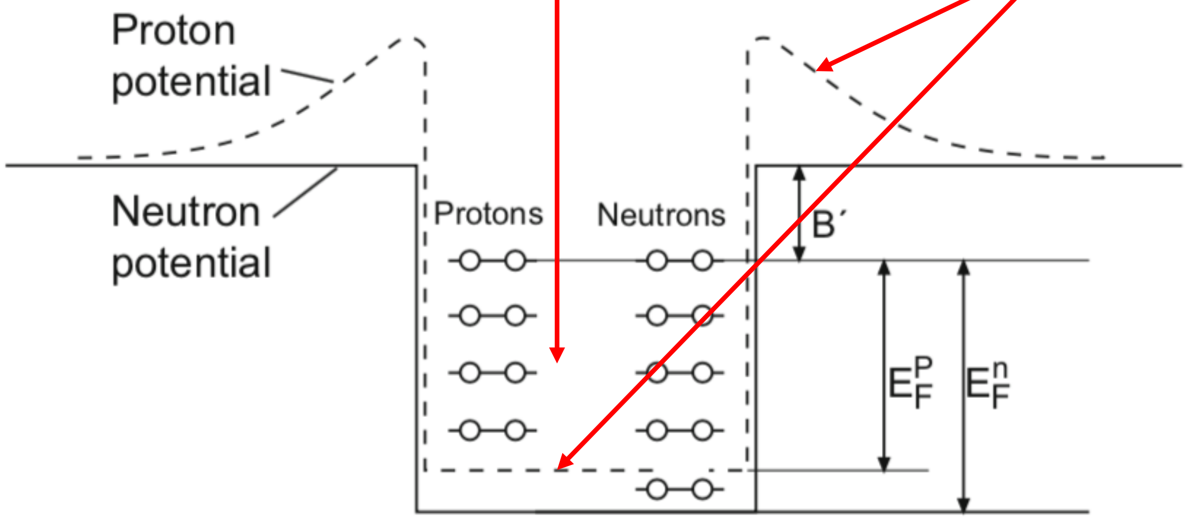
# Modello a gas di Fermi

***Nucleo in stato fondamentale o leggermente eccitato*** $\Rightarrow$ ***gas di Fermi degenere***

**Nucleoni**: due sistemi indipendenti di particelle a spin 1/2 che ubbidiscono *statistica Fermi-Dirac*, e per *principio d'esclusione* si muovono **~ liberi** nel volume del nucleo con *impulso medio* $\sim 250 \text{ MeV}/c$

***Potenziale sentito da nucleone = sovrapp. potenziali dei restanti nucleoni del nucleo***

Semplificando $\Rightarrow$ ***buca rettangolare*** più ***contributo coulombiano*** per i $\boldsymbol{p}$




Stati di nucleone in vol. $V$ e intervallo d'impulso $\mathrm{d}p$

$$\boxed{\mathrm{d}n = \frac{4\pi p^2 \mathrm{d}p}{(2\pi\hbar)^3} V}$$

Volume cella spazio fasi con 2 nucleoni per tipo a spin ⇅

**In stato fondamentale (**temp. $= 0$**), livelli più bassi occupati fino a max. valore d'impulso** $\boldsymbol{p_F}$

Integrando: $\boxed{n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2\hbar^3} = A \equiv (N+Z)}$ , con $\boxed{N = \frac{V\left(p_F^n\right)^3}{3\pi^2\hbar^3}}$ e $\boxed{Z = \frac{V\left(p_F^p\right)^3}{3\pi^2\hbar^3}}$

Nucleo sferico con $Z = N = A/2$ , $R_0 = 1.21$ fm, e ugual estensione radiale per buche $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{n}$ :

$$\boxed{p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{1/3} \simeq 250\ \mathrm{MeV}/c}$$

, confermato da diffusione quasi elastica ***e–nuclei***

(si veda anche soglia produzione di $\pi$ in urto $p$+$X$ )

- Energia del livello occupato superiore: $E_F = {p_F}^2/2M \simeq 33$ MeV

$\mathrm{B}'$ = (max. valore buca) – (livello Fermi) , ∼ cost. per gran parte dei nuclei e $\simeq |\mathrm{B}/A| = 7 \div 8$ MeV

***Profondità buca ed energia Fermi ~ indip. da $A$*** ⇒ al crescere di $A$ livelli meno spaziati e più densi

Es. $^{208}\mathrm{Pb}$: $\mathrm{B/A} \simeq 7.67$ MeV ; ***buca n*** $\simeq -44$ MeV ; ***buca p*** $\simeq -34$ MeV

➤ Mod. gas Fermi prevede dipendenza $|\mathbf{B}/\boldsymbol{A}|$ da eccesso $\boldsymbol{N}$

En. cinetica media per nucleone è

$$\boxed{\langle E_k \rangle = \frac{\int_0^{p_\mathrm{F}} E_k p^2 \mathrm{d}p}{\int_0^{p_\mathrm{F}} p^2 \mathrm{d}p} = \frac{3}{5}\frac{p_\mathrm{F}^2}{2M} \simeq 20 \text{ MeV}}$$

– Contrib. cinetico tot. energia del nucleo

$$E_k\,(N,Z) = N\langle E_\mathrm{n}\rangle + Z\langle E_\mathrm{p}\rangle = \frac{3}{10M}\left[N\left(p_\mathrm{F}^\mathrm{n}\right)^2 + Z\left(p_\mathrm{F}^\mathrm{p}\right)^2\right]$$

– Con nucleo sferico e raggi $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{p}$ uguali

$$E_k\,(N,Z) = \frac{3}{10M}\frac{\hbar^2}{R_0^2}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\frac{N^{5/3}+Z^{5/3}}{A^{5/3}}$$

**Minimo per $Z = N$** ⇒ **energia di legame si riduce per $N \neq Z$**

▶ Mod. gas Fermi $\Rightarrow$ termini formula Weizsaker

Sviluppando in potenze di $(N-Z)$: $$\boxed{E_k(N,Z) = \frac{3}{10M}\frac{\hbar^2}{R_0^2}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}\left[A + \frac{5}{9}\frac{(N-Z)^2}{A} + \ldots\right]}$$

**1o termine ∿ termine di volume ; 2o termine ∿ eccesso $n$**

Modello evidenzia valori alti delle velocità dei nucleoni nei nuclei, confermato da risultati sperimentali:

- soglia produzione $\pi$ per urto di $p$ + **nucleo** cala al crescere di $A$, poiché nucleoni del bersaglio possono avere velocità non trascurabili ($v/c \simeq 1/4$)

Modello a Gas di Fermi spiega quindi molti risultati sperimentali e ha permesso anche alcune predizioni …