

G.V. MARGAGLIOTTI

**Appunti di
Fisica Nucleare
a.a. 2022/23**

2022

©2021 G.V.Margagliotti

email: giacomo.margagliotti@ts.infn.it

Tel: 040-5583376

Indice

1	Introduzione	7
1.1	I costituenti fondamentali della materia	7
1.2	Elementarità	7
1.3	Il nucleo atomico	8
1.4	Tabella dei nuclidi	12
1.5	Unità di misura e scale dimensionali	14
2	Proprietà del nucleo atomico	17
2.1	Masse dei nuclei	17
2.2	Misura di masse nucleari	19
2.2.1	Metodi spettrometrici	19
2.2.2	Misura di masse tramite reazioni nucleari	20
2.3	Dimensioni dei nuclei	23
2.4	Misura delle dimensioni dei nuclei	23
2.4.1	Raggio di carica: atomi muonici	23
2.4.2	Raggio di carica: nuclei speculari	28
2.4.3	Raggio di carica: diffusione diffrattiva	30
2.5	Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei	34
2.5.1	Distribuzione della materia in un nucleo	35
2.5.2	Energia di legame nucleare	36
2.5.3	Neutron drip line	43
2.6	La misura di Rutherford	45
2.6.1	I risultati dell'esperimento di Rutherford	51
3	Struttura dei nuclei e modelli nucleari	55
3.1	Modello a gas di Fermi	55
3.2	Il modello a Shell	60
3.2.1	Ipernuclei	61
3.2.2	Il potenziale del modello a Shell	65
3.2.3	Nucleoni di valenza	69
3.2.4	Spin dei nuclei	71
3.2.5	Parità e nuclei	73
3.2.6	Momenti elettrici e magnetici dei nuclei	74

3.2.7	Misure dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei	79
3.2.8	Isospin	81
4	Instabilità dei nuclei	87
4.1	Decadimento radioattivo di una sola sostanza	89
4.1.1	Misure di vite medie	92
4.2	Decadimento radioattivo di più sostanze	94
4.3	Tecniche radioattive di datazione	101
5	Decadimenti nucleari	107
5.1	Generalità	107
5.2	Radioattività α	109
5.2.1	Energetica dei decadimenti α	110
5.2.2	Soglia di instabilità	112
5.2.3	Teoria del decadimento α	114
5.3	Radioattività β	127
5.3.1	Conversione interna	127
5.3.2	Decadimento β	128
5.3.3	Regole di Sargent	135
5.3.4	Teoria di Fermi dell'interazione debole	136
5.3.5	Il calcolo di Fermi	137
5.3.6	Emissione ritardata di nucleoni	144
5.4	Radioattività γ	146
5.4.1	Energetica dei decadimenti γ	146
5.4.2	Regole di selezione per decadimenti γ	147
6	Processi d'urto	151
6.1	Sezioni d'urto	151
6.1.1	Lunghezza di attenuazione	154
6.1.2	Luminosità	155
6.1.3	Sezione d'urto in funzione dell'impulso	155
6.1.4	Sezione d'urto invariante	156
6.1.5	Probabilità di transizione e sezione d'urto	157
6.2	Approccio quantistico al concetto di sezione d'urto	157
7	Reazioni nucleari in regime non relativistico	159
7.1	Leggi di conservazione	160
7.2	Energetica delle reazioni nucleari	161
7.3	Diffusione da potenziale Coulombiano	166
7.3.1	Sezione d'urto di Mott	170
7.4	Diffusione da potenziale nucleare	173
7.5	Diffusione in onde parziali	176
7.6	Modello ottico	180
7.7	Reazioni con formazione del nucleo composto	183

7.8	Reazioni dirette	185
7.9	Reazioni di risonanza	186
8	Fisica dei neutroni	193
8.1	Sorgenti di neutroni	194
8.2	Assorbimento e moderazione dei neutroni	197
8.3	Reazioni con neutroni e sezioni d'urto	202
9	Radioisotopi e medicina nucleare	207
9.1	Diagnostica per immagini	208
9.2	Produzione di radioisotopi	212
10	Termodinamica nucleare	217
10.1	Descrizione termodinamica di un nucleo	219
10.2	Fasi della materia nucleare	223
11	La forza nucleare	233
11.1	Sistema legato nucleone-nucleone	234
11.1.1	Il deutone	234
11.1.2	La diffusione nucleone-nucleone	238
11.2	Il potenziale di Yukawa	243
11.3	Analogia atomico-molecolare	248
12	Interazioni fra ioni pesanti relativistici	253
12.1	Vedi anche <i>Valentina Zaccolo</i>	253
13	Fissione nucleare	255
13.1	Teoria elementare della fissione	256
13.2	Sezioni d'urto di fissione	263
13.3	Reazione a catena controllata	264
13.4	Il reattore nucleare preistorico di Oklo	268
14	Fusione nucleare	273
14.1	Caratteristiche della fusione	275
14.1.1	Rilascio energetico	275
14.1.2	Rateo di fusione	275
A	Richiami di Relatività ristretta	283
A.1	Coordinate parallele e trasverse	286
A.2	Legge relativistica del moto di una particella	288
B	Cinematica relativistica del decadimento in due corpi	291
C	La scoperta del neutrone	295
D	Struttura iperfine	297

E Applicazioni decadimento α	299
E.0.1 Convertitore termoelettrico a plutonio	299
F γ-camera	305
G Esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni	307
H Instabilità di un nucleo prolato	311
I Leggi di conservazione e loro violazioni	315
J I raggi cosmici	317
J.1 Alcune caratteristiche dei raggi cosmici	319
J.2 Meccanismi d'accelerazione alla Fermi	322

Ancora da introdurre o mettere a posto

=> Par. 7.1 Leggi di conservazione: vedi slides Simmetrie-leggi-conservazione

=> Cap. 10 La forza nucleare, leggersi il corrispondente Cap. 4 di Krane:
THE FORCE BETWEEN NUCLEONS

=> Aggiornare Bibliografia introducendo anche articoli.

=> Inserire appendice su gamma-camera.

Capitolo 1

Introduzione

1.1 I costituenti fondamentali della materia

La ricerca dei mattoni fondamentali della materia ha condotto alla scoperta di strutture sempre più piccole che sono via via risultate a loro volta sistemi composti da strutture ancora più piccole. Alla fine del 19° secolo si era ormai convinti che la materia fosse composta da atomi. L'esistenza di un centinaio di elementi diversi con proprietà periodicamente ricorrenti, era però una chiara indicazione che anche gli atomi possedessero una struttura interna e non fossero *indivisibili*.

Il moderno concetto di atomo si sviluppò agli inizi del 20° secolo grazie soprattutto ai risultati degli esperimenti effettuati da Geiger e Mardsen su stimolo di Rutherford.

Un atomo è composto da un nucleo denso circondato da una nuvola di elettroni. Il nucleo è a sua volta decomponibile in costituenti più piccoli, i *nucleoni*, e questi sono prevalentemente di due tipi: *protoni* e *neutroni*.

Prima della scoperta del neutrone (Chadwick 1932) si pensava che i nuclei contenessero protoni ed elettroni, ma come si vedrà questi ultimi non possono essere annoverati fra i costituenti dei nuclei.

1.2 Elementarità

È fin da subito importante chiarire il criterio con cui stabilire se un sistema fisico osservato è un oggetto elementare, cioè privo di struttura interna e che si comporta a tutti gli effetti come un punto materiale, nel senso che non può assorbire energia dall'esterno trasformandola in energia interna. Tutta l'energia trasferita dall'esterno a una particella elementare si deve quindi ritrovare come energia cinetica di quest'ultima. Se il sistema ha gradi di libertà interni, parte dell'energia trasferita può eccitarli, per cui l'energia cinetica associata al moto del baricentro del sistema non dà conto di tutta l'energia trasferita.

Nel descrivere il mondo microscopico non si può prescindere dalle leggi della meccanica quantistica, per cui l'energia dei gradi di libertà interni di una particella non si distribuisce in modo continuo, ma può assumere solo una serie discreta di valori crescenti, E_0, E_1, E_2, \dots . Quindi per mettere in luce l'esistenza di gradi di libertà interni e determinare di conseguenza l'eventuale natura composita di una particella, si deve trasferire un'energia almeno pari alla soglia $E_s = E_1 - E_0$. Sondando la particella con energie inferiori ad E_s , essa si comporta a tutti gli effetti come elementare. Per questo motivo lo studio della struttura interna delle particelle richiede energie sempre più elevate.

Una conseguenza inevitabile è anche che il carattere *elementare* di una particella non può essere definitivamente *dimostrato sperimentalmente*: quanto si può affermare è soltanto che fino a una certa scala d'energia la particella in esame si comporta come una particella elementare.

In base a queste considerazioni è possibile stabilire che una particella non è elementare anche senza essere in grado di osservarne i componenti, semplicemente sulla base della sua capacità di assorbire energia per eccitazione dei modi interni.

1.3 Il nucleo atomico

Si può dire che la fisica nucleare sia nata nel 1896, anno in cui H. Becquerel osservò che una lastra fotografica vergine e protetta dalla luce, era stata "impressionata" da radiazioni emanate da frammenti di minerale d'uranio, scoprendo così, accidentalmente, la radioattività.

Nel 1904 J.J. Thomson propose un modello di atomo in cui immaginava che il volume dell'atomo stesso fosse costituito da una distribuzione diffusa di carica positiva nella quale erano immerse le cariche negative elettroniche in modo simile a come lo sono *le uvette passite in un panettone* e tali da rendere l'atomo elettricamente neutro nella sua globalità.

Nel 1909 E. Rutherford ideò e sovrintese l'esperimento che porta il suo nome, ma fu eseguito da H.W. Geiger ed E. Marsden, in cui bombardando con particelle α un bersaglio costituito da un sottile foglio d'oro, si voleva sottoporre ad analisi il modello di Thomson. Sorprendentemente la diffusione osservata di particelle α contraddiceva l'ipotesi di Thomson, mostrando che l'attraversamento del bersaglio d'oro produceva un numero di particelle α deviate ad angoli grandi più elevato di ben 5 ordini di grandezza rispetto a quanto si potesse prevedere da semplici fluttuazioni statistiche basate sull'ipotesi dell'atomo alla Thomson. Rutherford analizzando i risultati dell'esperimento, nel 1911 propose che ciò fosse dovuto al fatto che l'atomo non va considerato come un *panettone* ma piuttosto come una specie di *sistema planetario*, con le cariche positive concentrate in un *nucleo* piccolo, duro e

massivo, posto al centro e gli elettroni, molto leggeri, che orbitano attorno a questo nucleo sottoposti al suo potenziale coulombiano.

La stima delle dimensioni del nucleo che Rutherford ottenne, $10^{-15} \div 10^{-14}$ m, lo portò ad affermare che un atomo è sostanzialmente *vuoto*, essendo le dimensioni delle *orbite atomiche* dell'ordine di 10^{-10} m. La constatata

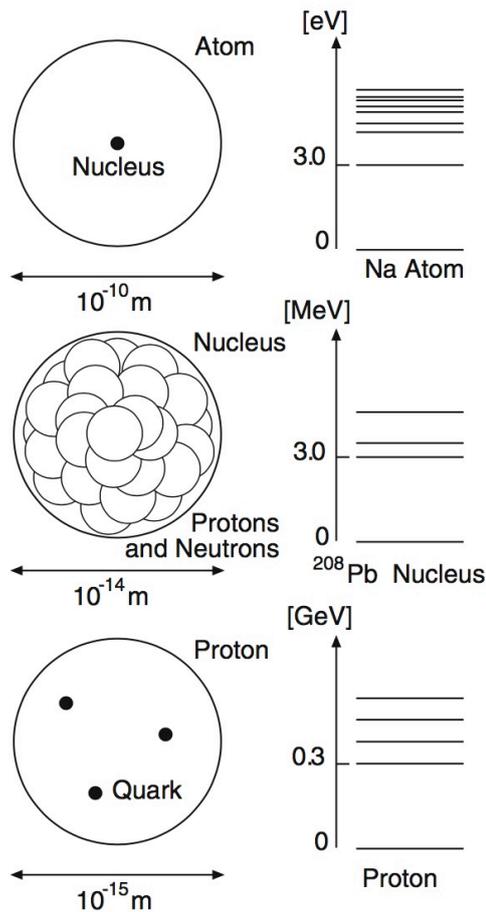


Figura 1.1: Scale dimensionali del mondo atomico, nucleare e subnucleare

durezza del nucleo lo portò poi a proporre un'immagine strutturale *naïf* ma per molti versi estremamente realistica, in cui lo si immagina come costituito da un raggruppamento di sferette quasi rigide (nucleoni), a massimo impacchettamento, da cui la forma che tende ad una sfera all'aumentare del numero A di nucleoni, di volume direttamente proporzionale ad A , per cui il raggio R di questa "sfera", proporzionale alla radice cubica del volume, lo è di conseguenza anche ad $A^{1/3}$:

$$R(A) = R_0 A^{1/3} \quad (1.1)$$

con R_0 parametro da determinare.

Una specie nucleare è caratterizzata dalla carica totale e dalla massa totale del nucleo che la rappresenta. La carica netta positiva è un multiplo intero del valore assoluto della carica di un elettrone, $+Ze$, con Z il numero atomico.

La principale particella carica positiva presente in un nucleo è il protone, che costituisce anche il più semplice esempio di nucleo, quello dell'atomo di idrogeno.

Il nucleo di un atomo con numero atomico Z contiene perciò Z protoni, da cui la globale neutralità di un atomo, dati i suoi Z elettroni.

La massa di un protone è circa 200 volte superiore a quella di un elettrone ($m_p \simeq 200 m_e$) per cui spesso si può trascurare il contributo degli elettroni trattando delle masse di atomi.

Il numero di massa di una specie nucleare, indicato con A , rappresenta il numero intero più prossimo al rapporto fra la massa di un nucleo e la massa di un protone.

Per tutti i nuclei tranne l'idrogeno si ha $A > Z$, con la differenza $A - Z$ che cresce al crescere di A . Da ciò l'evidenza che un nucleo deva contenere più oggetti massivi degli Z protoni che ne garantiscono la carica elettrica.

Inizialmente si pensò che la massa di un nucleo fosse praticamente tutta dovuta a protoni, che l'avrebbero giustificata in numero di A protoni in ogni nucleo, assieme ad $A - Z$ elettroni che ne bilanciassero la carica. Ma si capì che un certo numero di ragioni impediva che l'elettrone potesse essere un componente strutturale di un nucleo:

- Dovrebbe esserci evidenza di una forza attrattiva molto più intensa di quella coulombiana, fra gli elettroni e i protoni del nucleo, ma allora come mai questa forza non coinvolge anche gli elettroni atomici rispetto ai protoni del nucleo?
- Si può argomentare ricordando il principio di indeterminazione

$$\Delta p \Delta x \sim h \quad (1.2)$$

dove Δx rappresenta l'incertezza nella posizione dell'elettrone nel nucleo, quindi dell'ordine delle dimensioni lineari del volume nucleare, ovvero circa 10^{-14} m. Da cui un'incertezza sull'impulso dell'ordine di

$$\Delta p \sim \frac{h}{\Delta x} \sim 4.14 \times 10^{-7} \text{ MeV s m}^{-1} \quad (1.3)$$

Detta m_e la massa dell'elettrone, una grezza stima della sua energia totale nel nucleo si ottiene da

$$E_{tot}^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4 \quad (1.4)$$

assumendo che il suo impulso p_e nel nucleo sia dell'ordine di quanto appena trovato per l'incertezza Δp . Sostituendo e ricordando che $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s e che $m_e \simeq 0.51$ MeV/ c^2 , si ha

$$E_{tot} \simeq 124 \text{ MeV} \quad (1.5)$$

che in questo caso coinciderebbe sostanzialmente con l'energia cinetica di un ipotetico elettrone libero di muoversi nel nucleo. Ma una simile energia non è compatibile con l'esistenza di un nucleo legato, per il quale l'energia media di legame per nucleone è dell'ordine di 8 MeV, e neppure con le energie sperimentalmente misurate degli elettroni emessi da nuclei e dovuti al decadimento β , che sono al massimo dell'ordine di alcuni MeV.

- Un altro argomento viene dal considerare i valori di momento angolare totale dei nuclei, come detto al successivo paragrafo [3.2.4](#)
- Per nuclei che contenessero elettroni disaccoppiati ci si aspetterebbe di misurare valori dei momenti magnetici ben maggiori di quelli invece osservati. Per il deuterio ad esempio, se il nucleo contenesse un elettrone, ci si attenderebbe un valore del momento di dipolo magnetico superiore di circa 2000 volte rispetto a quello osservato.

La scoperta del neutrone risolse il problema, individuando in esso il componente neutro dei nuclei: un neutrone ha carica netta nulla e massa superiore a quella di un protone dello 0.14% circa.

Un nucleo con numero di massa A è quindi costituito da Z protoni ed $A - Z = N$ neutroni fra loro legati, impacchettati in volumi le cui dimensioni sono dell'ordine di 10^{-44} m³, vanno cioè da poche unità ad alcune decine di fm³ a seconda dei nuclei, con una densità media $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni \times fm⁻³. Ogni protone ha carica elettrica positiva pari, in valore assoluto, a quella di ogni elettrone ($q_p = 1.602 \times 10^{-19}$ C); ogni neutrone è elettricamente neutro, ma possiede un momento magnetico intrinseco non nullo pari in modulo a oltre il 68 % di quello del protone, e questo è un chiaro indizio dell'esistenza di una struttura interna per il neutrone.

La sostanziale corrispondenza fra le masse di protone e neutrone è uno dei motivi che ha suggerito di introdurre il concetto di *nucleone* inteso come particella componente di un nucleo atomico, indifferentemente dal suo specifico stato di carica elettrica, per cui un nucleo con numero di massa A e carica $+Ze$ contiene A nucleoni di cui Z protoni ed $A - Z = N$ neutroni.

Per indicare una definita specie nucleare, o nuclide X si utilizza una scrittura del tipo: ${}^A_Z X_N$, dove X rappresenta il simbolo chimico. Questa scrittura è ridondante e talvolta si omette l'indicazione di N .

Nuclei con ugual numero atomico Z e diverso numero di massa A e quindi N vengono detti isotopi.

Nuclei con ugual numero di massa A e diversi numeri atomici Z ed N vengono detti iobari.

Nuclei con ugual numero di neutroni N e diverso numero di massa A e quindi Z vengono detti isotoni.

Il nucleo atomico si presenta come sistema fisico legato e come per gli atomi anch'esso è caratterizzato da un numero *discreto* di stati detti *livelli energetici nucleari*. Il livello corrispondente alla minima energia del sistema è detto *livello fondamentale*, gli altri *livelli eccitati*.

Un nucleo in uno stato eccitato è detto *isomero* del proprio stato fondamentale.

1.4 Tabella dei nuclidi

Le proprietà sistematiche delle varie specie nucleari si possono visualizzare con una rappresentazione che correla Z ed N . Si ottiene un diagramma

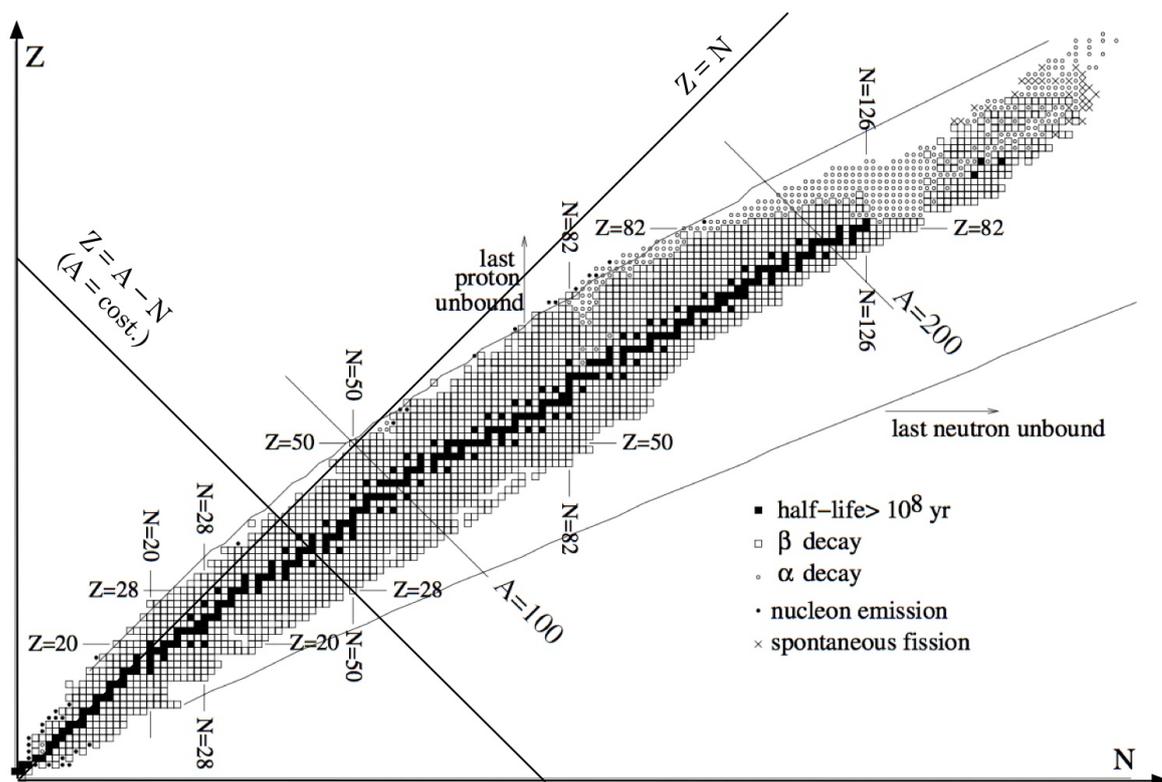


Figura 1.2: Tabella dei nuclidi, detta anche *diagramma Z - N*.

(figura [1.2](#)), detto anche di Segrè, in cui ogni nucleo è rappresentato con un punto di coordinate (Z, N) . Gli isotopi si dispongono parallelamente all'ascissa N , gli isotoni parallelamente all'ordinata Z e gli isobari lungo rette

trasversali ($Z = A - N$)¹

Riportando i valori sperimentali delle masse nucleari $M(A, Z)$ su una terza coordinata ortogonale al piano $(Z; N)$, si ha una rappresentazione tridimensionale le cui sezioni con piani ortogonali al piano $(Z; N)$ e passanti per le linee $A = \text{cost.}$, mostrano che i punti rappresentativi dei nuclei appartenenti alle varie *sequenze isobariche* così individuate si dispongono approssimativamente lungo archi di parabola giacenti su tre falde distinte: sulla falda superiore ci sono i nuclei con Z ed N entrambi dispari, su quella intermedia quelli con A dispari (Z pari ed N dispari o viceversa), su quella inferiore i nuclei con Z ed N entrambi pari.

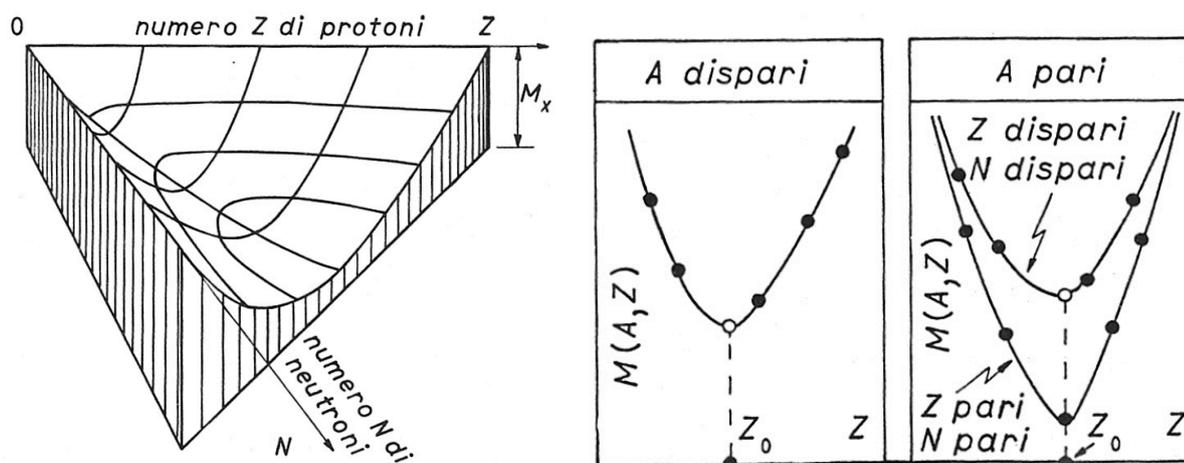


Figura 1.3: A sinistra: distribuzione tridimensionale e curve di livello isobarico delle masse nucleari in funzione di A e Z . A destra: sequenze isobariche corrispondenti a valori rispettivamente dispari e pari di A .

Un nucleo A_ZX è detto *stabile* se sopravvive indefinitamente nel tempo, *instabile* se invece si trasforma *spontaneamente* in un'altra specie nucleare ${}^{A'}_{Z'}X$ mediante un processo di decadimento.

Il valore Z_0 in corrispondenza del minimo di $M(A, Z)$ è il numero atomico dell'isobaro più stabile della particolare sequenza analizzata.

L'esame sistematico delle varie specie nucleari in funzione di A e Z mostra alcune *regolarità* utili nello studio della struttura nucleare e delle forze in gioco. I nuclei con A pari, ad esempio, hanno da uno a tre isotopi stabili, quelli con A dispari invece, uno solo; i nuclei con Z (N) pari hanno almeno due isotopi (isotoni) stabili, quelli con Z (N) dispari non ne hanno mai più di due.

Le regolarità individuate non hanno carattere di *assolutezza* e valgono solo

¹Una versione costantemente aggiornata della tabella dei nuclidi, con numerosissime altre informazioni concernenti i nuclei atomici, è disponibile sul sito www.nndc.bnl.gov/chart/, curato dai Brookhaven National Laboratories.

per la gran parte dei nuclei che costituiscono una determinata famiglia nucleare.

Lo studio delle *abbondanze isotopiche relative* dei vari nuclei nei materiali che compongono la Terra, i meteoriti, il Sole e le altre stelle mostra la presenza di massimi in corrispondenza ad ${}^4_2\text{He}_2$, ${}^{16}_8\text{O}_8$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$, ${}^{118}_{50}\text{Sn}$, ${}^{88}\text{Sr}_{50}$, ${}^{89}\text{Y}_{50}$, ${}^{90}\text{Zr}_{50}$, ${}^{138}\text{Ba}_{82}$, ${}^{139}\text{La}_{82}$, ${}^{140}\text{Ce}_{82}$, e ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$, evidenza che le specie nucleari caratterizzate da numeri Z o N appartenenti alla sequenza

$$Z, N = 2, 8, 20, 50, 82, 126 \quad (1.6)$$

posseggono proprietà particolari che ne giustificano la grande abbondanza nell'Universo. Sempre dall'analisi sistematica delle specie nucleari si desume che i nuclei della sequenza (1.6) hanno il massimo numero di isotopi stabili. Per queste e altre proprietà i numeri della sequenza (1.6) sono detti *numeri magici* e li si indica con l'aggiunta di un asterisco (Z^* , N^*).

1.5 Unità di misura e scale dimensionali

Si utilizzerà il Sistema Internazionale (SI) di misura e le varie costanti o parametri saranno sempre esplicitamente indicate. Si indicano comunque delle unità di misura specifiche, alcune di derivazione storica, e se ne discutono le conversioni rispetto alle unità del SI.

L'energia si misura tipicamente in elettron-Volt (eV), ovvero l'energia cinetica acquisita da una particella di carica elementare $e \cong 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ accelerata dalla differenza di potenziale di 1 Volt ($1 \text{ eV} \cong 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$), o in potenze multiple di ordine 3 dell'eV.

Casualmente l'elettron-Volt risulta una scala appropriata per le transizioni atomiche; quelle nucleari coinvolgono invece energie dell'ordine del MeV.

Una quantità che spesso ricorre è la costante di Boltzmann k_B

$$\begin{aligned} k_B &= 1.38064852(79) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = \\ &= 8.61673324(78) \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Le unità di misura lineari tipiche dell'ambito nucleare e subnucleare sono dell'ordine di 10^{-15} m , che corrispondono grosso modo alle dimensioni lineari di un nucleone; questo ha portato a introdurre la comoda unità di misura detta *fermi*, o *femtometro* ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

Le aree vengono tipicamente misurate in *barn*: $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2$.

La velocità c di propagazione nel vuoto di un'onda elettromagnetica, quindi anche della luce, è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale e rappresenta un limite insuperabile. Nel 1983 si è deciso di assumere come esatto (quindi privo d'errore) il valore di c ponendolo pari a

$$c = 299792458 \text{ m/s} \quad (1.8)$$

il che ha anche permesso di ridefinire l'unità di misura della lunghezza, il metro, come la distanza percorsa dalla luce in un intervallo temporale pari a $1/299792458$ di secondo.

In relatività ristretta l'energia di una particella è legata alla sua massa m e al suo impulso p dalla formula $E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2$; misurando le masse in eV/c^2 e gli impulsi in eV/c , tutte le formule della cinematica relativistica si semplificano, nel senso che le tre quantità si possono sommare semplicemente senza introdurre i fattori c .

Per il fattore di conversione fra kg ed eV, considerando una massa di 1 kg, l'equivalente in energia è dato da

$$E(1 \text{ kg}) = 1 \text{ kg} \cdot c^2 \cong 9 \cdot 10^{16} \text{ kg (m/s)}^2 \cong 9 \cdot 10^{16} \text{ J} \quad (1.9)$$

Poichè $1 \text{ J} \cong 1/(1.602 \cdot 10^{-19}) \text{ eV}$, ne segue:

$$1 \text{ kg} \cdot c^2 \cong \frac{9 \cdot 10^{16}}{1.602 \cdot 10^{-19}} \cong 5.62 \cdot 10^{35} \text{ eV} \quad (1.10)$$

da cui infine

$$1 \text{ kg} \cong 5.62 \cdot 10^{35} \text{ eV}/c^2 \quad (1.11)$$

Le masse m_e dell'elettrone ed m_p del protone² che valgono rispettivamente circa $9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ e circa $1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, possono essere quindi espresse come circa $0.511 \text{ MeV}/c^2$ e circa $938.27 \text{ MeV}/c^2$; la massa m_n del neutrone vale circa $1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, ovvero $939.56 \text{ MeV}/c^2$.

Un'unità molto usata per le masse, specialmente in ambiti tecnico-applicativi e spettrometrici, è la cosiddetta *unità di massa atomica u*, definita come $1/12$ della massa atomica dell'isotopo ^{12}C del Carbonio:

$$1u = \frac{1}{12} M_{^{12}\text{C}} = 931.494 \text{ MeV}/c^2 = 1.66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (1.12)$$

Le scale temporali tipiche del mondo nucleare dipendono dai fenomeni considerati, si va da valori dell'ordine di 10^{-20} s per la frammentazione di alcuni nuclei instabili quali ^5He o ^8Be , o per l'evoluzione di alcune reazioni nucleari, a valori dell'ordine ad esempio di $10^{-12} \div 10^{-9} \text{ s}$ per decadimenti γ , o a valori sia minori che maggiori per decadimenti β o α , che possono estendersi sino a valori di migliaia o milioni di anni.

I momenti angolari, la cui dimensione fisica è omogenea all'*azione*, si misurano in unità di \hbar . Il valore del quanto d'azione è

$$\hbar = h/2\pi \cong 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cong 6.582 \cdot 10^{-22} \text{ MeV} \cdot \text{s} \quad (1.13)$$

I momenti magnetici μ si misurano in unità dette *magnetoni elementari*:

$$\mu = q\hbar/2M \quad (1.14)$$

²Per un elenco aggiornato dei valori delle masse di particelle e nuclei si vedano: "The Review of Particle Physics" e "Nuclear Wallet Cards" del Brookhaven National Laboratory

con q il valore assoluto della carica elettrica della particella ed M la sua massa. Si considerano usualmente il *magnetone di Bohr* μ_B ($q = e$ ed $M = m_e$), il *magnetone nucleare* μ_N ($q = e$ ed $M = m_p$).

Ricordando anche che $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, la costante di struttura fine è

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \cong \frac{1}{137.036} . \quad (1.15)$$

Capitolo 2

Proprietà del nucleo atomico

In molti casi la descrizione di un nucleo atomico può tutto sommato richiedere un numero relativamente ridotto di parametri: carica elettrica, estensione volumetrica che nell'ipotesi di una forma sferica si risolve nella conoscenza del raggio, massa, energia di legame, momento angolare totale, parità, momento di dipolo magnetico, momento di quadrupolo elettrico ed energie degli stati eccitati. Queste vengono solitamente dette *proprietà statiche* di un nucleo, per distinguerle dalle *proprietà dinamiche* che comprendono probabilità di decadimento, di reazione,

2.1 Masse dei nuclei

La massa $M(A, Z)$ di un nucleo A_ZX con Z protoni e $(A - Z)$ neutroni, è minore della somma delle masse dei suoi nucleoni costituenti:

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n \quad (2.1)$$

Per questo un nucleo isolato, che è un ottimo esempio di sistema fisico isolato, non può banalmente scindersi nei suoi costituenti, in quanto così facendo violerebbe il principio di conservazione dell'energia. La quantità

$$\Delta M(A, Z) = M(A, Z) - Zm_p - (A - Z)m_n \quad (2.2)$$

è detta *difetto di massa*, è negativa ed è proporzionale all'energia di legame B del nucleo. Il valore assoluto di ΔM è correlato con la minima energia richiesta per scindere il nucleo in tutti i suoi componenti. Il fatto che $B < 0$ garantisce che il nucleo resti legato, se indisturbato e lo sarà tanto più fortemente quanto più negativo è il valore di ΔM , e quindi di B , a parità di A .

Difetto di massa ed energia di legame sono correlati dalla

$$B = c^2 \Delta M(A, Z) \quad (2.3)$$

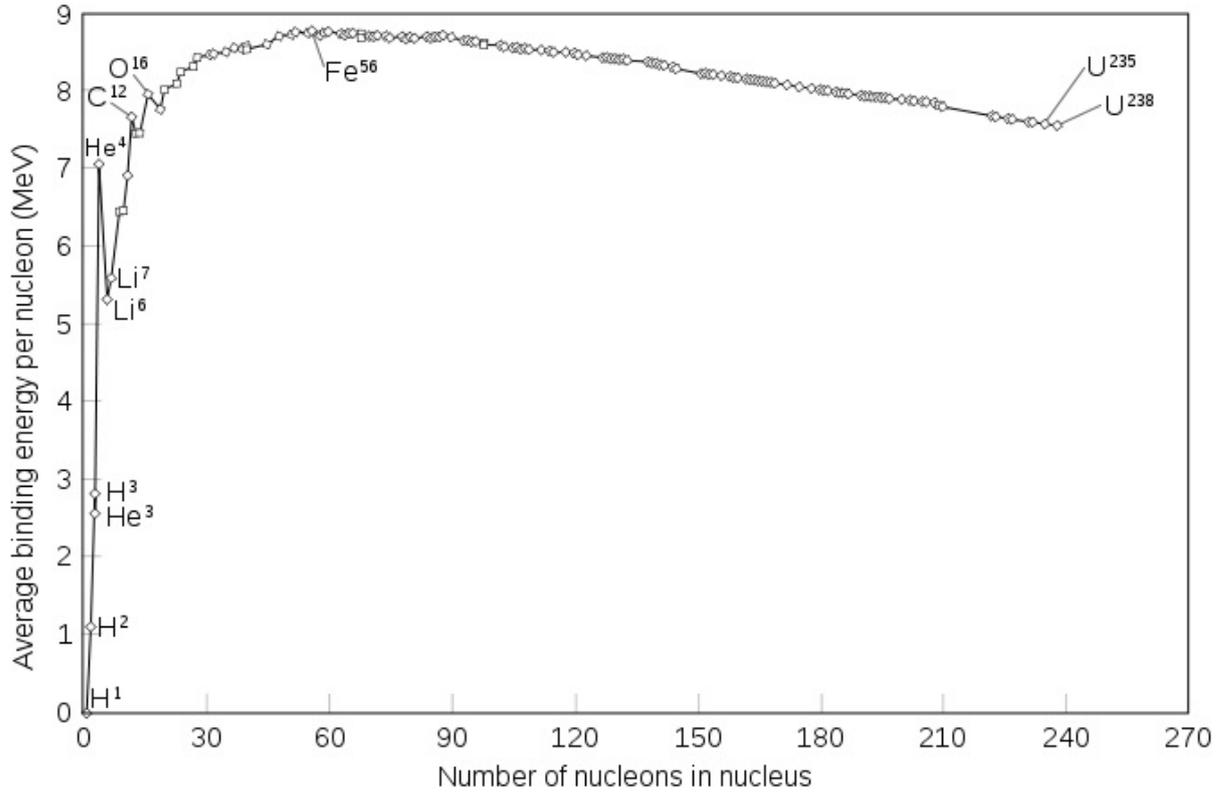


Figura 2.1: Energia media di legame per nucleone $|B/A|$, per la gran parte dei nuclei stabili.

Si definisce quindi l'energia media di legame $|B/A| = -B/A$ per un nucleone in un nucleo A_ZX come

$$\left| \frac{B}{A} \right| = \frac{-\Delta M(A, Z)c^2}{A} = \frac{[Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)]c^2}{A} \quad (2.4)$$

Questa quantità è stata misurata per un gran numero di nuclei stabili e mostra caratteristiche interessanti. Per i nuclei più leggeri ($A \lesssim 20$), $|B/A|$ oscilla significativamente crescendo nel contempo rapidamente con A , per poi saturare raggiungendo un massimo di poco inferiore a 9 MeV in corrispondenza ad $A = 56$, un isotopo del ferro.

Per valori di A maggiori, $|B/A|$ diminuisce molto lentamente. In pratica per un ampio intervallo di specie nucleari, dal carbonio all'uranio, $|B/A|$ si mantiene prossimo a circa 8 MeV. Queste caratteristiche hanno importanti implicazioni sulla natura della forza nucleare e sulla struttura dei nuclei. Si deduce ad esempio che se si scaricano circa 8 MeV di energia cinetica in un nucleo, trasferendoli tutti ad un suo nucleone, questo dovrebbe potersi svincolare dal legame della forza che lo trattiene nel nucleo e uscirne libero.

2.2 Misura di masse nucleari

2.2.1 Metodi spettrometrici

L'energia di legame di un nucleo può essere calcolata se è nota con precisione la corrispondente massa atomica.

La deflessione di uno ione di carica Q in una sequenza di campi elettrici e magnetici ne permette la successiva selezione in energia cinetica E_k e in impulso p . Se le velocità v degli ioni sono sufficientemente basse da potersi mantenere in approssimazione non-relativistica si ha rispettivamente $p = mv$ ed $E_k = mv^2/2$, con m la massa dello ione che si può quindi esprimere in funzione di p ed E_k

$$m = \frac{p^2}{2E_k} \quad (2.5)$$

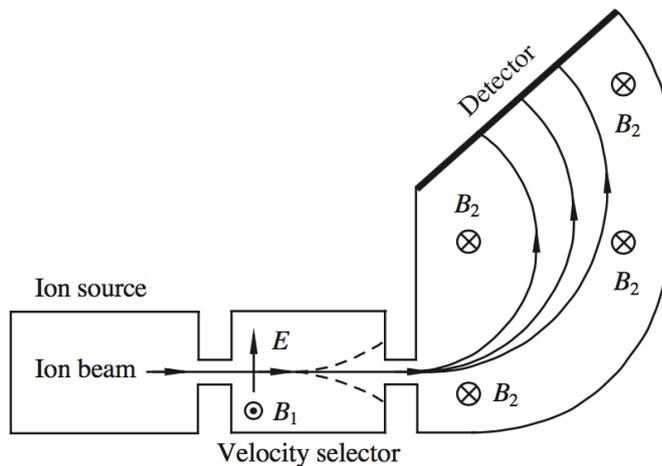


Figura 2.2: Schema di uno spettrometro di massa a deflessione; originariamente il rivelatore consisteva in una lastra fotografica.

In uno spettrometro di massa un fascio di ioni ognuno di carica Q , contenente genericamente isotopi di diverse masse m_i , attraversa una regione in cui vi sono un campo elettrico \mathbf{E} e uno magnetico \mathbf{B}_1 , uniformi e fra loro ortogonali, scelti in modo da far passare attraverso una definita fenditura soltanto gli ioni di velocità $|\mathbf{v}| = E/B_1$. Ioni con velocità diverse percorreranno traiettorie, tratteggiate in figura, che non li porteranno ad imboccare la fenditura, in funzione anche dell'apertura di questa. Gli ioni che superano la fenditura, selezionati in velocità, continuano quindi la loro traiettoria in un volume occupato da un secondo campo magnetico uniforme \mathbf{B}_2 , dove

percorrono orbite circolari di raggi r_i espressi da

$$r_i = \frac{m_i v}{QB_2} \quad (2.6)$$

Fissati Q , B_2 e v , ne risulta che ioni con un definito valore del rapporto Q/m percorrono orbite di ugual raggio e ciò permette di separare isotopi diversi rivelando i punti d'impatto degli ioni su opportuni rivelatori, come mostrato in figura 2.2.

Tenendo conto delle 2.5 e 2.6 si ha infine, per la massa dello ione

$$m_i = \frac{(QB_2 r_i)^2}{2E_k} \quad (2.7)$$

I valori delle masse così ottenuti sono però quelli degli ioni che possono non essere sempre completamente *spogliati* di tutti gli elettroni dell'atomo originario; per risalire all'effettiva massa del nucleo corrispondente bisogna dunque tener conto delle masse di tutti gli elettroni ancora legati allo ione e delle energie di legame di tali elettroni.

Sfruttando la tecnica della spettrometria di massa con acceleratori (AMS)¹, si riescono ad ottenere misure di rapporti isotopici fino a 10^{-15} .

2.2.2 Misura di masse tramite reazioni nucleari

Gli spettrometri di massa funzionanti sul principio delle deflessioni elettrica e/o magnetica non sono adatti alle misure di massa per strutture a breve vita media, che prima di decadere non riescono quindi a sopravvivere abbastanza a lungo da percorrere tutto il tragitto nello spettrometro fino al rivelatore. In questi casi si possono ottenere i valori delle masse nucleari dal corretto bilancio energetico di opportune reazioni nucleari.

Si considerino due nuclei che interagiscono dando luogo a prodotti che possono differire da quelli originali, e a seconda che il processo determini un rilascio d'energia, o richieda un apporto iniziale d'energia per aver luogo, la reazione si dirà esotermica o endotermica. La differenza fra la somma delle masse dei nuclei interagenti e quella delle masse dei prodotti dell'interazione, tutte moltiplicate per c^2 , è detta Q -valore della reazione ed è chiaramente $Q > 0$ per reazioni esotermiche e $Q < 0$ per reazioni endotermiche.

Si veda ad esempio una reazione del tipo



e si supponga di conoscere già con una ben definita precisione le masse m_a , m_A e m_b di a , A e b . Lo scopo è dedurre la massa m_B di B . Si supponga

¹Ad esempio: H. Budzikiewicz e R.D. Grigsby, "Mass Spectrometry and Isotopes: a Century of Research and Discussion" - Mass Spectrometry Reviews 25 (2006) 146.

qui inoltre che le energie cinetiche in gioco siano tali da non richiedere la corretta e completa trattazione relativistica, permettendo quindi l'approccio classico approssimato nel tener conto delle conservazioni dell'energia totale e dell'impulso nel sistema di riferimento del laboratorio (SL), che sottintende il bersaglio A inizialmente a riposo.

Dette $E_{t,i}$ ed $E_{t,f}$ le energie totali disponibili nei canali di ingresso e finale della reazione [2.8](#), si ha

$$\begin{cases} E_{t,i} = E_{k,a} + m_a c^2 + m_A c^2 \\ E_{t,f} = E_{k,b} + E_{k,B} + m_b c^2 + m_B c^2 \end{cases} \quad (2.9)$$

dove $E_{k,j}$ ed m_j rappresentano rispettivamente energia cinetica e massa della j -ma particella o nucleo. La conservazione dell'energia totale richiede $\Delta E_{i,f} = E_{t,i} - E_{t,f} = 0$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned} m_B &= \frac{E_{k,a} - (E_{k,b} + E_{k,B})}{c^2} + m_a + m_A - m_b \\ &= \frac{E_{k,a} - E_{k,b}}{c^2} - \frac{m_B v_B^2}{2c^2} + m_a + m_A - m_b \\ \Rightarrow m_B &= \frac{2}{2c^2 + v_B^2} [E_{k,a} - E_{k,b} + (m_a + m_A - m_b) c^2] \end{aligned} \quad (2.10)$$

che permette di esprimere m_B in funzione di quantità note o comunque misurabili sperimentalmente con lo studio della reazione [2.8](#).

Dalla figura [2.3](#) si può ricostruire la cinematica classica della reazione [2.8](#) nel (SL) e per la conservazione dell'impulso si ha

$$\begin{cases} p_{x,B} = p_a - p_b \cos\vartheta \\ p_{y,B} = p_b \sin\vartheta \end{cases} \quad (2.11)$$

Un esempio importante di come determinare la massa di una particella tramite una reazione è quello della cattura di neutroni termici [2](#) da parte dell'idrogeno



ovvero la reazione nucleare inversa della *fotodisintegrazione* del deutone ${}^2\text{H}$, che fra il 1934 e il 1935 portò Chadwick e Goldhaber ad ottenere le prime accurate misure della massa del neutrone [3](#), provando nel contempo che esso

²Un neutrone è detto termico se ha velocità confrontabili con quelle di molecole d'aria a 20 °C, quindi con energie cinetiche dell'ordine o inferiori a 0.025 eV.

³J.Chadwick M.Goldhaber, "A nuclear photo-effect, disintegration of the dipylon by gamma rays" - Nature 134 (1934) 237-238; J.Chadwick, M.Goldhaber, "The Nuclear Photoelectric Effect" - Proc.R.Soc.Lond. A151 (1935) 479-493.

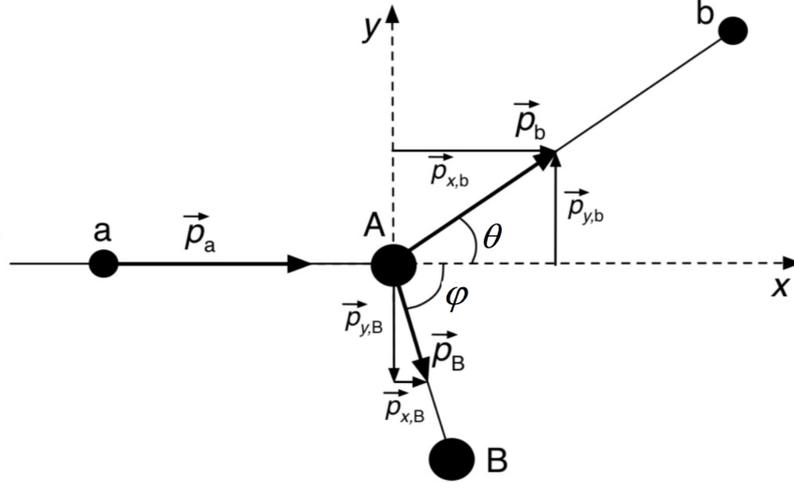


Figura 2.3: Due corpi in due corpi nel Sistema del Laboratorio.

non è uno stato legato fra protone ed elettrone.

La massa del neutrone può essere dedotta dalla conoscenza della massa del protone, di quella del deutone, nucleo di deuterio costituito da un protone e un neutrone fra loro legati, e dell'energia di legame $B(^2\text{H})$ del deutone, con

$$B(^2\text{H}) = (M_{2\text{H}} - m_n - M_{1\text{H}})c^2 \quad (2.13)$$

L'energia di legame $B(^2\text{H})$ del deutone si deduce sperimentalmente dall'energia del γ emesso durante la reazione di cattura di neutroni termici da parte di protoni. Supponendo a riposo i protoni al momento della reazione, per la ridottissima energia cinetica dei neutroni termici rispetto all'equivalente energetico della massa di un nucleone, si può con ottima approssimazione affermare che l'energia di legame di ^2H coincida in valore assoluto con l'energia del fotone γ dello stato finale della reazione [2.12](#), sommata all'energia cinetica di rinculo del deutone⁴

$$|B(^2\text{H})| = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2M_{2\text{H}}c^2} \quad (2.14)$$

Trascurando anche questa si ha infine, per la massa del neutrone

$$m_n \simeq M_{2\text{H}} - M_{1\text{H}} + \frac{E_\gamma}{c^2} \quad (2.15)$$

⁴Per l'energia di rinculo del deutone, con approccio non relativistico nel sistema del centro di massa, la conservazione dell'impulso dà $\frac{E_\gamma}{c} = M_{2\text{H}}v$, da cui $v = \frac{E_\gamma}{M_{2\text{H}}c}$, e quindi l'energia cinetica del deutone è $\frac{1}{2}M_{2\text{H}}v^2 = \frac{1}{2}M_{2\text{H}}\frac{E_\gamma^2}{M_{2\text{H}}^2c^2} = \frac{E_\gamma^2}{2M_{2\text{H}}c^2}$.

L'energia del γ emesso può essere dedotta dalla misura della sua lunghezza d'onda λ_γ con notevole precisione e ciò conduce a

$$E_\gamma = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_\gamma} \simeq 2.224521 \text{ MeV} \quad (2.16)$$

La conoscenza dei valori precisi delle masse di protone e deutone per altre vie (spettrometria) permette quindi di ottenere, per la massa del neutrone

$$\begin{aligned} m_n &\simeq 1875.612974 - 938.2720813 + 2.224521 \text{ MeV}/c^2 \simeq \\ &\simeq 939.56541(3) \text{ MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.3 Dimensioni dei nuclei

Per l'atomo non è possibile definire in modo semplice e univoco il valore di un parametro dimensionale, data la natura del potenziale Coulombiano responsabile del legame fra gli elettroni e il nucleo. In quel caso si cerca una definizione operativa che porta a definire il raggio di un atomo, inteso come una struttura a simmetria sferica, come la distanza media dal centro di massa dell'atomo degli stati a minor energia di legame ancora popolati da elettroni di quell'atomo.

Per i nuclei la situazione è in parte differente. In essi, come si vedrà, la densità dei nucleoni e il potenziale nucleare hanno una dipendenza spaziale simile dal parametro che ne definisce le dimensioni lineari, e mostrano un valore pressoché costante fino a una breve distanza dal centro della struttura nucleare per poi crollare rapidamente a zero.

Immaginando il nucleo a simmetria sferica, questo porta abbastanza naturalmente a caratterizzarne la forma tramite due parametri, un raggio medio che si estende fino al dimezzarsi del valore della densità nucleonica rispetto al suo valore al centro, e lo spessore di una superficie sfumata, centrata sul raggio medio e che va dal valore quasi massimo della densità nucleonica, sino circa al minimo della stessa.

Il problema concreto sta poi nel definire con chiarezza cosa si cerca di descrivere e come, ovvero se si vuol dare una descrizione dell'estensione della distribuzione di carica elettrica o della distribuzione di massa di un nucleo, e le due cose sono imprescindibilmente legate al modo con cui si indaga l'una o l'altra.

2.4 Misura delle dimensioni dei nuclei

2.4.1 Raggio di carica: atomi muonici

La forza nucleare ha un ridottissimo raggio d'azione; se infatti si considera l'atomo e il fatto che la sua struttura è spiegata ottimamente dalle sole inte-

razioni elettromagnetiche, è chiaro che il raggio d'azione delle forze nucleari non deve estendersi molto oltre le dimensioni del nucleo stesso, altrimenti perturberebbe l'eccellente accordo fra dati sperimentali e previsioni teoriche della fisica atomica.

Il fatto però che il nucleo abbia una distribuzione di carica elettrica estesa nello spazio, legata ai suoi protoni, suggerisce di studiare le eventuali perturbazioni alle energie dei livelli atomici, calcolate nell'ipotesi di un nucleo puntiforme, per dedurre informazioni sulle dimensioni e forma della distribuzione di carica protonica nel nucleo.

Se si immagina il nucleo come una struttura a simmetria sferica centrata in O , queste perturbazioni dipendono dalla distanza r da O , in quanto all'interno del nucleo il campo elettrico non è coulombiano e non dipende da $1/r^2$.

La causa di questi effetti è essenzialmente quantistica: per il teorema di Gauss il campo elettrico nella regione *classicamente* fuori dal nucleo, $r > R$, dovrebbe coincidere con quello generato da una carica puntiforme pari a Ze e posizionata in O , pertanto un'orbita elettronica classica di raggio maggiore di R non dovrebbe essere perturbata né in forma né in energia. Ma il livello energetico dell'orbitale atomico dipende in realtà dall'andamento del potenziale in tutto lo spazio, che determina anche la funzione d'onda.

Si calcolino quindi gli spostamenti dei livelli indotti da una carica nucleare Ze supposta, per semplicità, uniformemente distribuita in una sfera di raggio R .

La carica contenuta in una sferetta di raggio $r < R$ è

$$q(r) = Ze \frac{r^3}{R^3} \quad , \quad \text{con} \quad q(R) = Ze \quad (2.18)$$

Di conseguenza il campo elettrico è

$$\begin{aligned} E_e(r) &= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r^2} && \text{esternamente al nucleo } (r > R) \\ E_i(r) &= \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Ze r}{4\pi\epsilon_0 R^3} && \text{internamente al nucleo } (r \leq R) \end{aligned} \quad (2.19)$$

e l'energia potenziale elettrica $eV(r)$ per un elettrone nel campo è

$$\begin{aligned} eV(r) &= \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} && \text{esternamente al nucleo } (r > R) \\ eV(r) &= eV_0 + \frac{Ze^2 r^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} && \text{internamente al nucleo } (r \leq R) \end{aligned} \quad (2.20)$$

con V_0 determinato dalla condizione di continuità del potenziale in $r = R$:

$$eV(r) = eV_0 + \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2.21)$$

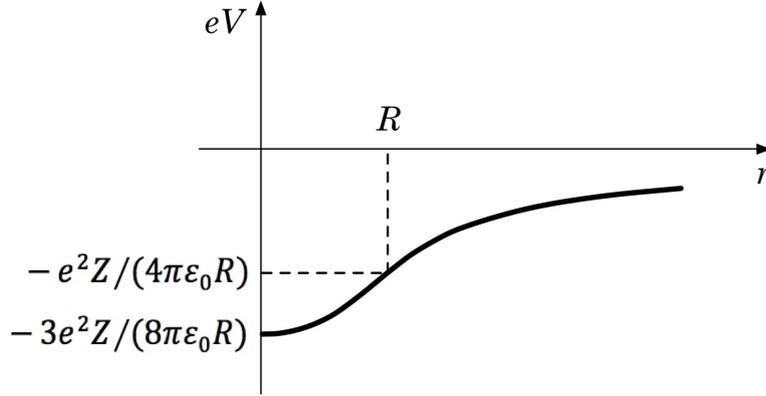


Figura 2.4: Andamento radiale dell'energia potenziale determinata da una distribuzione uniforme di carica a simmetria sferica.

da cui l'espressione del potenziale per $r < R$

$$eV(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \quad (2.22)$$

Siccome si sa che le dimensioni lineari di un atomo sono circa $10^4 \div 10^5$ volte maggiori di quelle del suo nucleo, si può affermare che la funzione d'onda atomica si estende quasi del tutto all'esterno della zona occupata dal nucleo, e si può quindi calcolare l'effetto, supposto piccolo, della distribuzione non puntiforme della carica nucleare, con un approccio perturbativo.

Detta $\psi_{E_0}(\mathbf{r})$ la funzione d'onda dell'elettrone atomico corrispondente al livello imperturbato di energia E_0 , calcolato cioè per un atomo con nucleo puntiforme e posizionato in O , la perturbazione energetica è data da

$$\Delta E = \int \psi_{E_0}^*(\mathbf{r}) e\Delta V(r) \psi_{E_0}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \psi_{E_0}^2(\mathbf{r}) e\Delta V(r) d\mathbf{r} \quad (2.23)$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dall'essere reale la funzione d'onda per uno stato legato e $\Delta V(r)$ è la differenza fra il potenziale generato dalla distribuzione di carica e quello generato dalla carica puntiforme.

Supposto di considerare un atomo idrogenoide in uno stato S ($L = 0$), la funzione d'onda assume la forma

$$\psi_{E_0}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a}} \quad (2.24)$$

con $a = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me^2)$ il raggio di Bohr, $E_0 = -Z^2e^2/(8\pi\epsilon_0a)$, e

$$\Delta V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right]$$

Per la perturbazione energetica si ha quindi

$$\Delta E = 4\pi \int_0^R r^2 \psi_{E_0}^2(r) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{r}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) \right] dr \quad (2.25)$$

Essendo $R \ll a$ si può approssimare la funzione d'onda atomica dentro l'integrale col suo valore nell'origine O , sostituendo $\psi_{E_0}^2(r)$ con $\psi_{E_0}^2(0)$, per cui

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{Ze^2}{\epsilon_0} \frac{Z^3}{\pi a^3} \int_0^R r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right) dr = \\ &= \frac{e^2 Z^4}{\pi \epsilon_0 a^3} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{10} \right) = \frac{1}{5} \frac{Z^2 e^2}{2\pi \epsilon_0 a} \left(\frac{ZR}{a} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ricordando che $E_0 = -Z^2 e^2 / (8\pi \epsilon_0 a)$, si ottiene

$$\left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| = \frac{4}{5} \left(\frac{ZR}{a} \right)^2 \quad (2.27)$$

Scegliendo un atomo idrogenoide molto pesante, con $Z = 82$ come il piombo, per cui $R \sim 8 \times 10^{-15}$ m ed $a \sim 0.53 \times 10^{-10}$ m, si ottiene

$$\left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| \simeq 10^{-4}$$

ovvero un effetto molto piccolo anche per l'onda S , la cui funzione d'onda non si annulla in O , e del tutto trascurabile per le altre onde (P , D , ...), la cui funzione d'onda è nulla in O .

Questo suggerisce un modo per come attuare la misura sperimentale di questo effetto, che consiste nel rilevare per un atomo la frequenza $\nu = (E_P - E_0) / \hbar$ dei raggi X emessi in transizioni da onda P a onda S e confrontarla con quanto calcolato per il corrispondente atomo idrogenoide con nucleo supposto puntiforme.

Per rendere l'entità dell'effetto maggiore, e quindi permettere una misura più significativa, dalla [2.27](#) si vede che si può lavorare su tre termini, ma già scegliendo un atomo come il piombo si è fatto quanto possibile per accrescere i primi due Z ed R , e nonostante ciò si ottiene un risultato al limite della rilevabilità. Rimane il raggio a di Bohr dell'atomo che può essere opportunamente ridotto se per un tempo sufficientemente lungo si riesce a legare all'atomo una particella carica negativamente, più pesante dell'elettrone, che si vada a posizionare su orbite idrogenoidi. Il muone negativo μ^- è un candidato ideale allo scopo in quanto possiede le stesse caratteristiche dell'elettrone in termini di spin e carica elettrica, ha una massa m_μ circa 200 volte superiore a quella m_e dell'elettrone e dopo essere stato catturato dall'atomo e prima di decadere, vive abbastanza a lungo da poter dar luogo alle transizioni richieste. Quest'ultima condizione si può stimare semiclassicamente tenendo conto che fissato Z , il periodo medio di un'orbita idrogenoide del

μ^- scala, rispetto a quella elettronica equivalente, come m_e/m_μ , in quanto così fanno anche le dimensioni lineari delle nuove orbite idrogenoidi. Queste risultano dunque circa 200 volte inferiori alle corrispondenti per gli elettroni e si può di conseguenza quasi del tutto trascurare anche l'effetto schermante sulla carica del nucleo da parte degli elettroni atomici presenti.

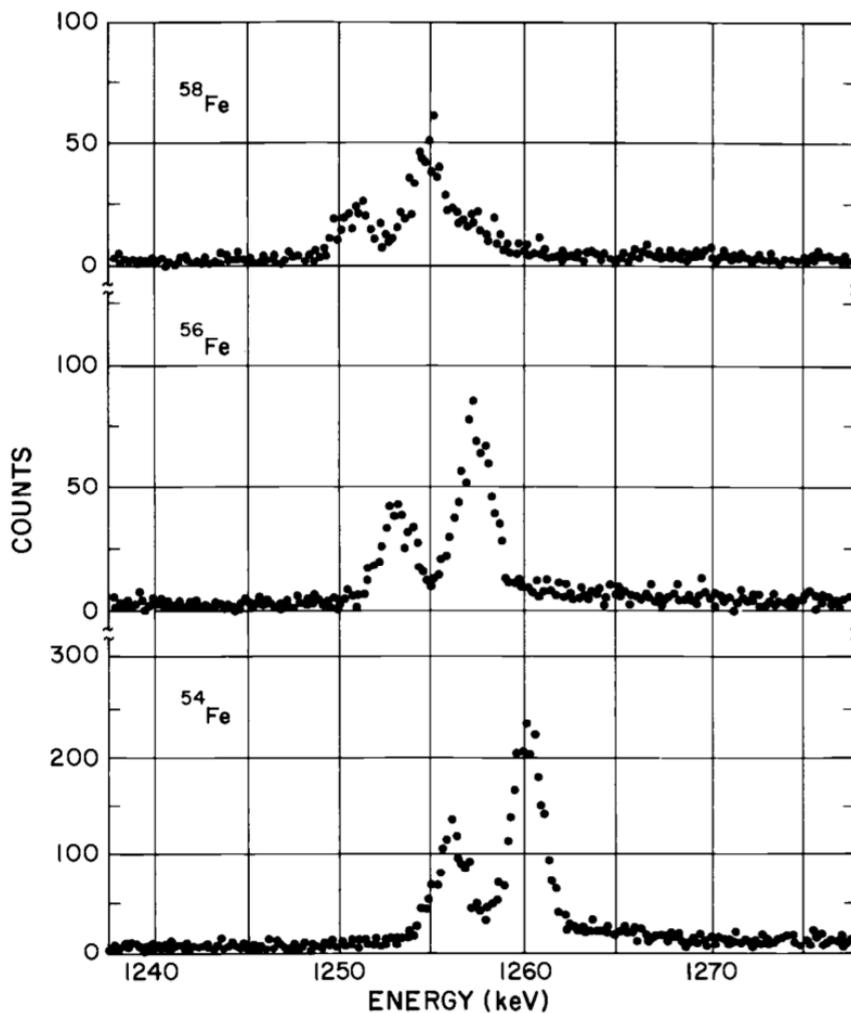


Figura 2.5: Spettri X di isotopi muonici del Ferro. Si vedono i due picchi delle transizioni $2p_{3/2}1s_{1/2}$ e $2p_{1/2}1s_{1/2}$ per i muoni, la prima con intensità doppia della seconda. Lo shift in energia della transizione è dello 0.02% fra un isotopo e il successivo, rispetto a valori dell'ordine di 10^{-6} ottenibili con elettroni equivalenti. [E.B. Shera et al., Phys. Rev. C 14 (1976) 731]

I risultati sperimentali, corrispondenti a salti del muone fra i livelli atomici, concernono l'emissione e la rivelazione di fotoni piuttosto energetici,

dell'ordine di frazioni del MeV, quindi raggi γ . Il calcolo dell'effetto non può dunque più essere condotto con tecniche perturbative, data l'entità, in quanto le funzioni d'onda vengono modificate sostanzialmente e il calcolo preciso dell'energia dei livelli richiede di risolvere direttamente l'equazione di Schrödinger corrispondente nel potenziale modificato. Per una stima dell'entità si può comunque osservare che essendo $E_0^H \simeq 10$ eV l'energia tipica d'un livello elettronico dell'idrogeno, l'energia dei corrispondenti livelli muonici E_μ^H , che scala in modo equivalente ai raggi orbitali, è proporzionale a $Z^2 E_0^H m_\mu/m_e$, che calcolata per $Z = 82$ risulta di ~ 13 MeV. Le variazioni energetiche associate ai γ rivelati costituiscono quindi frazioni importanti delle energie dei livelli stessi.

Lo studio delle differenze fra i valori dei livelli energetici reali, misurati tramite la rivelazione dei raggi γ , e i valori calcolati per atomi idrogenoidi nell'ipotesi di dimensioni nucleari finite, fornisce stime dei raggi R delle distribuzioni di carica nucleari coerenti con la forma

$$R = R_0 A^{1/3} \quad , \quad \text{con} \quad R_0 \simeq 1.16 \text{ fm} \quad (2.28)$$

Oltre al muone vi sono anche altri candidati possibili alla cattura come pioni, Kaone, antiprotone, Sigma, ecc., e il sistema dopo la loro cattura, almeno finchè la particella catturata si mantiene su orbitali con alti valori di n , si comporta a tutti gli effetti come un atomo di idrogeno (atomo mesico, atomo antiprotonico, ...) il cui nucleo ha carica Ze , quindi emette raggi X in risposta alla cascata della particella verso orbitali con n inferiore.

Nel caso in cui le particelle in orbita idrogenoide sentano l'interazione forte, e ciò avviene col procedere del processo a cascata verso livelli con n sempre minore, bisogna considerare che non appena la loro funzione d'onda si sovrappone sensibilmente al nucleo, cresce moltissimo la probabilità di una interazione fra esse e il nucleo stesso, e se tale probabilità supera quella delle transizioni radiative i livelli si allargano con conseguente scomparsa della radiazione X associata. L'interruzione delle serie a un dato valore di n , con il conseguente spostamento e allargamento dei livelli, dà informazioni sull'interazione fra la particella e il nucleo e sul raggio d'azione di tale interazione, oltre che sulla massa ridotta della particella catturata. Si ottengono in tal modo informazioni sulla distribuzione in un nucleo di tutti i suoi componenti, compresi i neutroni, e i risultati sono sempre coerenti con una dipendenza da $A^{1/3}$.

2.4.2 Raggio di carica: nuclei speculari

Studi effettuati su *nuclei speculari*, ovvero isobari che si differenziano per lo scambio fra i corrispondenti numeri di protoni e neutroni⁵ come ad esempio

⁵Questi nuclei presentano ugual numero di interazioni $n - p$, ma diversi numeri di interazioni $p - p$ ed $n - n$.

$^{15}_8\text{O}$ e $^{15}_7\text{N}$, e tramite reazioni di protoni e neutroni su nuclei, mostrano che una volta apportate le correzioni dovute agli effetti coulombiani, la forza fra due neutroni è sostanzialmente la stessa che fra due protoni, o fra protone e neutrone. Si riscontra quindi una sostanziale *indipendenza dalla carica elettrica* per la forza nucleare. Immaginando di poter "spegnere" l'effetto del campo coulombiano, neutrone e protone dovrebbero dunque, secondo quest'ipotesi, comportarsi in modo indistinguibile dal punto di vista della loro interazione nucleare, analogamente a quanto succede per due elettroni di spin opposti, nello stesso orbitale ma in assenza di un campo magnetico esterno. In questo caso i due stati risultano degeneri in energia finchè appunto non si applichi il campo magnetico esterno che definendo una direzione privilegiata nello spazio rimuove la degenerazione fra i due stati differenziandoli in energia.

Similmente si può pensare a protone e neutrone come due stati degeneri in massa per effetto di una qualche simmetria dell'interazione forte (ovvero dell'Hamiltoniano che la descrive) e si può chiamare questa simmetria *simmetria di spin isotopico forte*. La presenza delle forze elettromagnetica e debole *rompe* in effetti questa simmetria e quindi la degenerazione in massa, permettendo di distinguere fra protone e neutrone.

Questo ha condotto all'introduzione del concetto di *spin isotopico* o *isospin*, un numero quantico che qui caratterizza neutrone e protone come due diversi stati di una medesima particella, il nucleone. L'isospin di cui si tratta ora viene anche detto *isospin forte* per distinguerlo da un concetto simile introdotto per spiegare alcune caratteristiche dell'interazione *debole*.

Questi risultati e osservazioni hanno anche suggerito un ulteriore modo per stimare le dimensioni della distribuzione di carica elettrica di un nucleo. Si consideri la differenza fra le energie di legame di due nuclei speculari, che nelle ipotesi precedenti sarà dovuta interamente alle diverse energie potenziali coulombiane fra i protoni dei due nuclei. Supponendo ogni nucleo come una sfera uniformemente carica di raggio R si ha che l'energia potenziale elettrostatica è espressa da

$$E_C = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_0^R r^2 E_i^2(r) dr + \int_R^\infty r^2 E_e^2(r) dr \right] \quad (2.29)$$

dove $E_i(r)$ ed $E_e(r)$ sono i campi elettrici dentro e fuori la sfera che rappresenta il nucleo, dati dalle [2.19](#), per cui

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{(Ze)^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{(Ze)^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right) = \\ &= \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{(Ze)^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Nell'ipotesi, suffragata dai dati sperimentali, che le dimensioni radiali di un nucleo dipendano essenzialmente da A come già visto, cioè $R = R_0 A^{1/3}$, si

può assumere che i due nuclei speculari abbiano lo stesso raggio R , quindi, per grandi valori di Z , la differenza fra le energie di legame si scrive come

$$\Delta E_C = \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R} [Z^2 - (Z-1)^2] \simeq \frac{3}{10\pi\epsilon_0} \frac{e^2 Z}{R_0 A^{1/3}} \quad (2.31)$$

Se ΔE_C è sufficientemente grande il nucleo con Z maggiore decade β^+ nel nucleo con Z minore emettendo un positrone e^+ , dalla misura dell'energia del quale si può risalire alla differenza d'energia di legame e di conseguenza ricavare R_0 , che anche in questi casi risulta consistente con quanto ottenuto negli altri modi.

Le tecniche finora descritte per lo studio delle dimensioni dei nuclei, supponendo comunque che essi siano delle strutture spazialmente simmetriche che tendono a una forma sferica al crescere del numero di massa A , si basano essenzialmente su proprietà e caratteristiche strutturali dei nuclei stessi. Più oltre si vedranno anche altri approcci, legati a processi di diffusione di proiettili sia carichi che neutri da parte dei nuclei.

2.4.3 Raggio di carica: diffusione diffrattiva

Un modo usuale per determinare dimensione e forma di un oggetto è esaminare radiazione diffusa da quell'oggetto. Per apprezzarne i dettagli la lunghezza d'onda della radiazione utilizzata deve essere minore delle dimensioni dei dettagli da studiare, onde evitare che gli effetti diffrattivi mascherino quanto cercato. Quanto minore è la dimensione del bersaglio, tanto maggiori sono le energie cinetiche richieste alle particelle incidenti, per ottenerne una buona risoluzione spaziale. Se infatti $\lambda = \lambda/2\pi$ è la lunghezza d'onda di de Broglie di una particella con impulso p , si ha

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2mc^2 E_k + E_k^2}} \approx \begin{cases} \frac{\hbar}{\sqrt{2mE_k}} & \text{per } E_k \ll mc^2 \\ \frac{\hbar c}{E_k} \approx \frac{\hbar c}{E} & \text{per } E_k \gg mc^2 \end{cases} \quad (2.32)$$

Una ragionevole risoluzione spaziale di strutture fisiche con dimensioni lineari Δx si ha quindi con lunghezze d'onda almeno dello stesso ordine di grandezza: $\lambda \approx \Delta x$. Dal principio di indeterminazione si ha, per gli impulsi corrispondenti delle particelle dei fasci incidenti

$$p \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta x}, \quad pc \gtrsim \frac{\hbar c}{\Delta x} \approx \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\Delta x} \quad (2.33)$$

Per risolvere spazialmente le tipiche dimensioni nucleari, che sono di alcune unità di fm, servono quindi fasci di particelle con impulsi di alcune decine di MeV/c.

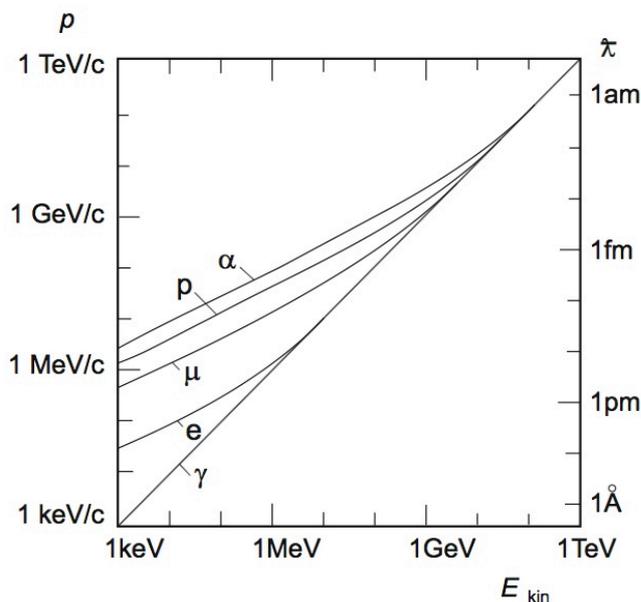


Figura 2.6: Corrispondenza fra energia cinetica, impulso e lunghezza d'onda ridotta di de Broglie per un certo numero di particelle.

I singoli nucleoni hanno dimensioni lineari dell'ordine di 0.8 fm, e per risolverli spazialmente servono fasci di particelle con impulsi maggiori a 200 MeV/c. Volendo invece risolvere spazialmente i quark, costituenti dei nucleoni, servono fasci di particelle con impulsi di molti GeV/c. In figura 2.6 è illustrata la corrispondenza fra energia cinetica, impulso e lunghezza d'onda di de Broglie per alcune particelle: γ , e , μ , p , α . In figura 2.7 il risultato della diffusione elastica di elettroni da nuclei di ^{16}O e ^{12}C ; si notano i primi minimi diffrattivi nella distribuzione delle particelle diffuse. Questi non raggiungono lo zero, come nel caso di diffrazione di luce da un disco opaco, in quanto un nucleo non ha bordi netti, la densità della materia che lo compone non crolla cioè improvvisamente a zero ad un raggio ben preciso.

Si veda ora il problema con un approccio più quantitativo, considerando l'interazione elastica fra un elettrone e il nucleo.

Si immagina l'elettrone incidente come una particella libera di impulso $\mathbf{p}_i = \hbar\mathbf{k}_i$, per cui la sua funzione d'onda è del tipo $e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$. Similmente per l'elettrone diffuso, di impulso $\mathbf{p}_f = \hbar\mathbf{k}_f$, si ha la funzione d'onda $e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}}$.

L'interazione col potenziale $V(r)$ trasforma l'onda incidente nell'onda diffusa e la probabilità di transizione è proporzionale al quadrato della quantità

$$F(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) = \int \psi_f^* V(r) \psi_i dv \quad (2.34)$$

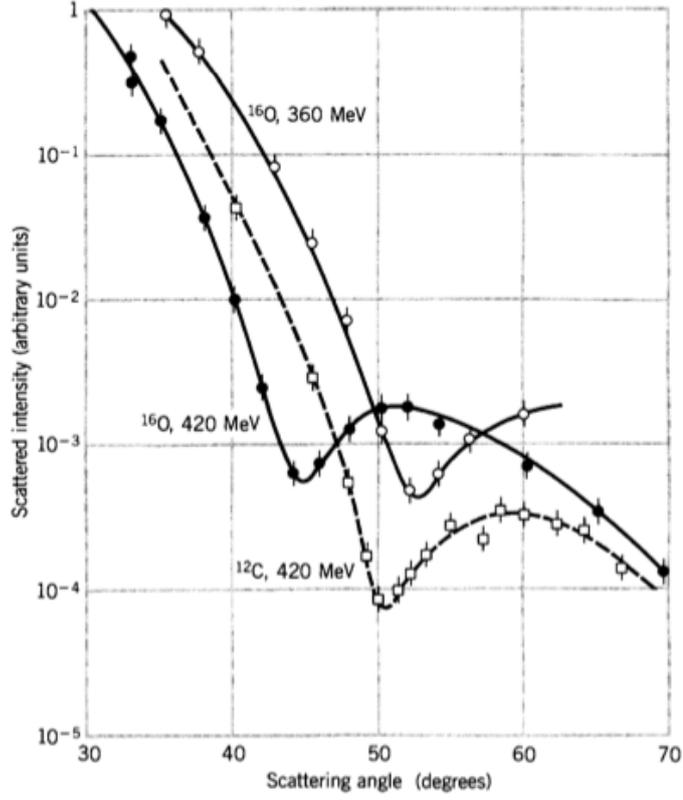


Figura 2.7: Diffusione elettrone nucleo su ^{16}O e ^{12}C . La forma della sezione d'urto ricorda le figure di diffrazione con luce monocromatica. (H. F. Ehrenberg et al., Phys. Rev. 113(1959)666).

a parte un termine di normalizzazione scelto in modo che $F(0) = 1$. Detta $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ la variazione di impulso dell'elettrone diffuso si ha

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.35)$$

Il potenziale d'interazione $V(\mathbf{r})$ dipende dalla densità di carica elettrica nel nucleo $Z\rho_e(\mathbf{r}')$, dove \mathbf{r}' varia entro il volume del nucleo e ρ_e descrive la distribuzione dei portatori di carica nel nucleo. Un elettrone posizionato in \mathbf{r} sente, per effetto della carica dQ nel volumetto $d\mathbf{r}'$ localizzato in \mathbf{r}' , un'energia potenziale

$$dE = -\frac{e dQ}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{Ze^2 \rho_e(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.36)$$

L'energia d'interazione totale si ha integrando su tutti i contributi di carica dQ nel volume del nucleo

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.37)$$

Integrando su \mathbf{r} , dalla [2.35](#) si ha

$$F(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} \rho_e(\mathbf{r}') dv' \quad (2.38)$$

che, se $\rho_e(\mathbf{r}')$ dipende soltanto dal modulo r' , e non da ϑ' o φ' , diventa

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int \text{sen}(qr') \rho_e(r') r' dr' \quad (2.39)$$

Dalla supposta elasticità dell'interazione discende $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$ e q è semplicemente funzione dell'angolo di diffusione α fra \mathbf{p}_i e \mathbf{p}_f . Si ottiene anche $q = (2p/\hbar)\text{sen}(\alpha/2)$ con p l'impulso dell'elettrone. Misurare la probabilità di diffusione in funzione dell'angolo α fornisce quindi la dipendenza da q della [2.39](#). $F(q)$ è detto fattore di forma e operando l'inversione numerica della [2.39](#), ovvero la trasformata di Fourier, si ottiene $\rho_e(r')$.

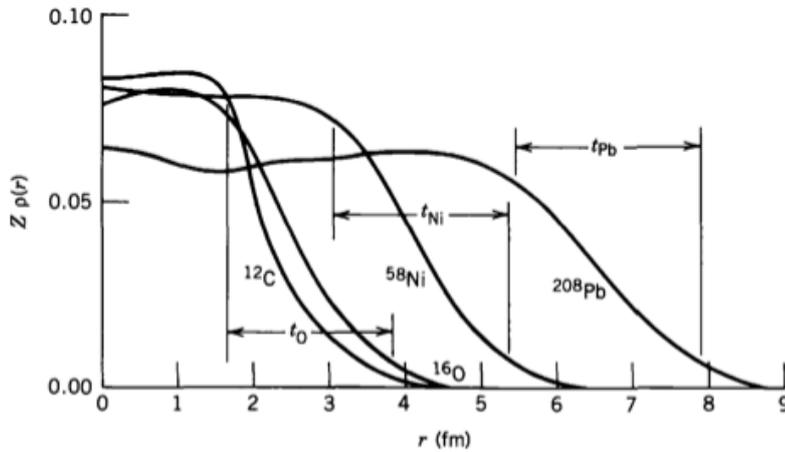


Figura 2.8: Distribuzione radiale di carica per alcuni nuclei determinata tramite diffusione di elettroni. Si noti che $t_O \simeq t_{Ni} \simeq t_{Pb}$.

In figura [2.8](#) il risultato per alcuni nuclei. Si noti che la densità di carica nella zona centrale è leggermente maggiore nei nuclei più leggeri, ma non si discosta molto nei nuclei più pesanti; inoltre i nucleoni non sembrano agglomerarsi con maggior densità verso il centro dei nuclei, ma piuttosto si distribuiscono con densità quasi costante in tutto il volume nucleare tranne che alla superficie, dove la loro densità sfuma. Il numero ρ_0 di nucleoni per unità di volume di un nucleo si mantiene dunque abbastanza costante in tutto il volume che se supposto sferico dà

$$\rho_0 = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} \sim \text{cost.} \simeq 0.17 \text{ nucleoni} \times \text{fm}^{-3} \quad (2.40)$$

con R il raggio medio del nucleo. Si ha quindi $R \propto A^{1/3}$, da cui

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (2.41)$$

Il valore ottenuto con misure di diffusione elastica di elettroni fornisce $R_0 \simeq 1.2$ fm, e rappresenta la più dettagliata descrizione della distribuzione di carica nucleare.

Lo spessore della superficie nucleare, in cui la densità di carica sfuma dal valore massimo a zero, risulta sostanzialmente indipendente dalla taglia del nucleo, per $A \gtrsim 16$, come appare sempre dalla figura [2.8](#).

Tutte le tecniche per sondare le dimensioni dei raggi di carica dei nuclei non eccitati sono coerenti nel mostrare la validità della relazione $R = R_0 A^{1/3}$ con valori di R_0 compresi nell'intervallo $1.20 \div 1.25$ fm.

Prima di estendere i ragionamenti alla distribuzione della materia in un nucleo indipendentemente dal fatto che sia carica o no, e quindi anche dei neutroni, è opportuno dare alcune informazioni in merito alle forze nucleari.

2.5 Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei

Si è detto della evidenza del ridottissimo raggio d'azione delle forze nucleari per la loro ininfluenza sulla struttura degli atomi.

Un'altra importante evidenza del breve raggio d'azione delle forze nucleari viene dalla sostanziale costanza dell'energia media di legame B/A per nucleone, essenzialmente indipendente dalla taglia del nucleo e quindi dal numero di massa A , per valori di A circa maggiori di 12. Se infatti la forza nucleare avesse, come quella coulombiana, un ampio raggio d'azione, allora in un nucleo con A nucleoni vi sarebbero $A(A-1)/2$ coppie di interazioni fra essi e l'energia di legame media corrispondente B/A per ogni nucleone del nucleo dovrebbe quindi crescere proporzionalmente ad $(A-1) \simeq A$, per valori non piccoli di A , ovvero: $B/A \propto A$, per valori non piccoli di A .

Si constata però che sostanzialmente ogni nucleone di un nucleo interagisce efficacemente soltanto con i nucleoni che gli sono immediatamente vicini, e l'aggiunta di ulteriori nucleoni contribuisce ad accrescere le dimensioni del nucleo ma non la sua energia media di legame per nucleone.

La forza nucleare, garantendo la coesione del nucleo, è essenzialmente attrattiva. Esperimenti di diffusione su nuclei con particelle di alta energia mettono tuttavia in evidenza che le forze nucleari, al di sotto di un certo raggio d'azione, hanno caratteristiche fortemente repulsive, e ciò è attribuito alla struttura a quark dei nucleoni. Questo tra l'altro spiega perchè un nucleo non collassi sotto l'azione della forza nucleare.

2.5.1 Distribuzione della materia in un nucleo

Esperimenti che studiano la dipendenza spaziale della forza tra nuclei interagenti, permettono di dedurre l'estensione dei raggi nucleari associati a tutta la materia del nucleo, e non soltanto alla sua componente carica (protoni). Si consideri come esempio la diffusione di nuclei di ${}^4\text{He}$, particelle α , su nuclei di ${}^{197}\text{Au}$. Finchè la separazione fra i due nuclei è maggiore della somma dei rispettivi raggi, fra i due è efficace soltanto la forza coulombiana e ci si trova nelle condizioni della diffusione alla Rutherford. Accrescendo l'energia della particella α incidente si può vincere la mutua repulsione coulombiana portando i due nuclei a distanze reciproche per le quali entrano efficacemente in gioco le forze nucleari

A questo punto l'approccio di Rutherford non riesce più a spiegare i risultati sperimentali, come vedremo tra breve.

C'è poi il decadimento alfa, che anche vedremo nel dettaglio più oltre. In questo caso si descrive il fenomeno supponendo che la particella α sfugga dal nucleo che decade attraversandone, per effetto tunnel, la barriera coulombiana, e la probabilità associata dipende dall'estensione del raggio di materia del nucleo, che può in tal modo essere desunto correlandolo con la probabilità misurabile di decadimento α .

Un ulteriore metodo prende spunto dalla tecnica dell'atomo muonico utilizzata per determinare l'estensione della distribuzione di carica elettrica di un nucleo. In questo caso si sfrutta l'analisi dei raggi X emessi da un atomo pionico, in cui si sia portato un pione negativo π^- ad occupare un'orbita idrogenoide. Rispetto al caso dell'atomo muonico inoltre, dato che il pione interagisce anche fortemente, e non solo coulombianamente, con i nucleoni, quando nel progredire della cascata che effettua attraverso gli orbitali idrogenoidi si avvicina in modo che la sua funzione d'onda cominci a sovrapporsi al nucleo, può succedere che venga assorbito da questo, interrompendo così l'emissione di raggi X dagli orbitali idrogenoidi più interni. Questo rateo di *scomparsa* pionica permette di risalire al raggio di materia di un nucleo.

Risultato notevole è che il raggio di materia di ogni nucleo coincida sostanzialmente col suo raggio di carica a meno di ≈ 0.1 fm, e anche i raggi di materia risultano proporzionali ad $A^{1/3}$ con una costante di proporzionalità $R_0 \simeq 1.2$ fm.

Dato che i nuclei pesanti hanno un numero di neutroni superiore fino al 50% circa di quello di protoni, ci si poteva attendere che il raggio neutronico di un tale nucleo potesse essere maggiore di quello di carica, daltronde la mutua repulsione coulombiana fra i protoni di uno stesso nucleo tende a tenerli leggermente più lontani l'uno dall'altro rispetto ai neutroni, e la forza nucleare fra protoni e neutroni tende a *spingere* questi verso l'interno del nucleo. La concomitanza di questi effetti favorisce sostanzialmente la condizione di quasi uniforme presenza dei protoni e neutroni di un nucleo entro lo stesso volume.

2.5.2 Energia di legame nucleare

Lo studio delle proprietà statiche e dinamiche del nucleo atomico implica un complicato problema quantistico a più corpi: un nucleo contiene troppi nucleoni per poter sperare di descriverne la struttura e le interazioni con particelle o con altri nuclei risolvendo le equazioni del loro moto collettivo, ma contemporaneamente contiene troppo pochi nucleoni per poter applicare senza riserve i metodi statistici.

Ciò ha portato a sviluppare modelli ad hoc per la descrizione di particolari aspetti della fenomenologia nucleare. La mancanza di un'unità concettuale che ne deriva è largamente compensata dagli importanti chiarimenti forniti dalla modellistica nucleare nell'analisi e interpretazione dei risultati sperimentali: questi modelli, anche se spesso fra loro contraddittori e mutuamente inconciliabili, si completano parzialmente a vicenda.

Ogni modello nucleare si fonda su una più o meno accentuata idealizzazione della realtà per individuare, in uno schema teorico semplificato, gli elementi fisici utili ad interpretare una certa classe di risultati sperimentali. La schematizzazione implica inevitabilmente un opportuno compromesso fra l'esigenza del rigore matematico e la realistica opportunità di procedere a semplificazioni, anche drastiche, purchè fisicamente giustificabili.

Il più semplice modello di nucleo atomico lo schematizza come una *goccia sferica* di liquido, di volume $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, nella quale gli $A = (Z + N)$ nucleoni sono uniformemente distribuiti con densità⁶ costante e indipendente da A

$$\begin{cases} \rho(r) = 3A/4\pi R_0^3 \equiv \rho_0 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Le ipotesi alla base del modello sono sostanzialmente che

- l'energia di interazione fra due nucleoni non dipende dal tipo e numero di altri nucleoni presenti;
- l'interazione è attrattiva con un breve raggio d'azione r_{int} , come nelle gocce di liquido in cui le molecole hanno interazione dipolo-dipolo;
- per distanze $r \ll r_{int}$, l'interazione fra i componenti nucleari è fortemente repulsiva;
- l'energia di legame di un nucleo è proporzionale al numero dei suoi nucleoni.

Queste ipotesi implicano la cosiddetta condizione di *saturazione della densità* , per cui ogni nucleone interagisce efficacemente solo con i suoi primi vicini e si ha

$$R_0 = \left(\frac{3A}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} = r_0 A^{1/3} \quad (2.43)$$

Dal modello a goccia e con approccio semi-empirico, nel 1928 von Weizsäcker formulò un'equazione che ben descrive l'andamento dell'energia media di le-

⁶Si ricordi che la densità nucleare media è pari a $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni/fm³.

game per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$, illustrato in figura [2.1](#).

L'equazione di Weizsäcker aveva dunque come obiettivo di interpretare l'osservata dipendenza dell'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo atomico da A e Z .

Esaminando la dipendenza dell'energia media di legame per nucleone $|B/A|$ da A e Z si individuano due distinti contributi all'energia di legame $B(A, Z)$ di un nucleo: un contributo di volume $B_V(A)$ che ha carattere *universale* e assicura la debole dipendenza da A e Z di $|B/A|$ per le diverse specie nucleari, e un contributo $B_i(A, Z)$ articolato su caratteristiche specifiche dei vari nuclidi, cioè

- la **repulsione elettrostatica** fra gli Z protoni del nucleo che tende a ridurne il legame;
- le **dimensioni finite** del nucleo, per cui i nucleoni delle regioni *periferiche* sono meno legati di quelli localizzati nella regione più centrale;
- l'**eccesso neutronico** che tende anche a ridurre il legame nucleare;
- la natura **pari o dispari** di A e Z , responsabile delle variazioni di massa e quindi di energia di legame, osservate nelle sequenze isobariche.

La dipendenza da A e Z delle prime due si ottiene sulla base di elementari considerazioni classiche. Questo, e il modo in cui nel modello si tien conto di alcune prescrizioni quantistiche, costituiscono uno dei limiti sostanziali di tale approccio, al di là del suo importante ruolo nell'interpretazione di molta fenomenologia nucleare e nell'utilizzazione pratica.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alle dimensioni finite di un nucleo, espressa dalla cosiddetta *energia di superficie* $B_S(A)$, è proporzionale alla superficie $S = 4\pi R_0^2 = 4\pi r_0^2 A^{2/3}$ del nucleo, come intuibile dal fatto che ogni nucleone sulla superficie, proprio per motivi geometrici, ha minori interazioni leganti con i suoi simili rispetto ad un nucleone nell'interno di un nucleo. Si pone

$$B_S(A) = b_S A^{2/3} \quad (2.44)$$

con b_S costante da determinare.

Questo termine spiega perchè l'energia media di legame per nucleone $|B/A|$ sia minore per i nuclei più leggeri, che hanno un maggior rapporto superficie/volume e quindi relativamente più nucleoni sulla superficie che nel *core* interno.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta alla repulsione coulombiana fra i protoni è indicata con $B_C(A, Z)$. La si può stimare considerando

una distribuzione, non necessariamente uniforme ma di simmetria sferica, della carica protonica in un nucleo descritta dalla densità di carica $\rho_Z(r)$. Detta $V_C(r)$ l'energia potenziale elettrostatica di un protone nel campo elettrico degli altri $(Z-1)$ protoni del nucleo, applicando il teorema di Gauss si ha, detto $\Phi(E_{r'})$ il flusso della componente radiale $E_{r'}$ del campo elettrico attraverso la superficie $S(r') = 4\pi r'^2$

$$E_{r'} = \frac{Q(r')}{4\pi\epsilon_0 r'^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \int_0^{r'} 4\pi\rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (2.45)$$

con $Q(r')$ la carica elettrica racchiusa nel volume sferico di raggio r' . Per la conservatività del campo elettrostatico si ha $E_{r'} = -dV_C(r')/dr'$, da cui:

$$V_C(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2} \int_0^{r'} \rho_{Z-1}(r'')r''^2 dr'' \quad (2.46)$$

Si ricordi che $V_C(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$.

L'energia potenziale coulombiana del nucleo è

$$B_C = \frac{1}{2} \int \rho_Z(r)V_C(r)d^3r \quad (2.47)$$

Supponendo che la densità di carica sia uniforme entro il volume del nucleo e nulla fuori

$$\begin{cases} \rho_Z(r) = 3Ze/4\pi R_0^3 & \text{con } r \leq R_0 \\ \rho_Z(r) = 0 & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (2.48)$$

si ha:

$$\begin{cases} V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2R_0} \left(3 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) & \text{con } r \leq R_0 \\ V_C(r) = \frac{(Z-1)e}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{con } r > R_0 \end{cases} \quad (2.49)$$

In base alle [2.48](#) e [2.49](#), la [2.47](#) diventa:

$$B_C(A, Z) = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R_0} = b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (2.50)$$

con $b_C = (3e^2)/(20\pi\epsilon_0 r_0)$.

La dipendenza da A e Z trovata per l'energia coulombiana vale anche se la carica elettrica non è uniformemente distribuita nel volume nucleare, purchè sia a simmetria sferica, in tal caso sarà il valore di b_C a cambiare.

- La riduzione dell'energia di legame dovuta all'eccesso neutronico è espressa dalla cosiddetta *energia di simmetria* $B_{sim}(A, Z)$. Sperimentalmente si osserva che mentre per nuclei con bassi valori di A si tende ad avere una condizione per cui $N \cong Z$, al crescere di A il numero di neutroni diventa preponderante ($N/Z > 1$), e ciò in parte compensa l'accrescersi della repulsione coulombiana che seppur più debole dell'interazione nucleare, agendo però a lungo range ridurrebbe troppo l'energia di legame rendendo instabili i nuclei al crescere di A ben prima di quanto non avvenga, se si mantenesse $N \cong Z$. La dipendenza da A e Z di $B_{sim}(A, Z)$ può essere intuitivamente ottenuta considerando che ogni neutrone in eccesso provoca una riduzione di energia di legame per nucleone proporzionale a $(N - Z)/A$. Siccome il numero totale di neutroni in eccesso è $(N - Z)$, l'effetto complessivo è proporzionale ad $(N - Z)^2/A$, da cui

$$B_{sim}(A, Z) = b_{sim} \frac{(N - Z)^2}{A} = b_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (2.51)$$

La costante di proporzionalità b_{sim} si ottiene sperimentalmente.

Perchè il termine $B_{sim}(A, Z)$ contribuisca a ridurre $|B/A|$, nonostante l'aumento di N/Z al crescere di A favorisca la stabilità dei nuclei più pesanti, può essere intuito pensando al principio d'esclusione secondo il quale uno stesso stato quantico non può essere occupato da più di due fermioni. Considerando che ad ogni fissato livello energetico di stato legato c'è un numero finito di stati quantici disponibili, si ha che aggiungendo nucleoni a un nucleo essi si posizioneranno su livelli a energie sempre più alte; ciò però determina l'aumento dell'energia totale del nucleo portando di conseguenza a una diminuzione della sua energia di legame.

Ma protoni e neutroni occupano nel nucleo due diversi gruppi di livelli energetici pressochè paralleli e se un nucleo contiene più neutroni che protoni, vi sarà per esso un certo numero di neutroni su livelli a energie superiori rispetto ai protoni.

Immaginando di poter ad esempio trasformare metà dei neutroni in eccesso in protoni e sistemandoli quindi sui relativi livelli, riequilibrando così i numeri di protoni e neutroni di quel nucleo, si otterrebbe una riduzione della sua energia, e quindi una maggior energia di legame, non sufficiente però a bilanciare l'aumento del contributo di repulsione coulombiana. è dunque lo squilibrio fra Z ed N che genera il termine d'asimmetria.

- Lo studio sistematico delle masse nucleari mostra che i nuclei sono più stabili quando posseggono un numero pari di protoni e/o di neutroni. Questo viene interpretato come un accoppiamento a doppietti sia dei protoni che dei neutroni, in funzione di come si accoppiano i loro mo-

menti orbitali e di spin a formare il momento angolare totale J di un nucleo. Empiricamente si tiene conto di ciò ponendo

$$B_{ac}(A, Z) = b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (2.52)$$

L'analisi fenomenologica delle sequenze isobariche suggerisce di porre $\delta(A, Z) = -1$ se N e Z sono entrambi pari, $\delta(A, Z) = 0$ se N e Z sono l'uno pari e l'altro dispari, o viceversa, e $\delta(A, Z) = +1$ se N e Z sono entrambi dispari. Per tener conto di ciò si può anche scrivere

$$B_{ac}(A, Z) = -b_{ac} \frac{(-1)^N + (-1)^Z}{2A} \quad (2.53)$$

Tornando ora al termine dell'energia di volume $B_V(A)$, lo si esprime come una funzione lineare del numero di massa A

$$B_V(A) = b_V A \quad (2.54)$$

cosicchè il contributo di volume dell'energia media per nucleone, $b_V = B_V(A)/A$, risultando indipendente da A , rappresenti l'indispensabile termine costante dell'energia media di legame, senza il quale la debole dipendenza da A (per $A \geq 12$) osservata per $b(A, Z)$ non sarebbe giustificabile.

Si ottiene quindi, per l'energia di legame dei nuclei atomici, la formula semi-empirica di Weizsäcker

$$\begin{aligned} B_0(A, Z) &= B_V(A) + B_S(A) + B_C(A, Z) + B_{sim}(A, Z) + B_{ac}(A, Z) = \\ &= b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A-2Z)^2}{A} + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Un best-fit con questa relazione sui dati sperimentali permette di ottenere i valori dei cinque parametri b_V , b_S , b_C , b_{sim} e b_{ac} . Qui sono riportati i valori di uno di tali best-fit:

$$\begin{cases} b_V = -15.56 & \text{MeV} \\ b_S = +17.23 & \text{MeV} \\ b_C = +0.697 & \text{MeV} \\ b_{sim} = +19.1 & \text{MeV} \\ b_{ac} = +135.0 & \text{MeV} \end{cases} \quad (2.56)$$

Per le masse nucleari si ha quindi, partendo dalla [2.4](#),

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n + \frac{B_0(A, Z)}{c^2} \quad (2.57)$$

L'attendibilità media dei risultati forniti dalla [2.57](#) è di circa $2 \text{ MeV}/c^2$,

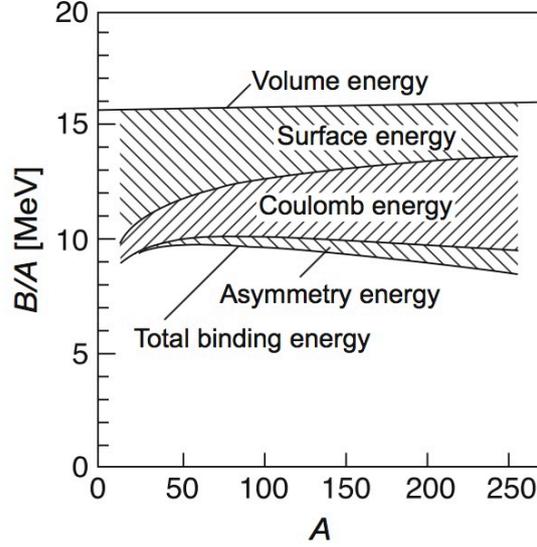


Figura 2.9: Contributo dei termini della formula di Weizsäcker all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo in funzione di A .

tranne che in corrispondenza ai valori di A e Z per i quali si fanno sentire forti effetti di *chiusura degli strati*.

La figura 2.9 illustra l'entità dei diversi contributi all'energia media di legame per un nucleone in un nucleo, presenti nella 2.55; in figura 2.10 è riportato il risultato di un fit, sempre utilizzando la formula di Weizsäcker 2.55, sull'insieme dei valori delle energie di legame medie per nucleone.

Si veda ora che se nella 2.57 si pone

$$\begin{cases} \alpha = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} A^{-1} \\ \beta = b_C A^{-1/3} + 4b_{sim} + m_n - m_p \\ \gamma = b_V + b_S A^{-1/3} + b_{sim} + m_n \end{cases} \quad (2.58)$$

essa diventa

$$M(A, Z) = \alpha Z^2 - \beta Z + \gamma A + b_{ac} \frac{\delta(A, Z)}{A} \quad (2.59)$$

esprimendo la massa dei nuclei come una funzione quadratica di Z , per valori fissati di A . Con valori dispari di A si ha un unico andamento parabolico per $M(Z)$; per valori pari di A si trova che le masse dei nuclei pari-pari e dispari-dispari si distribuiscono su due parabole traslate verticalmente, con quella relativa ai nuclei dispari-dispari situata a energie maggiori della quantità $2|B_{ac}(A, Z)|$.

I minimi di tali parabole sono in corrispondenza di $Z = \beta/2\alpha$, e indicano i nuclidi di massa inferiore per la sequenza isobarica individuata dal particolare valore di A , stabili rispetto al decadimento β .

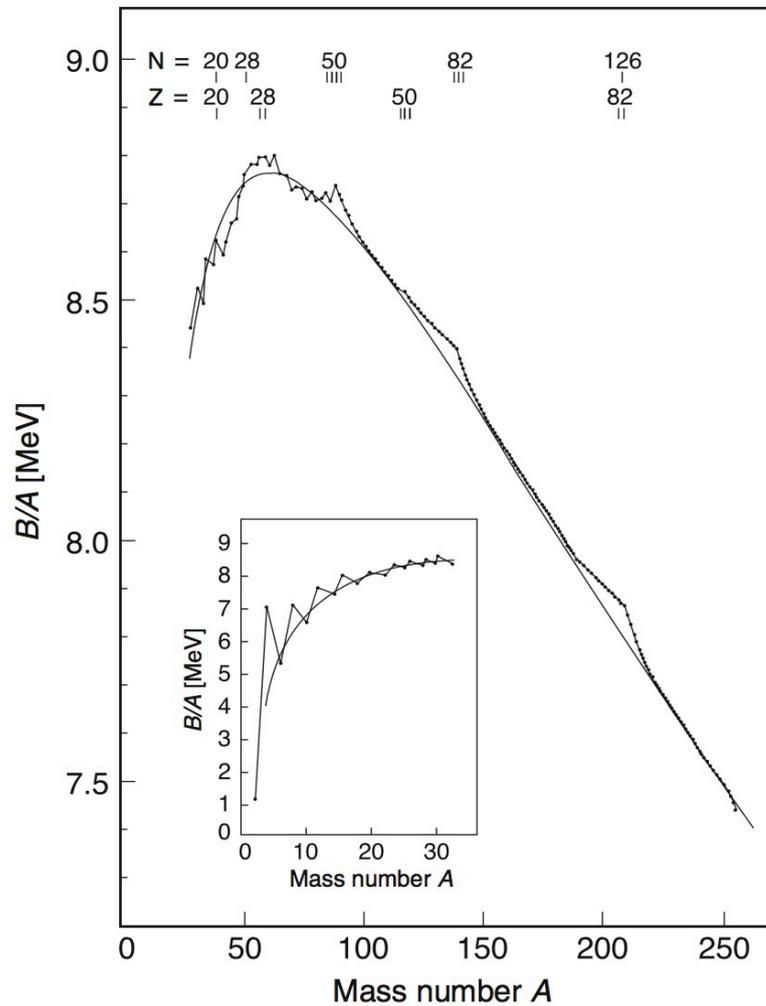


Figura 2.10: Fit con Weizsäcker su energie medie di legame per nucleone dei nuclei con A pari (Mattauch, Thiele e Wapstra, Nuc. Phys. 67(1965) 1).

Si è così ritrovato quanto evidenziato sperimentalmente dalla tabella dei nuclei e descritto nel precedente paragrafo [1.4](#).

Per chiarire l'importanza e l'utilità della formula di Weizsäcker è anche necessario sottolineare i limiti che contribuiscono a definirne gli effettivi ambiti di applicabilità.

L'ipotesi in base alla quale si sono ottenuti alcuni termini considera il nucleo come sostanzialmente *sferico*, e questo non permette di tener conto dei termini non nulli di quadrupolo elettrico che si osservano per svariati nuclei. Risultati in merito alla saturazione della forza di coesione fra i nucleoni in

un nucleo e alla loro repulsione a breve range ⁷, mettono in evidenza che non basta tener conto del principio di esclusione di Pauli come fatto.

Le considerazioni sul ruolo che momento angolare orbitale e spin dei nucleoni hanno sul carattere repulsivo della forza, sono puramente qualitative e semiclassiche.

L'assimilare il nucleo atomico a una specie di *goccia di liquido* dà oltretutto predizioni insoddisfacenti o erranee nel descrivere i risultati di moti collettivi rotazionali e/o vibrazionali osservati.

L'approccio è stato ed è comunque utile nel descrivere la stabilità dei nuclei rispetto al decadimento α , alla fissione e al decadimento β .

2.5.3 Neutron drip line

La stabilità di un nucleo dipende da svariati fattori, in particolare, al crescere di Z , per compensare l'accrescersi della mutua repulsione coulombiana, la natura fa crescere il numero N di neutroni più di Z .

Però l'indiscriminata crescita di N per un dato Z porta a isotopi non più stabili, dato il modo in cui i neutroni aggiunti devono sistemarsi energeticamente nella struttura nucleare, costretti dal principio d'esclusione.

Risulta quindi utile conoscere i numeri massimi di neutroni che fissato Z , sono compatibili con l'esistenza di isotopi stabili. Ciò equivale a individuare la cosiddetta *neutron drip line* sulla tabella dei nuclidi, ovvero l'insieme di nuclidi per cui risulta nulla l'energia S_n di separazione di un neutrone. Si ha

$$\begin{aligned} S_n &= -[M(A, Z) - M(A - 1, Z) - m_n]c^2 = \\ &= -[Zm_p + Nm_n - B(A, Z) - Zm_p - (N - 1)m_n + B(A - 1, Z) - m_n]c^2 = \\ &= B(A, Z) - B(A - 1, Z) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Supponendo $B(A, Z)$ funzione continua delle quantità variabili A e Z , la si può sviluppare in serie di Taylor delle due variabili fermandosi al primo termine

$$B(A + \delta A, Z + \delta Z) \approx B(A, Z) + [\partial B/\partial A]\delta A + [\partial B/\partial Z]\delta Z + \dots \quad (2.61)$$

Nel caso in questione: $\delta A = -1$, $\delta Z = 0$, quindi

$$B(A + \delta A, Z + \delta Z) \approx B(A, Z) - [\partial B/\partial A] \quad (2.62)$$

Si ha pertanto

$$S_n \approx B(A, Z) - B(A + \delta A, Z + \delta Z) \approx B(A, Z) - B(A - 1, Z) \approx \partial B/\partial A \quad (2.63)$$

⁷Si veda anche il paragrafo [11.3](#)

Si esprimono le energie di legame tramite la formula di Weizsäcker trascurando il termine d'accoppiamento di spin e approssimando $Z \simeq (Z - 1)$, plausibile per nuclei non troppo piccoli:

$$B(A, Z) = b_V A + b_S A^{2/3} + b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + b_{sim} \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (2.64)$$

Derivando parzialmente

$$\begin{aligned} S_n &= b_V + \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} - \frac{1}{3} b_C Z^2 A^{-4/3} + b_{sim} \frac{2A(A - 2Z) - (A - 2Z)^2}{A^2} = \\ &= b_V + \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} - \frac{1}{3} b_C Z^2 A^{-4/3} + \frac{b_{sim}}{A^2} (2A^2 - 4AZ - A^2 + 4AZ - 4Z^2) = \\ &= b_V + \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} - \frac{1}{3} b_C Z^2 A^{-4/3} + b_{sim} \left[1 - \frac{4Z^2}{A^2} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

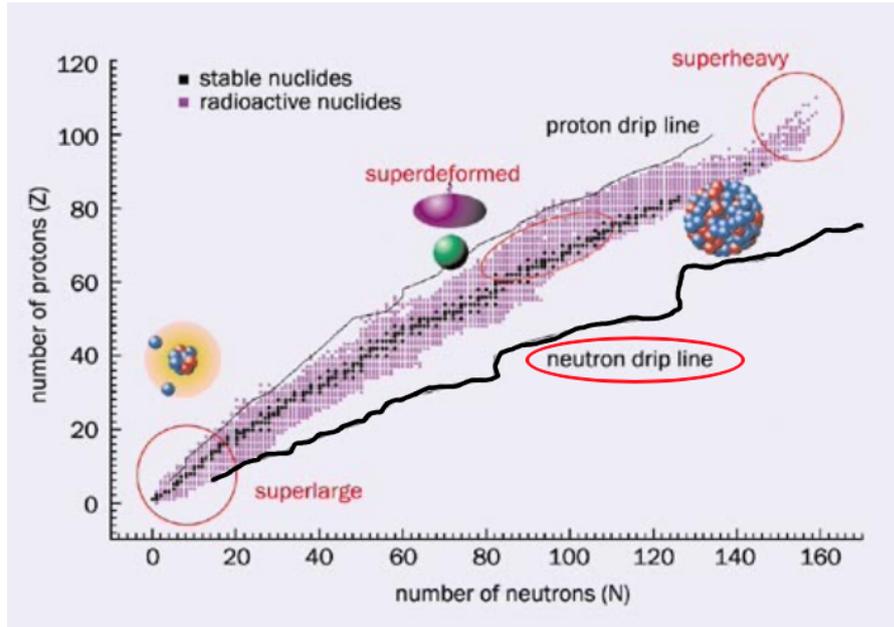


Figura 2.11: Neutron drip line

Imponendo quindi la condizione che caratterizza la neutron drip line, $S_n = 0$, si ottiene

$$b_V + b_{sim} - \frac{2}{3} b_S A^{-1/3} = Z^2 \left(\frac{1}{3} b_C A^{-4/3} + \frac{4b_{sim}}{A^2} \right)$$

da cui

$$Z_{n_dline} = \sqrt{\frac{b_V + b_{sim} - \frac{2}{3}b_S A^{-1/3}}{\frac{b_C}{3} A^{-4/3} + 4\frac{b_{sim}}{A^2}}} \quad (2.66)$$

In figura 2.11 l'andamento effettivo della neutron drip line sul piano (Z, N) della carta dei nuclidi di Segrè mostra anche gli effetti di chiusura delle shell, non predetti dalla 2.66.

2.6 La misura di Rutherford

Nel classico esperimento di Rutherford, Geiger e Mardsen, particelle α emesse da una sorgente con energie di alcuni MeV venivano fatte incidere su bersagli di atomi d'oro sotto forma di sottilissimi fogli. L'energia cinetica della α in quel caso non era tale da permettere loro di superare la barriera coulombiana e portarle a *sentire* l'interazione nucleare dei bersagli.

In queste ipotesi si può in prima approssimazione trattare il problema come urto di particelle puntiformi contro bersagli puntiformi, con sola interazione coulombiana.

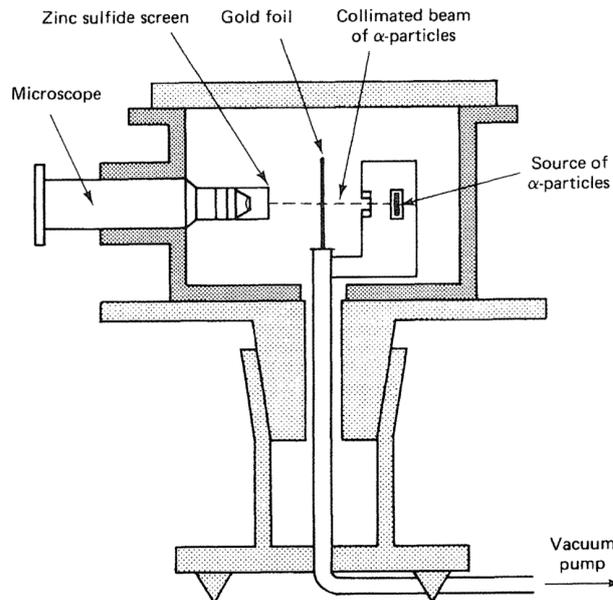


Figura 2.12: Schema dell'apparato utilizzato da H.W. Geiger e E. Mardsen per l'esperimento sulla diffusione della particelle α da un bersaglio d'oro.

Nell'esperimento originale le particelle α , attraversato il bersaglio, venivano contate tramite i lampi di fluorescenza che provocavano in uno schermo di solfuro di zinco accoppiato ad un microscopio, come in figura 2.12.

Si suppone altresì che la massa di ogni proiettile sia molto inferiore a quella di ogni bersaglio, che è solo una discreta approssimazione nel caso di Rutherford. Comunque, data la massa dei proiettili da lui utilizzati e le energie cinetiche associate, si può ragionevolmente trattare il problema con approccio non relativistico.

Siano m e Z_1e la massa e la carica di particelle incidenti su un nucleo di massa $M \gg m$ e carica totale Z_2e , inizialmente a riposo nell'origine O di un sistema di riferimento (x, y, z) solidale con l'osservatore, sistema del laboratorio (SL), e si supponga monocinetico il fascio di particelle incidenti e collimate lungo la direzione dell'asse z , come mostrato in figura [2.13](#).

Il problema ha quindi simmetria cilindrica rispetto all'asse z . Si ipotizzi anche che la condizione $m \ll M$ sia tale da poter trascurare, dopo l'urto, il rinculo di M che quindi permarrà praticamente fermo in SL come se avesse massa ∞ . Nel caso della misura originale di Rutherford il rapporto fra le masse di proiettile e bersaglio è pari a circa 2×10^{-2} .

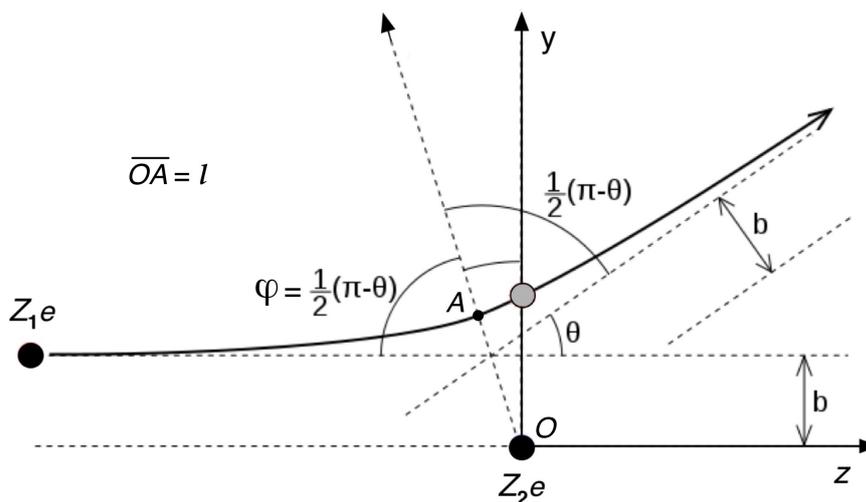


Figura 2.13: Diffusione alla Rutherford.

Sia $V = Z_2e / (4\pi\epsilon_0 r)$ il potenziale generato dal centro diffusore carico e si consideri la generica particella del fascio incidente che a distanza infinita dal centro diffusore, quindi quando non ne sente ancora l'influenza e si ha $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$, percorre una traiettoria di avvicinamento con velocità di modulo v lungo una retta parallela all'asse z e distante b da esso. La quantità b è detta *parametro d'urto* ed è la distanza alla quale la particella incidente sarebbe passata dal centro diffusore in assenza di interazione.

Classicamente il problema consiste nel determinare l'angolo ϑ di deflessione sulla traiettoria della particella in funzione di b , ovvero $\vartheta(b)$. Si procede determinando l'inverso, ovvero $b(\vartheta)$.

Il potenziale è di tipo centrale-kepleriano e sia $E_T = E_k + E_P$ l'energia totale a disposizione con E_k l'energia cinetica ed E_P l'energia potenziale della particella incidente. La traiettoria di questa è dunque una conica coincidente con un'ellisse se $E_T < 0$ e con un'iperbole se $E_T > 0$. Qui $E_T > 0$ dato che a distanza infinita, prima dell'urto, $V(r) = 0$ e $E_T = E_k = mv^2/2$; la traiettoria è quindi un'iperbole.

Si supponga, senza perdere in generalità, che le forze siano repulsive, come effettivamente nel caso di Rutherford.

Dalle conservazioni di momento angolare ed energia si ha che a distanza ∞ questi valgono rispettivamente, mvb ed $mv^2/2$, mentre nel punto A di massimo avvicinamento valgono $mv_A l$ ed $mv_A^2/2 + Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 l)$. Quindi

$$b = \frac{lv_A}{v} \quad , \quad v^2 = v_A^2 + \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 ml} \quad (2.67)$$

Si ponga

$$l_0 = \frac{2Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_k} \quad (2.68)$$

che fissata $E_k = mv^2/2$, corrisponde al punto di massimo avvicinamento possibile A^* per un urto centrale, per il quale è cioè $b = 0$. In A^* è ovviamente $v_{A^*} = 0$. Si ha così

$$v^2 = v_A^2 + v^2 \frac{l_0}{l} \quad (2.69)$$

Per urto centrale la particella di carica $Z_1 e$ si avvicina al diffusore lungo l'asse z fino alla distanza minima l_0 corrispondente al punto A^* e poi inverte il moto risultando diffusa a un angolo π . Dalle relazioni precedenti si ha

$$v_A^2 = \frac{b^2}{l^2} v^2 \quad , \quad v_A^2 = v^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad , \quad b^2 = l^2 \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \quad (2.70)$$

e dalle proprietà geometriche dell'iperbole

$$l = b \cotg \frac{\varphi}{2} \quad (2.71)$$

che sostituito nella terza delle [2.70](#) dà

$$\cotg^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{l_0}{b} \cotg \frac{\varphi}{2} - 1 = 0 \quad (2.72)$$

Moltiplicando la [2.72](#) per $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$ e ricordando che

$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad , \quad \cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

si ha

$$l_0 = 2 b \cotg \varphi \quad (2.73)$$

Le relazioni fra ϑ e φ desumibili dalla figura 2.13 danno

$$\vartheta + 2\varphi = \pi \quad , \quad \text{da cui:} \quad \cotg\varphi = \tg\frac{\vartheta}{2} \quad (2.74)$$

e dalle 2.68 e 2.73 si ottiene

$$b(\vartheta) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg\frac{\vartheta}{2} \quad (2.75)$$

che è la relazione cercata.

Si indichi con n_0 il numero di particelle del fascio incidente che a distanza praticamente infinita dal centro diffusore attraversano l'unità di superficie del piano (x, y) nell'unità di tempo, ottenendo $dN = 2\pi n_0 b db$ per le particelle che sempre nell'unità di tempo, attraversano l'anello circolare fra b e $b + db$. Supponendo ora che il numero di particelle si conservi, che cioè quelle incidenti siano anche tutte e sole quelle diffuse, e considerando quelle diffuse nell'angolo solido compreso fra ϑ e $\vartheta + d\vartheta$ si ha, differenziando la 2.75

$$|db(\vartheta)| = \left| \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} d\left(\cotg\frac{\vartheta}{2}\right) \right| = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \frac{d\vartheta}{2 \sin^2\vartheta/2} \quad (2.76)$$

dove si prende il valore assoluto per tener conto del fatto che ϑ diminuisce all'aumentare di b .

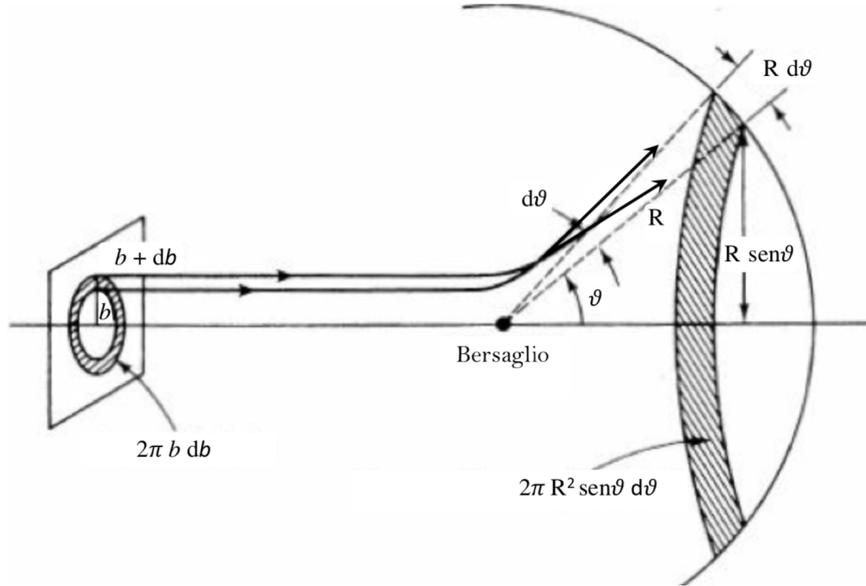


Figura 2.14: Geometria dell'interazione alla Rutherford.

Sostituendo ora in dN

$$dN(\vartheta) = 2\pi n_0 \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg\vartheta/2}{2 \sin^2\vartheta/2} d\vartheta \quad (2.77)$$

Essendo $d\Omega(\vartheta) = 2\pi \sin\vartheta d\vartheta$ l'angolo solido nella simmetria cilindrica del problema si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dN(\vartheta)/n_0}{d\Omega(\vartheta)} &= \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cotg\vartheta/2}{2 \sin\vartheta \sin^2\vartheta/2} = \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{\cos\vartheta/2}{2 \sin^3\vartheta/2 \cdot 2 \sin\vartheta/2 \cos\vartheta/2} = \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\sin^4\vartheta/2} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ rappresenta l'area attraversata a grande distanza dal centro diffusore dalle particelle poi diffuse entro l'angolo solido unitario, centrato attorno all'angolo polare ϑ , e vien detta *sezione d'urto di Rutherford*.

Si osservi che si sono completamente trascurate le mutue interazioni elettromagnetiche fra le particelle cariche del fascio incidente, il che è ragionevole se il fascio non è troppo intenso.

$d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ è indipendente dai segni delle cariche di proiettile e bersaglio e per piccoli angoli diverge come ϑ^{-4} ; il potenziale coulombiano mantiene il proprio effetto anche a distanza ∞ e quindi anche particelle incidenti con grandi valori di b ne sentono l'effetto.

Il calcolo della sezione d'urto coulombiana totale, ottenuta integrando la $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ su tutto l'angolo solido, dà un valore ∞ che non ha ovviamente senso fisico. Un approccio più realistico tiene conto che $V(r)$ non è effettivamente proporzionale ad $1/r$ per ogni distanza dal centro diffusore, in quanto all'aumentare di b la reale costituzione dei bersagli fa sì che le particelle incidenti comincino a sentire sempre più efficacemente gli effetti delle altre parti costitutive i bersagli stessi, ovvero elettroni atomici e altre strutture cariche che schermano la carica $Z_2 e$ del diffusore.

Si consideri più realisticamente che il centro diffusore non sia puntiforme ma occupi una zona estesa di spazio di forma sferica e raggio r_0 . Per $b > r_0$ il teorema di Gauss assicura che il campo elettrico prodotto dalla carica $Z_2 e$ diffondente è lo stesso che si ha con la carica concentrata nel punto O . Se quindi $l_0 > r_0$, la traiettoria della particella incidente di carica $Z_1 e$ si svolge tutta esternamente alla regione in cui è distribuita la carica bersaglio, e di conseguenza la relazione fra b e ϑ resta invariata, da cui l'uguaglianza anche della $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$. Se invece $l_0 < r_0$, che implica energie cinetiche che soddisfino la condizione $E_k > E_{k,0} = Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0 r_0)$, si deduce che l'effetto della spazialità della carica diffondente si percepisce soltanto per angoli di diffusione maggiori di un valore limite ϑ_0 definito dalla condizione

$$r_0 = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_k} \cotg \frac{\vartheta_0}{2} \quad (2.79)$$

L'osservazione sperimentale delle deviazioni a grandi angoli nella sezione d'urto differenziale misurata, confrontata con quanto previsto per diffusione da bersagli puntiformi, permette di stimare r_0 . Una valutazione dei risultati non può naturalmente prescindere dal tener conto anche delle dimensioni finite del proiettile.

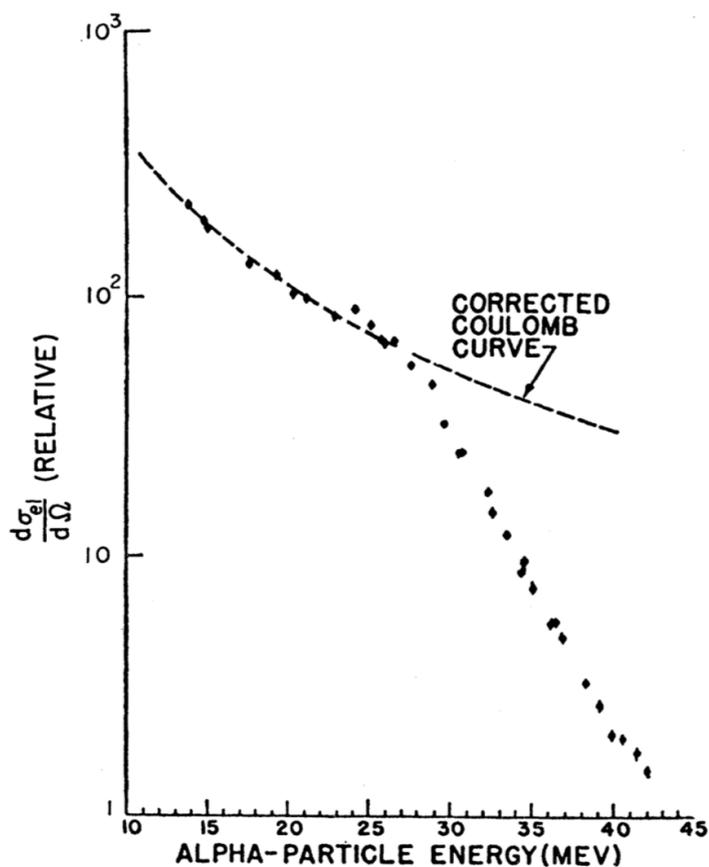


Figura 2.15: $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ della reazione $\alpha + {}^{197}\text{Au}$, per $\vartheta = 60^\circ$ a energie crescenti. Oltre 27 MeV i dati si scostano dall'andamento coulombiano. Dalla [2.79](#) si stima r_0 . [Eisberg & Porter, Rev.Mod.Phys. 33 (1961) 190]

Rutherford tutto questo lo aveva intuito e pensava giustamente che l'effetto delle dimensioni nucleari si sarebbe dovuto manifestare, al crescere dell'energia cinetica delle α incidenti, con una deviazione della sezione d'urto da quella ottenuta considerando esclusivamente l'interazione coulombiana.

Al crescere dell'energia le particelle α avrebbero dovuto infatti spingersi così vicine al nucleo da sentire efficacemente gli effetti dell'interazione nucleare, oltre a quelli puramente coulombiani.

Una verifica sperimentale richiedeva ovviamente di poter disporre di acce-

eratori in grado di produrre particelle α di energie crescenti fino e oltre a quelle di soglia per l'effetto, come mostrato in figura [2.15](#).

2.6.1 I risultati dell'esperimento di Rutherford

Le misure condotte da Geiger e Mardsen sfruttando fasci di particelle α prodotti da sorgenti permisero di verificare inequivocabilmente tre aspetti fondamentali della formula di Rutherford: la dipendenza da Z^2 , quella da $E_{k,\alpha}^{-2}$ e quella da $(\sin\vartheta/2)^{-4}$. I dati da loro ottenuti, graficati nelle figure da [2.16](#) a [2.19](#), mostrano un eccellente accordo con le previsioni della formula.

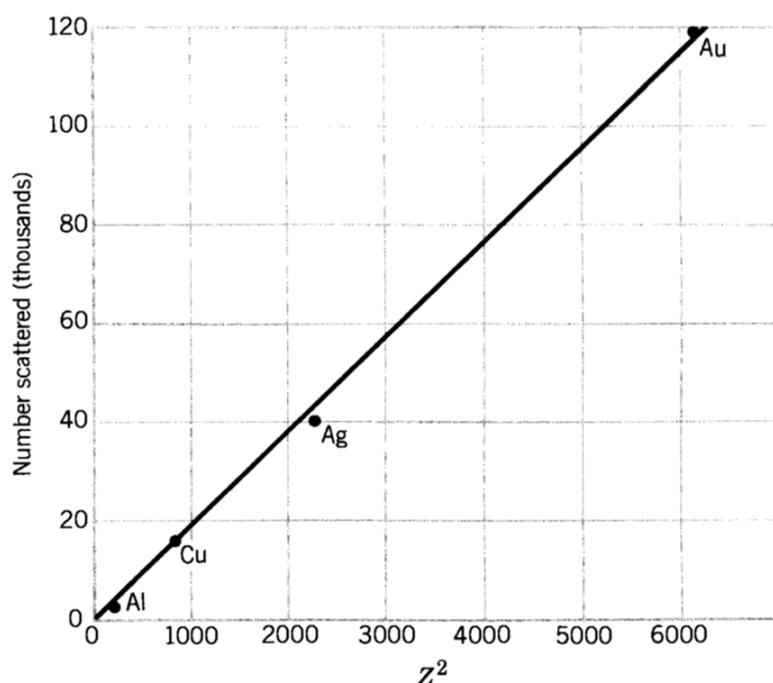


Figura 2.16: Dipendenza del rateo di diffusione dal quadrato del numero atomico Z del bersaglio. L'andamento conferma le previsioni della formula di Rutherford.

L'aspetto più notevole dell'esperimento di diffusione che condusse Rutherford a sviluppare la sua ipotesi di struttura atomica fu la frazione di particelle α diffuse ad angoli grandi, superiori a 90° . Considerando ad esempio un foglio d'oro dello spessore di 2.0×10^{-6} m su cui incidono α da 8 MeV, che è circa la massima ottenibile da sorgenti, si ha che tutte le particelle α incidenti con un parametro d'urto $b \leq 14$ fm e che vengono deviate oltre 90° sono una frazione pari a 7.5×10^{-5} del totale, e si tratta di una quantità cospicua, giustificabile solo con l'ipotesi che vi siano nel bersaglio centri diffusori solidi e compatti.

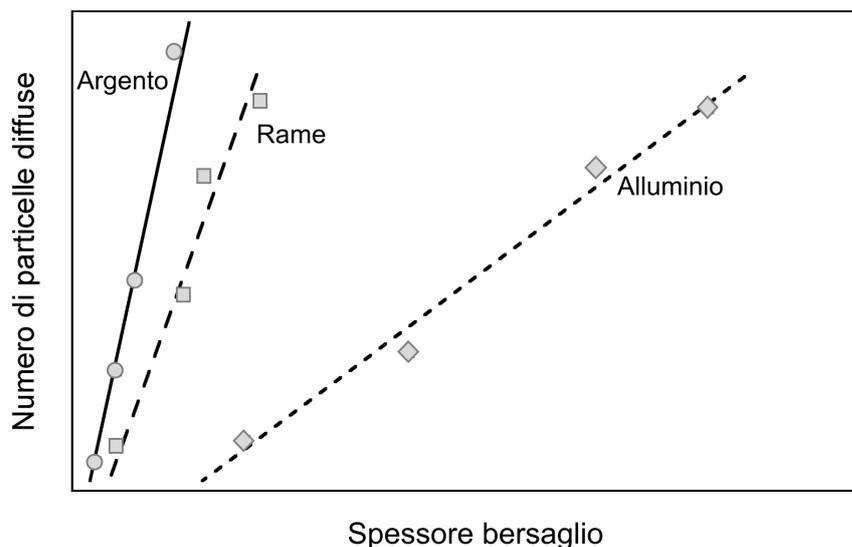


Figura 2.17: Dipendenza dallo spessore del bersaglio del rateo di diffusione. L'andamento lineare suffraga l'ipotesi del modello atomico di Rutherford.

Si guardi ad esempio al caso di diffusione a piccoli angoli prodotta da un bersaglio quale il foglio d'oro considerato, con circa 12×10^{18} nuclei/cm², che significa una spaziatura media di circa 3×10^{-12} m fra nucleo e nucleo in direzione trasversale rispetto all'asse del fascio. Ciò implica che i 2/3 circa delle particelle α incidenti hanno un parametro d'urto $b \geq 10^{-12}$ m. L'angolo di diffusione associato a questo valore di b è di 1.6° , per cui si può affermare che l'angolo medio di diffusione è dell'ordine di $\vartheta_m \simeq 1^\circ$ o inferiore.

Una diffusione a grande angolo si giustifica quindi o con molte diffusioni di questo tipo, tutte volte coerentemente ad accrescere l'angolo totale, o con una singola diffusione ad angolo grande. Per osservare una diffusione ad un angolo totale $N\vartheta_m$, come frutto di successive diffusioni a piccolo angolo, ne sono quindi necessarie circa N^2 .

Se si osserva il numero di particelle diffuse a un angolo prefissato $\vartheta > 1^\circ$ in corrispondenza a diversi valori dello spessore Δz del foglio di materiale bersaglio, ci si aspetta che la probabilità di osservare particelle diffuse vari proporzionalmente a $\sqrt{\Delta z}$ per effetto delle diffusioni multiple, mentre dovrebbe invece variare proporzionalmente a Δz nel caso di diffusioni singole, e ciò semplicemente in quanto la probabilità di subire singole deviazioni a grande angolo cresce in modo direttamente proporzionale al numero dei possibili bersagli in grado di produrre tali deviazioni, come si vede chiaramente dai dati sperimentali in figura [2.17](#). Incrementando l'energia cinetica della particella incidente si raggiunge una condizione $E_{k,s}$ per la quale la distanza di massimo avvicinamento b_0 è pari circa alla somma dei raggi di proiettile

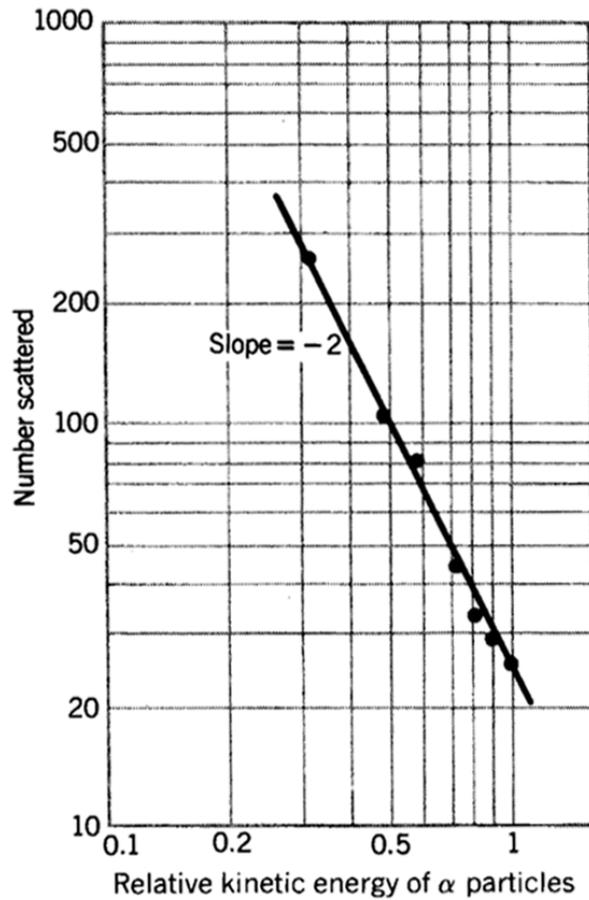


Figura 2.18: Dipendenza del rateo di diffusione dall'energia cinetica per particelle α incidenti su un bersaglio sottile. L'andamento conferma le previsioni della formula di Rutherford.

e bersaglio ($b_0 \simeq R_a + R_X$), alla quale le due particelle sentono gli effetti l'una sull'altra delle forze nucleari. La formula di Rutherford è stata ottenuta considerando che la sola interazione presente sia quella coulombiana e quindi non dovrebbe essere in grado di predire i risultati sperimentali per energie prossime o superiori a $E_{k,s}$, come in figura [2.15](#).

Dalle figure [2.16](#), [2.18](#) e [2.19](#) è poi evidente come i dati abbiano confermato le dipendenze rispettivamente da Z^2 , $E_{k,\alpha}^{-2}$ e da $\sin^{-4}\vartheta/2$.

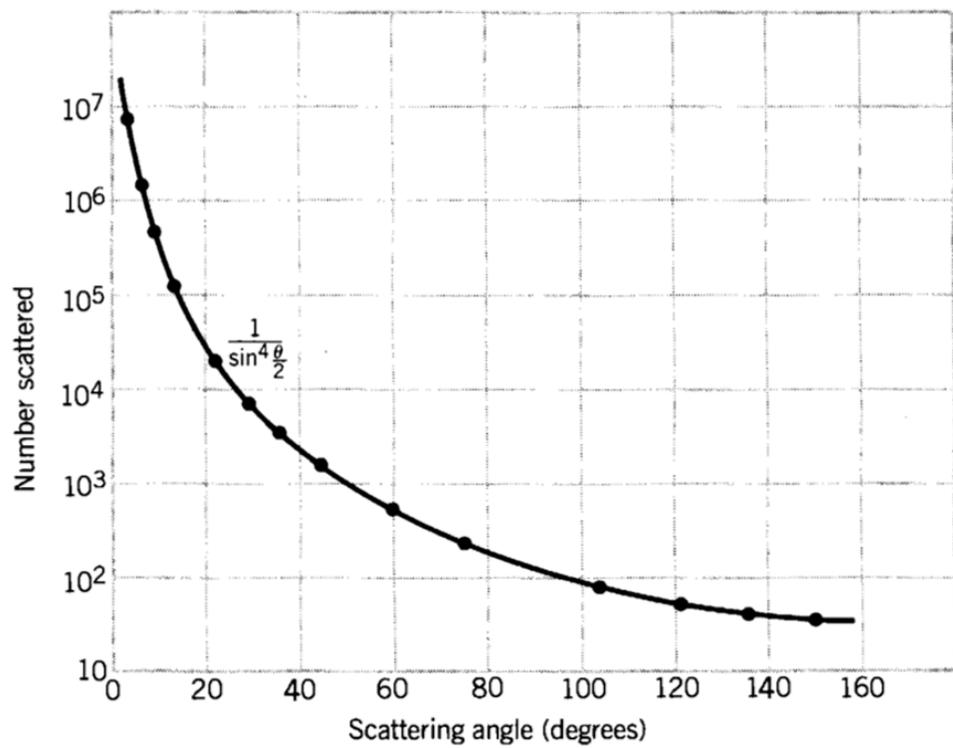


Figura 2.19: Dipendenza da ϑ del rateo di diffusione per un sottile bersaglio d'oro. L'andamento conferma le previsioni della formula di Rutherford.

Capitolo 3

Struttura dei nuclei e modelli nucleari

Il modello standard dovrebbe poter descrivere sia la struttura che la fenomenologia dei nuclei, ma praticamente è molto difficile e arduo formulare con esso predizioni quantitative in quest'ambito.

Ciò sostanzialmente per due ragioni:

- in linea di principio la fisica in un nucleo può essere derivata interamente dalla QCD, anche se gli attuali approcci matematici e computazionali per risolverla su sistemi a bassa energia, come i nuclei, sono estremamente limitati. Ciò è dovuto alla transizione di fase che ha luogo fra materia costituita da quark ad alta energia e materia adronica a più bassa energia, che rende inutilizzabili gli approcci perturbativi, complicando molto la costruzione di un modello delle forze inter-nucleoniche basato sulla QCD;

- nonostante la forza nucleare sia a corto raggio, serve una quantità enorme di potenza di calcolo per riprodurre con accuratezza le caratteristiche di un nucleo con un approccio *ab initio*.

Daltronde i modelli con cui storicamente si sono confrontati i risultati sperimentali sono relativamente grezzi e necessariamente approssimati. Nessuno di essi spiega completamente l'ampia panoramica di fenomeni che caratterizzano i nuclei e la loro struttura.

Il modello a goccia di liquido è stato il primo, e si è visto come abbia portato alla formula di Weizsäcker. Accenneremo ora ad altri due importantissimi modelli di struttura nucleare, il modello a gas di Fermi e il modello a shell.

3.1 Modello a gas di Fermi

Un nucleo che si trovi nel proprio stato fondamentale o sia leggermente eccitato può essere visto come un esempio di gas di Fermi degenere. La densità di materia nel nucleo è determinata dalle interazioni fra nucleoni che sono essenzialmente caratterizzate, sulla scala del fm, da una forte repulsione a

brevi distanze e da una relativamente blanda attrazione fra nucleoni non troppo vicini. I nucleoni di un nucleo non vanno pensati come localizzati in posizioni più o meno definite all'interno del nucleo, ma piuttosto come due sistemi indipendenti di particelle di spin $1/2$ che ubbidiscono alla statistica di Fermi-Dirac e che nel rispetto del principio d'esclusione di Pauli, si muovono per il resto liberamente nell'intero volume del nucleo con un impulso medio corrispondente associato che si vedrà essere dell'ordine di $250 \text{ MeV}/c$. Questa mobilità dei nucleoni nel nucleo è conseguenza della relativa *debolezza* dei legami fra i nucleoni di uno stesso nucleo e del principio di esclusione. Il fatto concettualmente importantissimo che i nucleoni di uno stesso nucleo si muovano come se fossero quasi liberi al suo interno non è però immediatamente ovvio, e risulterà più chiaro in seguito quando si parlerà dei cosiddetti *ipernuclei*, ovvero quei nuclei che fra i loro componenti annoverano un *iperone* in sostituzione di un nucleone. Si vedrà che un iperone Λ^0 si muove entro un ipernucleo come una particella sostanzialmente *libera*¹, soggetta a una buca di potenziale la cui profondità è praticamente indipendente dal particolare nucleo considerato, e di ampiezza pari al raggio del nucleo stesso.

Il modello a gas di Fermi per i nuclei è in grado di giustificare i valori delle energie di legame fra nucleoni, i termini principali della formula semi-empirica di massa di Weizsäcker [2.55](#) e come vedremo anche le distribuzioni in impulso trovate per le interazioni quasi elastiche fra elettroni e nuclei. Il potenziale percepito da ogni nucleone è la sovrapposizione dei potenziali dovuti a tutti i restanti nucleoni del nucleo. Nel seguito si supporrà che tale

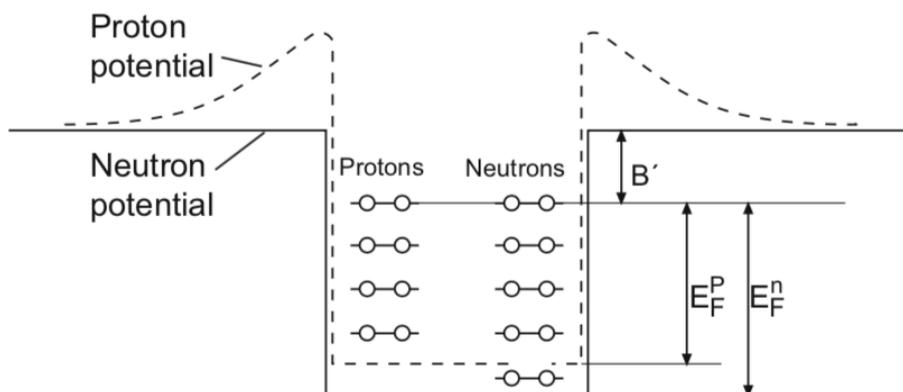


Figura 3.1: Forma schematica dei potenziali per neutroni e protoni in un nucleo, nell'ambito del modello a gas di Fermi.

potenziale abbia la forma di una buca rettangolare che per i protoni tiene anche conto del contributo coulombiano, come schematizzato in figura [3.1](#).

¹Paragrafo [3.2.1](#)

Il numero di stati disponibili per un nucleone nel volume V e nell'intervallo d'impulso dp è quindi dato da

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} V \quad (3.1)$$

dove $(2\pi\hbar)^3$ è il volume di una cella dello spazio delle fasi contenente quattro nucleoni, due di ogni tipo con spin mutuamente antiparalleli.

Nello stato fondamentale, caratterizzato da temperatura pari a zero, i livelli a più basse energie sono tutti occupati fino ad un certo valore massimo di impulso indicato con p_F e detto *impulso di Fermi*. Il numero di questi livelli è ottenibile integrando la [3.1](#)

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3} \quad (3.2)$$

e poichè ogni livello può ospitare al massimo due fermioni dello stesso tipo, si hanno rispettivamente

$$N = \frac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad e \quad Z = \frac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (3.3)$$

neutroni e protoni.

Se si esprime il volume del nucleo come quello di una sfera, $V = 4\pi R^3/3 = 4\pi r_0^3 A/3$, con $r_0 = 1.21$ fm ottenuto da esperimenti di diffusione di elettroni e si ipotizza che le buche di potenziale per i protoni e per i neutroni abbiano la stessa estensione radiale, si trova, per un nucleo con $Z = N = A/2$, un impulso di Fermi pari a

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \simeq 250 \text{ MeV}/c \quad (3.4)$$

Sembra dunque che i nucleoni in un nucleo si muovano \sim liberamente con grandi valori di impulso.

I risultati della diffusione quasi elastica fra elettroni e nuclei danno una stima dell'impulso di Fermi in accordo con questa previsione. Per i nuclei più leggeri p_F tende ad assumere valori inferiori e in tali casi il modello a gas di Fermi non rappresenta una buona descrizione del nucleo.

L'energia del livello occupato più alto, corrispondente all'energia di Fermi E_F , vale

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \simeq 33 \text{ MeV} \quad (3.5)$$

con M la massa del nucleone. Detta B' , come in figura [3.1](#), la differenza fra il massimo valore della buca e il livello di Fermi, si trova che è costante per la gran parte dei nuclei e corrisponde all'energia media di legame per nucleone $B/A = 7 \div 8$ MeV.

La profondità della buca di potenziale e l'energia di Fermi sono in larga misura indipendenti dal numero di massa A

$$V_0 = E_F + B' \simeq 40 \text{ MeV} \quad (3.6)$$

Per un nucleo come il ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ ad esempio, con $B/A \simeq 7.67 \text{ MeV}$, il fondo della buca dei neutroni giace 44 MeV al di sotto del livello di energia nulla e quello della buca dei protoni a 34 MeV.

Questo modello è analogo a quello dell'elettrone libero in un metallo ed equivalentemente fornisce utili risultati nei problemi in cui si richiede la distribuzione delle quantità di moto, piuttosto che le energie o la distribuzione spaziale dei nucleoni. Similmente se ne deduce che l'energia cinetica media del gas di nucleoni nella "materia nucleare" è confrontabile con la profondità della buca di potenziale, ulteriore evidenza del fatto che un nucleo è una struttura non troppo fortemente legata.

Ad una prima osservazione potrebbe sembrare un paradosso che da un lato i nucleoni di un nucleo occupino livelli compresi fra -40 MeV e -7 MeV , mentre l'energia media di legame è dell'ordine di 7 MeV . Bisogna però considerare che il potenziale nucleare non è dovuto ad una sorgente esterna al nucleo ma è generato dai suoi stessi nucleoni. Aggiungendo più nucleoni ad un nucleo non si modifica l'energia di Fermi, ma decresce invece la separazione fra livelli energetici contigui. La costanza dell'energia di Fermi è una conseguenza della costanza della densità nucleare, l'incremento della densità dei livelli è invece dovuto all'accrescimento del volume del nucleo.

Corrispondentemente, rimuovere nucleoni da un nucleo equivale ad accrescere la mutua distanza fra i suoi livelli energetici. Fornendo quindi ad un nucleo un'energia pari all'energia media di legame per nucleone si può rimuovere un nucleone dopo l'altro in quanto ci sarà sempre almeno un nucleone al livello di Fermi.

Al crescere di A i nuclei contengono tanti più neutroni che protoni. Il fatto che i livelli di Fermi di protoni e neutroni di uno stesso nucleo stabile devano coincidere^[2], implica che la profondità della buca di potenziale sentito dal gas di neutroni debba essere maggiore di quella del potenziale sentito dal gas di protoni, come in figura [3.1](#). In media i protoni appaiono quindi meno legati dei neutroni per la loro mutua repulsione coulombiana che introduce nel potenziale un termine aggiuntivo del tipo

$$V_C = (Z - 1) \frac{\alpha \hbar c}{R} \quad (3.7)$$

²In caso contrario il nucleo potrebbe ricondursi ad una condizione energeticamente più favorevole attraverso un decadimento β , contraddicendo però così l'ipotesi che il nucleo originalmente considerato fosse "stabile".

Si può quindi calcolare la dipendenza dell'energia di legame dall'eccesso di neutroni presenti in un nucleo. L'energia cinetica media per nucleone è (approccio classico, date le energie in gioco)

$$\langle E_k \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_k p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M} \simeq 20 \text{ MeV} \quad (3.8)$$

Il contributo cinetico totale di energia del nucleo è dunque

$$E_k(N, Z) = N \langle E_n \rangle + Z \langle E_p \rangle = \frac{3}{10M} \left[N (p_F^n)^2 + Z (p_F^p)^2 \right] \quad (3.9)$$

che tenendo conto delle [3.3](#) e supposto il nucleo di forma sferica, con raggio della buca di potenziale uguale per neutroni e protoni, diventa

$$E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{5/3}} \quad (3.10)$$

Questa energia cinetica media presenta, per A fissato e al variare di N o equivalentemente Z , un minimo quando $Z = N$, e da ciò consegue che l'energia di legame si riduce per $N \neq Z$. Sviluppando la [3.10](#) in serie di potenze di $(N - Z)$ si ha

$$E_k(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{2/3} \left[A + \frac{5}{9} \frac{(N - Z)^2}{A} + \dots \right] \quad (3.11)$$

che contiene una dipendenza funzionale dall'eccesso neutronico. Il primo termine contribuisce al termine dell'energia di volume nella formula semi-empirica di Weizsäcker [2.55](#), mentre il secondo descrive la correzione dovuta alla asimmetria $N \neq Z$. Per riprodurre con ragionevole accuratezza quest'ultimo bisogna tener conto del cambiamento del potenziale per $N \neq Z$ e della variazione nell'energia cinetica.

È un notevole risultato che dal semplice modello a gas di Fermi con nucleoni che si muovono in un potenziale medio senza interagire, più o meno agli antipodi di quello a goccia di liquido su cui si basa la formula di Weizsäcker, si possano dedurre due termini cruciali di tale formula come quello di volume e quello di asimmetria neutroni-protoni.

Questo modello mette in evidenza l'importanza dell'energia di zero nella materia nucleare e i valori particolarmente elevati delle velocità dei nucleoni nei nuclei, come confermato dai risultati sperimentali. La soglia di produzione di mesoni per urto di protoni è ad esempio più bassa nei nuclei più pesanti che nell'idrogeno, poichè nel sistema del laboratorio alcuni nucleoni del nucleo bersaglio sono dotati di velocità v tutt'altro che trascurabili, con $v/c \simeq 1/4$.

Il modello a gas di Fermi suggerisce inoltre che nell'urto di un nucleone contro un nucleo non siano probabili trasferimenti di piccole quantità di moto al nucleo, in quanto gli stati nucleonici con quantità di moto piccole sono tutti già occupati e quindi o si ha un trasferimento rilevante oppure l'urto non ha luogo, come confermato dai risultati dello studio sperimentale delle reazioni nucleari.

3.2 Il modello a Shell

Il modello che descrive l'atomo con i suoi elettroni organizzati su orbitali ha avuto successo nel descrivere i dettagli della struttura atomica. Si è allora tentato qualcosa di simile per affrontare il problema della struttura nucleare. Nel modello a orbitali atomici questi vengono riempiti per energie crescenti, in accordo col principio di esclusione. Procedendo in questo modo si ottiene una struttura con un core stabile di livelli pieni, e un certo numero di elettroni di valenza, dai quali per la gran parte dipendono le proprietà dell'atomo. L'accordo fra le previsioni del modello e i risultati sperimentali è notevole. In particolare si ritrovano le caratteristiche che emergono dalla tavola degli elementi, ovvero variazioni regolari e dolci delle proprietà di atomi di una medesima shell, ma cambiamenti forti e netti quando, una volta riempita una shell si passa alla successiva.

Trasportando questo modello all'ambito nucleare emergono subito delle sostanziali diversità. Il potenziale responsabile nel caso atomico è dovuto al campo Coulombiano dei protoni del nucleo. Le shell sono quindi determinate da una causa esterna. Nel caso del nucleo non esiste invece una causa esterna in quanto i nucleoni si muovono entro un potenziale generato da loro stessi.

Pensare poi i nucleoni densamente impacchettati in un nucleo e al tempo stesso come se percorressero orbite "giacenti su shell", non sembra di primo acchito ragionevole e plausibile come lo è invece nel caso degli elettroni di un atomo. È facile immaginare che un elettrone atomico possa compiere indisturbato molte orbite senza urtare alcunchè, mentre ci si potrebbe aspettare che i protoni e i neutroni di un nucleo siano in una condizione di collisioni continue l'uno contro l'altro. Modelli nucleari del tipo a gas densi con molteplici collisioni al loro interno non sono però in grado di riprodurre i dati sperimentali.

Ci si chiede com'è possibile che i nucleoni di un nucleo, sottoposti all'intensa forza che li lega e con una così alta densità di loro simili nel volume del nucleo ($\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni \times fm $^{-3}$), possano completare *intere orbite* senza urtarsi? Ciò ha luogo come conseguenza del *principio di esclusione*, in base al quale due fermioni non possono mai condividere contemporaneamente lo stesso stato quantico. Se non ci sono nelle vicinanze stati quantici vuoti che possano essere raggiunti grazie all'energia messa in gioco in un'interazione,

allora quell'interazione non avrà luogo. È un'idea essenzialmente legata alla natura quantistica delle strutture coinvolte, se non c'è uno stato libero in cui un nucleone possa essere mandato da un urto, allora quell'urto non avverrà e non esiste di ciò un analogo classico.

D'altronde vi sono numerose regolarità osservate per i nuclidi che rimandano all'ipotesi che la struttura nucleare sia in qualche modo organizzata a shell. Prima però di delineare le caratteristiche del modello nucleare a shell si vuole mostrare come si sia riusciti a sondare in un certo qual modo direttamente questa struttura, sfruttando un particolare tipo di *sonda* sensibile all'interazione nucleare, gli *iperoni*.

3.2.1 Ipernuclei

Pensando al nucleo come ad un gas di Fermi, allo zero assoluto tutti i livelli a più bassa energia sono completamente occupati e le interazioni fra nucleoni possono dare esclusivamente luogo a scambi fra due di essi nello spettro energetico; ma questo processo non cambia l'energia totale di un nucleone e di conseguenza non può essere osservato sperimentalmente. È questo il motivo che permette di affrontare il problema assegnando ad ogni singolo nucleone nel nucleo l'appartenenza a uno stato di ben definiti energia e momento angolare. Una condizione siffatta è descritta da una funzione d'onda di particella singola, per cui la funzione d'onda del nucleo è il prodotto delle funzioni d'onda di particella singola per ogni nucleone.

Per studiare lo spettro energetico di un nucleo sarebbe però utile poter etichettare i suoi singoli nucleoni. Ciò si può realizzare introducendo nel nucleo una sonda opportuna, come ad esempio un *iperone* Λ^0 ³, ottenendo così quello che si chiama un *ipernucleo*.

La Λ^0 nel nucleo non può decadere a causa dell'interazione forte, dato che quest'ultima conserva la stranezza, e di conseguenza la vita media della Λ^0 nel nucleo sarà simile a quella della Λ^0 libera, cioè $\tau_{\Lambda^0} \simeq 10^{-10}$ s, che è un tempo sufficientemente lungo per poter attuare una analisi spettroscopica con cui studiare le proprietà dell'ipernucleo.

Un modo per produrre ipernuclei è con la seguente reazione di scambio della "stranezza"



in cui il pedice indica che un neutrone del nucleo si è trasformato in una Λ^0 tramite la reazione



In figura 3.2 l'apparato con cui nel 1970 al CERN si sono generati e rivelati ipernuclei. Le condizioni cinematiche sono particolarmente convenienti quando l'impulso del kaone incidente è di 530 MeV/c e si osservano i pioni

³L'iperone Λ^0 è costituito da un quark *u*, uno *d* e uno *s*; ha massa di 1.115 GeV/c² e vita media di 2.631×10^{-10} s; è una specie di neutrone pesante.

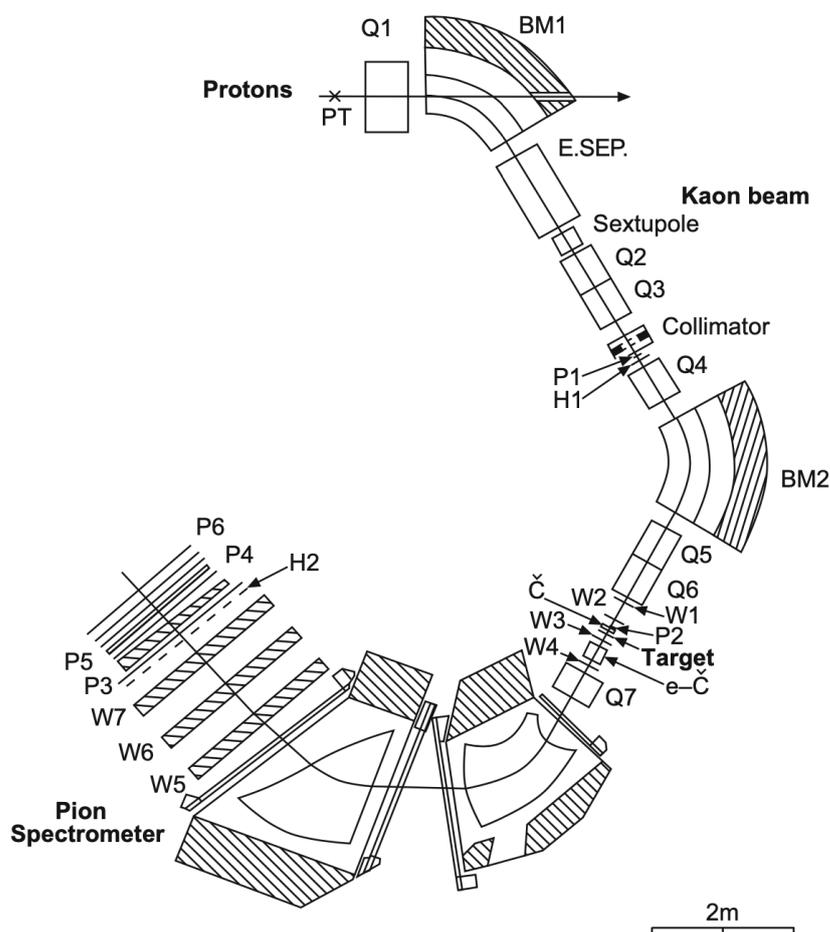


Figura 3.2: Apparato per produzione e rivelazione di ipernuclei. Un fascio di K^- incide un bersaglio di carbonio spesso 1 cm, generando ipernuclei e π^- . Lo spettrometro ha due stadi, per la misura dell'impulso dei K e dei π . Per la rivelazione sfrutta contatori a scintillazione (P), camere a fili (W) e rivelatori Cherenkov (C), dipolo magnetico (BM) per la misura degli impulsi, e lente quadrupolare (Q) per focheggiamento. Le energie d'eccitazione degli ipernuclei si deducono dalle differenze fra le energie dei kaoni e dei pioni.

dello stato finale all'angolo $\vartheta = 0^\circ$, in quanto in tal caso è nullo l'impulso trasferito al nucleo diffuso. In pratica si sono utilizzati fasci di kaoni di impulsi compresi fra $300 \text{ MeV}/c$ e $1 \text{ GeV}/c$, per cui l'impulso trasferito permane piccolo a confronto dell'impulso di Fermi d'un nucleone nel nucleo che può dunque essere visto come abbastanza indisturbato.

Il bilancio energetico della reazione [3.13](#) con un neutrone libero dipende dalle masse delle particelle coinvolte. Se però il neutrone è legato in un nucleo e anche la Λ^0 resta nel nucleo, allora la differenza d'energia fra K^- e

π^- dà la differenza fra le energie di legame del neutrone e della Λ^0

$$B_{\Lambda^0} = B_n + E_\pi - E_K + (M_{\Lambda^0} - M_n)c^2 + (\text{en.rinculo}) \quad (3.14)$$

In figura [3.3](#) lo spettro pionico per questa reazione su nuclei di ^{12}C in

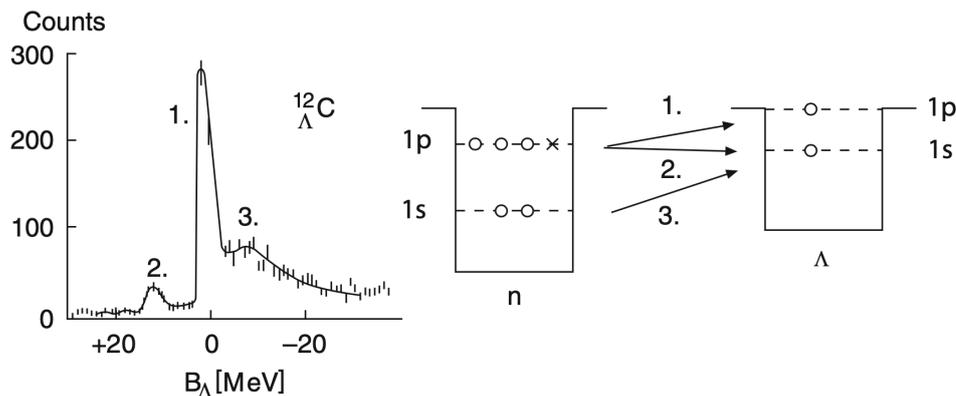


Figura 3.3: Spettro dei pioni da $K^- + ^{12}\text{C} \rightarrow \pi^- + ^{12}_{\Lambda^0}\text{C}$ per impulso dei kaoni di 720 MeV/c. Il rateo del conteggio di pioni a 0 è graficato in funzione dell'energia trasferita B_{Λ^0} , interpretabile come energia di legame della Λ^0 nel nucleo. Il picco 1 corrisponde all'energia di legame $B_{\Lambda^0} = 0$ e il picco 2, livello base del ^{12}C , ha un'energia di legame di 11 MeV

funzione dell'energia B_{Λ^0} di legame della Λ^0 . Il valore di B_n è quello sperimentalmente misurato per strappare un neutrone dal nucleo di ^{12}C . Oltre al picco centrato su $B_{\Lambda^0} = 0$ se ne osserva uno meno intenso a 11 MeV che può essere interpretato considerando che la trasformazione di un neutrone in una Λ^0 lascia disponibile una quantità netta d'energia che non può che venire dal legame nucleare e viene trasferita al pione.

Ciò si spiega considerando che il principio di esclusione impedisce a un protone o a un neutrone in un nucleo di occupare livelli energetici inferiori rispetto a quelli in cui già si trovano, se questi sono già occupati; anche in un nucleo quindi gli stati si riempiono, energeticamente parlando, dal basso verso l'alto. Se però una particella Λ^0 prende il posto di un neutrone in un nucleo, essa potrà poi andare ad occupare qualsiasi livello energetico in quel nucleo, in quanto essa non risente della presenza dei singoli nucleoni ma solo del potenziale medio da essi creato. Il potenziale medio sentito dalla Λ^0 in un nucleo è però meno intenso di quello cui è soggetto un generico nucleone di quello stesso nucleo, essendo l'interazione Λ^0 -nucleone più debole di quella nucleone-nucleone, come si vede anche per il fatto che non esistono stati legati fra una Λ^0 e un singolo nucleone.

Dallo spettro [3.3](#) si deduce quindi che protoni e neutroni del nucleo di ^{12}C occupano livelli 1s e 1p e se un neutrone da uno stato 1p si trasforma in una Λ^0 , questa può anche essere in uno stato 1p, e in tal caso l'energia di legame

della Λ^0 è prossima a zero, o può essere in uno stato 1s, e la sua energia di legame è allora $B_{\Lambda^0} \approx 11$ MeV.

Il picco meno distinto a valori $B_{\Lambda^0} < 0$ è dovuto non alla trasformazione di uno dei neutroni debolmente legati dello stato 1p prossimo al livello di Fermi, ma piuttosto di un neutrone dello stato 1s con energia di legame maggiore dell'energia utilizzata per il calcolo di B_{Λ^0} .

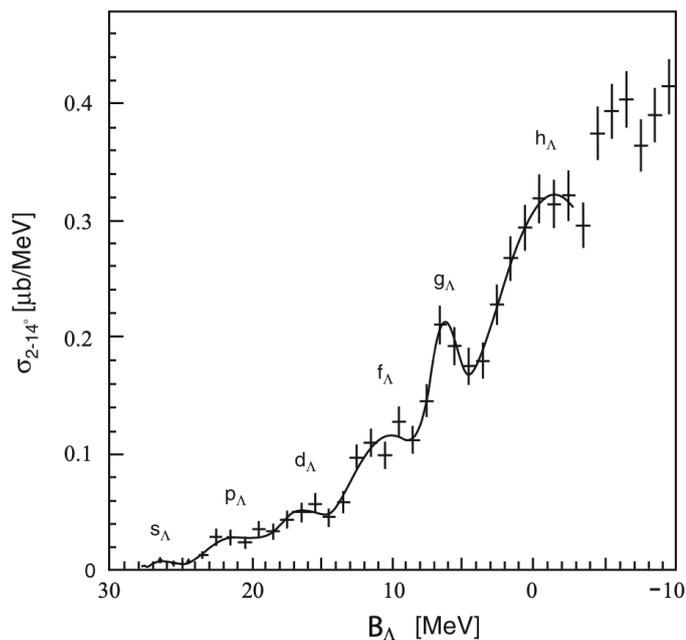


Figura 3.4: Stati eccitati di ${}_{\Lambda^0}^{208}\text{Pb}$. s_{Λ} è lo stato fondamentale, h_{Λ} quello a soglia

Gli stati d'eccitazione di una singola particella Λ^0 sono ancora più evidenti in nuclei pesanti, come si vede in figura 3.4 per lo spettro di ${}_{\Lambda^0}^{208}\text{Pb}$. Indagini sistematiche tramite la reazione



hanno fornito le energie di legame degli stati 1s oltre a quelle degli stati eccitati p, d, f, di svariati nuclei, come in figura 3.5, dove è mostrata la dipendenza di queste energie di legame dal numero di massa A dei nuclei considerati.

È quindi chiaro che gli iperoni Λ occupano livelli energetici discreti i cui valori energetici crescono al crescere di A . Le curve mostrate in figura sono state ottenute considerando nuclei sferici con raggi dati da $R = R_0 A^{1/3}$ e una buca di potenziale uniforme di profondità $V_0 \approx 30$ MeV.

La particella Λ si muove sostanzialmente come una particella libera nella

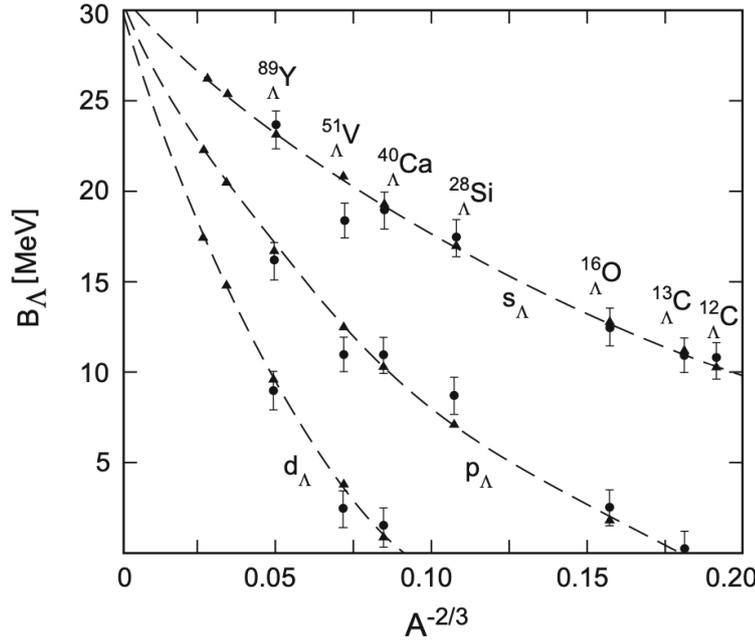


Figura 3.5: Energia di legame delle Λ negli ipernuclei in funzione del numero di massa A . I simboli s_Λ , p_Λ e d_Λ sono riferiti agli stati della Λ nel nucleo. I simboli triangolari connessi da linee tratteggiate sono predizioni da modello

buca, nonostante il nucleo sia costituito da materia nucleonica densamente distribuita.

3.2.2 Il potenziale del modello a Shell

Il primo passo per sviluppare il modello a shell consiste nella scelta del potenziale. Si considerino come due esempi un potenziale a buca quadrata con pareti infinite e un oscillatore armonico.

In figura 3.6 sono mostrati i livelli che si ottengono in questi casi risolvendo l'equazione di Schrödinger corrispondente. Come nel caso atomico la degenerazione di ogni livello corrisponde al numero di nucleoni che possono essere messi in esso, ovvero $2(2\ell + 1)$ col fattore $(2\ell + 1)$ dovuto alla degenerazione di m_ℓ e il fattore 2 derivante dalla degenerazione di m_s . Come in fisica atomica i livelli sono connotati da notazione spettroscopica con l'importante differenza che n non è il numero quantico principale ma conta semplicemente quanti livelli posseggano un determinato valore di ℓ . Quindi, ad esempio, 1d è il più basso stato d, 2d il successivo, e così via (in spettroscopia atomica non esistono stati 1d o 2d). In figura sono anche riportati i numeri di occupazione di ogni livello e il numero cumulativo di nucleoni che dovrebbe corrispondere al completo riempimento delle shell principali, osservando che

protoni e neutroni sono contati separatamente. Dallo schema emergono i numeri magici 2, 8, 20, ma non i successivi.

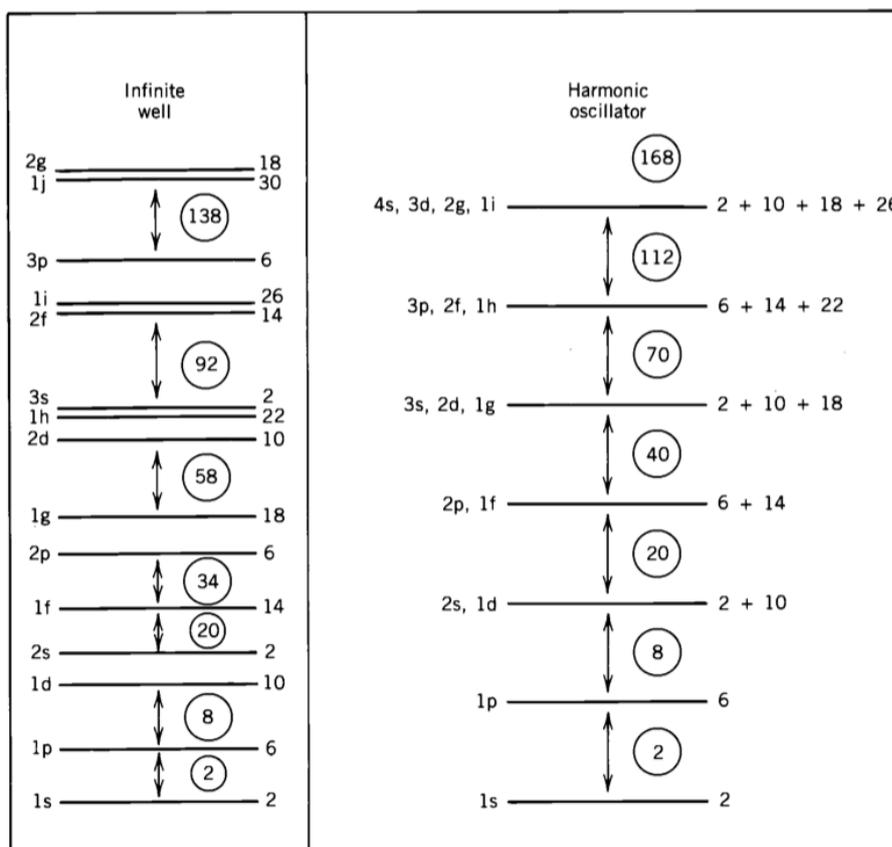


Figura 3.6: Strutture a shell ottenute con un potenziale a buca infinita, e con un potenziale d'oscillatore armonico. Sono indicati i numeri di fermioni ospitabili nei vari livelli e quelli totali alla chiusura delle shell.

Un primo passo per migliorare il modello consiste nello scegliere un potenziale più realistico. La buca a pareti infinite esclude di poter togliere qualunque nucleone ad un nucleo, equivarrebbe ad allontanarlo a distanza infinita. Oltretutto, dato il breve range delle forze nucleari, è ragionevole che il potenziale nucleare segua approssimativamente l'andamento della densità di nucleoni in un nucleo, e non presenti bordi netti, raggiungendo il valore zero in modo dolce a cavallo della distanza corrispondente al raggio nucleare. Neppure il potenziale di oscillatore armonico soddisfa, in quanto anch'esso richiede un'energia infinita per separare un nucleone dal nucleo e inoltre ha pareti troppo poco nette.

Si sceglie dunque un potenziale della forma

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (3.16)$$

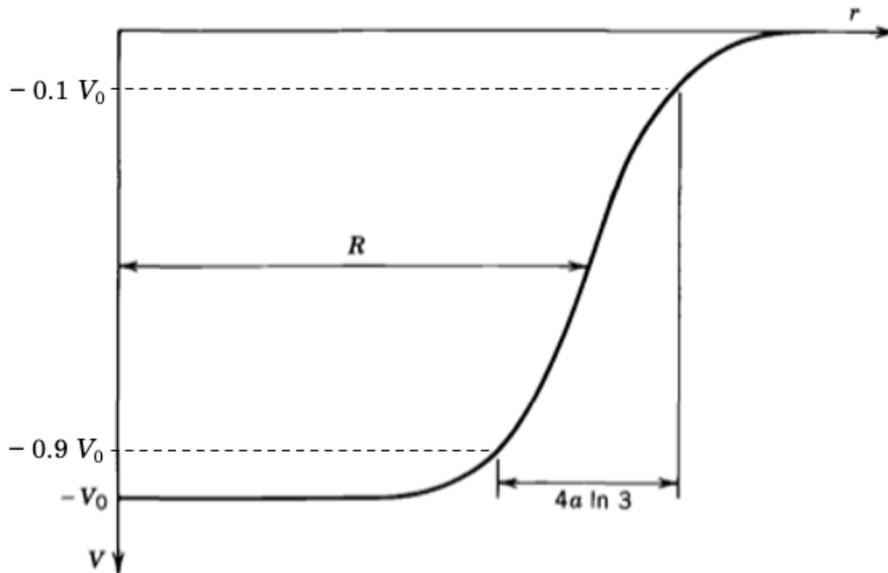


Figura 3.7: Potenziale di tipo Saxon-Woods per il modello a shell.

I parametri R ed a sono rispettivamente il raggio medio e lo spessore di pelle, e i loro valori sono scelti in accordo con quanto visto per la densità dei nucleoni in un nucleo: $R \simeq 1.25 \times A^{1/3}$ fm ed $a = 0.524$ fm. La profondità $|-V_0|$ è scelta in modo da dare le corrette separazioni energetiche, ed è dell'ordine di 50 MeV. I livelli energetici che ne risultano sono mostrati a sinistra in figura 3.8.

L'effetto di questo potenziale, rispetto all'oscillatore armonico, è di rimuovere la degenerazione in ℓ per le shell principali. Salendo in energia però, lo *splitting* diventa sempre più forte fino ad essere dello stesso ordine delle spaziature fra i livelli dell'oscillatore armonico.

Riempiendo ordinatamente le shell con $2(2\ell + 1)$ nucleoni si ottengono i primi tre numeri magici, 2, 8 e 20, ma non quelli successivi.

L'aggiunta di un contributo di *spin-orbita* porta ad ottenere la corretta struttura di sub-shell e come evidenziato a destra in figura 3.8 si ritrova la serie completa di numeri magici. Non si tratta però in questo caso di un'interazione di *spin-orbita* dovuta, come nel caso atomico, ad accoppiamenti di origine elettromagnetica, che darebbero contributi troppo deboli per giustificare l'entità dello *splitting* tra i livelli nucleari.

Il contributo potenziale di *spin-orbita* ha una forma del tipo

$$V_{so}(r)\ell \cdot \mathbf{s} \quad (3.17)$$

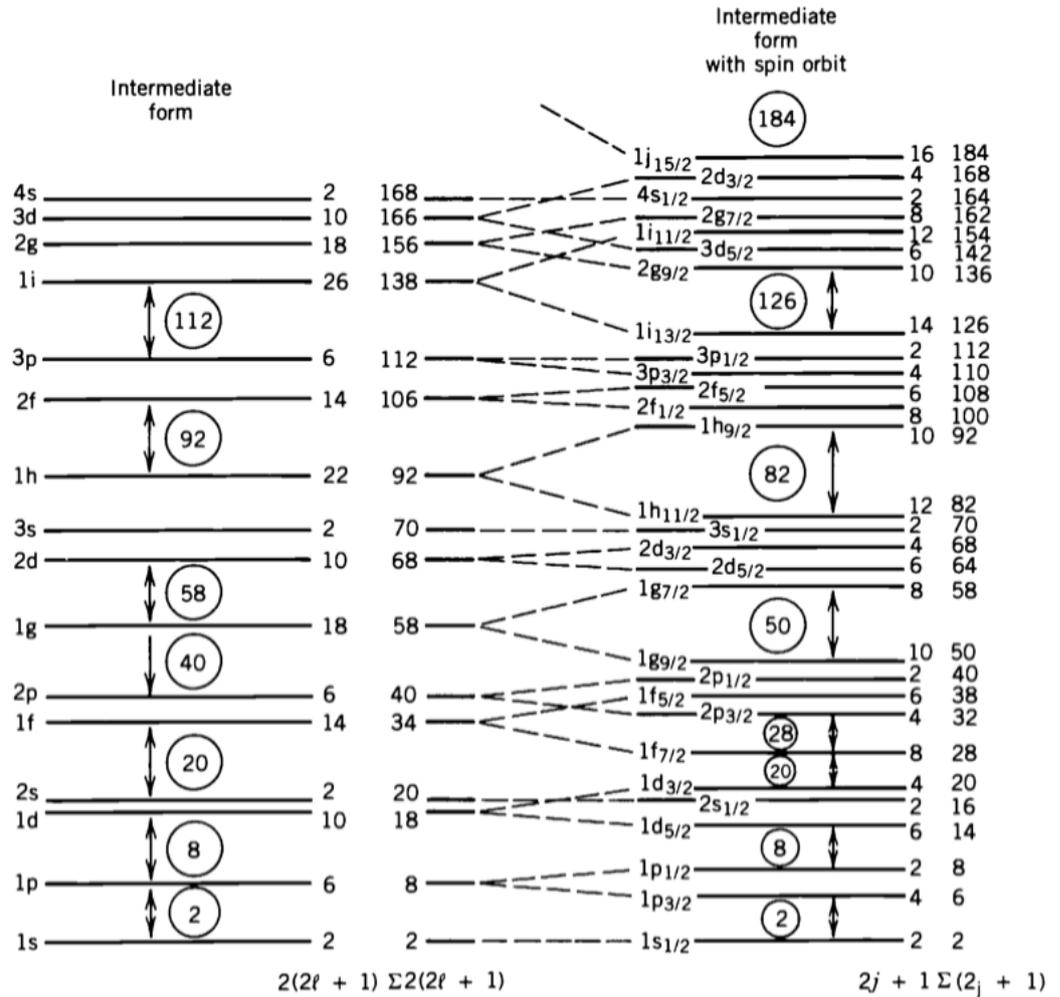


Figura 3.8: A sinistra livelli calcolati col solo potenziale centrale. Per ogni livello il numero di nucleoni che può ospitare e il totale fino a quel livello. A destra effetto del contributo di spin-orbita che separa i livelli con $\ell > 0$. Effetti di shell ben definiti; riprodotta anche la sequenza dei numeri magici.

col termine $\ell \cdot \mathbf{s}$ responsabile del riordinamento dei livelli. Sviluppando infatti $j^2 = (\ell + \mathbf{s})^2$ si ottiene, per i valori d'aspettazione

$$\frac{\langle \ell \cdot \mathbf{s} \rangle}{\hbar^2} = \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2} = \begin{cases} \frac{\ell}{2} & \text{per } j = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{(\ell+1)}{2} & \text{per } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (3.18)$$

da cui una separazione energetica $\Delta E_{\ell s}$ che cresce linearmente col momento angolare ℓ

$$\Delta E_{\ell s} = \frac{2\ell + 1}{2} \langle V_{so}(r) \rangle \quad (3.19)$$

Sperimentalmente si trova V_{so} negativo per cui il livello con $j = \ell + 1/2$ è sempre al di sotto di quello con $j = \ell - 1/2$, contrariamente al caso atomico. Solitamente il numero quantico $j = \ell \pm 1/2$ del momento angolare totale di un nucleone viene denotato con un ulteriore indice: il livello $n\ell_j$ è $(2j + 1)$ volte degenerare.

In figura [3.8](#) è riportata la sequenza di livelli ottenuti a partire da un potenziale somma di un termine di Saxon-Woods e uno di spin-orbita.

La differenza fondamentale fra nucleo e atomo è che in quest'ultimo l'accoppiamento ℓs genera la *struttura fine*, piccole correzioni dell'ordine di α^2 ; nel caso del nucleo invece l'accoppiamento è responsabile di separazioni ampie fra i livelli, confrontabili con le separazioni fra le stesse shell $n\ell$.

3.2.3 Nucleoni di valenza

Nonostante la sua semplicità il modello a shell predice con successo i valori dei livelli energetici, spin e parità di quasi tutti gli stati fondamentali dei nuclei con A dispari, e con successo leggermente minore i valori dei loro momenti di dipolo magnetico e quadrupolo elettrico. Il risultato è ottenuto considerando un modello estremo a particella indipendente. Questo consiste nell'immaginare tutti i nucleoni del nucleo in questione appaiati, tranne quello dipari residuo che viene considerato unico responsabile delle osservate proprietà di quel nucleo.

Si tratta ovviamente di una semplificazione drastica che vedrebbe come passo successivo e più raffinato quello di considerare tutti i nucleoni delle shell non complete come cooperanti a definire le proprietà del nucleo. Considerando ad esempio il ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$, con tre neutroni oltre la shell chiusa $N = 20$, il modello estremo considera il solo 23^{mo} neutrone, mentre quello più completo tutti e tre i neutroni di *valenza* esterni alla shell chiusa con $Z = 20$ ed $N = 20$, come responsabili delle proprietà dello stato fondamentale del ${}^{43}_{20}\text{Ca}_{23}$. Il modello a shell permette anche di calcolare probabilità di transizioni fra stati dovute a decadimenti radioattivi o a reazioni nucleari.

Esso si basa però su un'assunzione cruciale che merita di essere ulteriormente indagata, e cioè che un nucleone si comporti, anche nelle parti più interne di un nucleo, come se si stesse muovendo quasi libero su un orbitale ben definito. Dopotutto molti test del modello a shell coinvolgono proprietà del nucleo, quali spin e momenti elettromagnetici, dipendenti dai soli nucleoni di valenza, che si muovono nella zona più esterna, alla superficie del nucleo. Anche molte sonde sperimentali che sentono l'interazione nucleare hanno contribuito a studiare la zona superficiale dei nuclei. Per indagare speri-

mentalmente l'assunzione fatta ci vuole una sonda che raggiunga la parte più interna di un nucleo ed elettroni di alta energia si prestano bene al caso. La proprietà nucleare che essi permettono di indagare è la densità di carica di un singolo nucleone sulla sua shell, equivalente al modulo quadro della sua funzione d'onda $|\psi|^2$.

Gli stati con una significativa sovrapposizione spaziale con le zone più interne di un nucleo sono quelli s , per gli altri $\psi \rightarrow 0$ con $r \rightarrow 0$. Per l'esperimento si sceglie quindi il ${}^{205}_{81}\text{Tl}_{124}$ cui manca un protone per completare la sub-shell $3s_{1/2}$ al di sotto del numero magico $Z = 82$. Per misurare il contributo alla distribuzione di carica del solo protone $3s_{1/2}$ trascurando i restanti si misura sostanzialmente la differenza fra la distribuzione di carica del ${}^{205}_{81}\text{Tl}_{124}$ e del ${}^{206}_{82}\text{Pb}_{124}$, che ha la shell protonica completa. In figura 3.9 la differenza osservata sperimentalmente fra le due distribuzioni di carica.

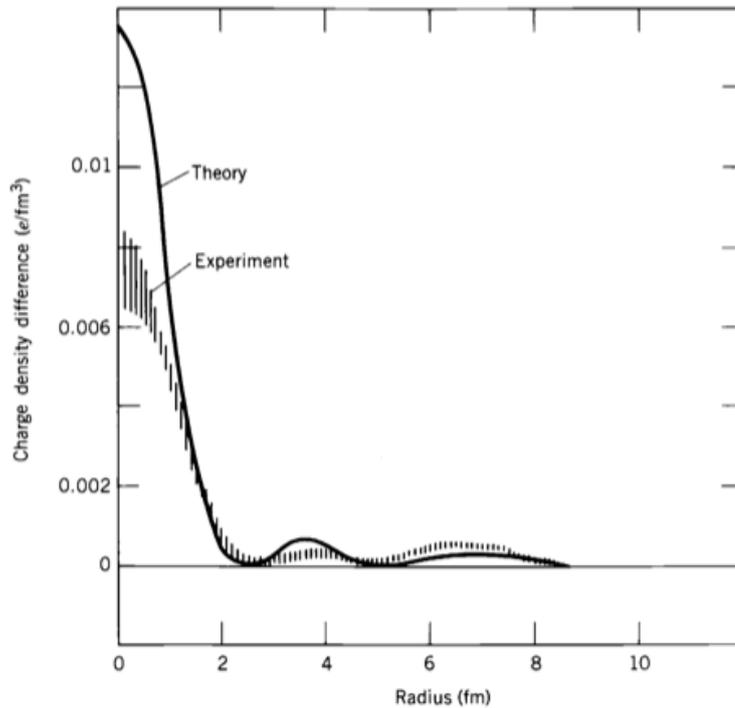


Figura 3.9: Differenza fra distribuzione di carica del ${}^{205}\text{Tl}_{124}$ e del ${}^{206}\text{Pb}_{124}$. I dati sperimentali sono ottenuti da scattering di elettroni; la previsione teorica è il $|\psi|^2$ della funzione d'onda $3s_{1/2}$ dell'oscillatore armonico.

Il risultato sperimentale conferma l'assunzione che le shell nucleoniche mantengano le loro caratteristiche anche nelle parti più interne di un nucleo. Si può quindi considerare la descrizione a nucleone indipendente non solo un comodo modello, ma una valida rappresentazione del comportamento dei nucleoni in un nucleo.

3.2.4 Spin dei nuclei

Ogni sistema fisico ha due contributi possibili di momento angolare, quello orbitale che ha analogo classico, e quello intrinseco o di spin, e ogni momento angolare è quantizzato.

Del momento angolare orbitale ℓ di un sistema fisico si possono conoscere contemporaneamente al più il valore del suo modulo quadrato $|\ell|^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2$ e il massimo valore assumibile dalla sua proiezione ℓ_z lungo una direzione di riferimento convenzionalmente scelta come asse z , $\ell_z = \ell\hbar$, con ℓ intero ≥ 0 . Inoltre ℓ_z può assumere solo i $(2\ell + 1)$ valori, scalati fra loro di un'unità di \hbar che soddisfano $-\ell\hbar \leq \ell_z \leq +\ell\hbar$.

In aggiunta all'eventuale momento angolare orbitale, protoni e neutroni hanno entrambi un momento angolare intrinseco o *spin*, il cui numero quantico associato s , essendo essi fermioni, vale $\pm 1/2$. Lo spin può quindi assumere i soli due stati parallelo o antiparallelo alla direzione di riferimento z ; le componenti s_z valgono $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, mentre il quadrato dello spin vale $s(s + 1)\hbar^2 = 3\hbar^2/4$.

Il momento angolare totale \mathbf{J} di un nucleo è la somma vettoriale dei vari momenti angolari orbitali dei suoi nucleoni e dei loro spin

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^A \boldsymbol{\ell}_i + \sum_{i=1}^A \mathbf{s}_i = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (3.20)$$

\mathbf{J} assume valori pari a un multiplo intero di unità di \hbar per nuclei con A pari e a un multiplo semi-intero di unità di \hbar per nuclei con A dispari, ciò dipendendo dal fatto che solitamente un sistema fisico ha energia minima, ed è quindi più stabile, se i suoi componenti di uno stesso tipo si accoppiano con spin anti-paralleli.

Ogni livello nucleare è caratterizzato dal proprio momento angolare totale \mathbf{J} che in conseguenza dell'isotropia dello spazio è una quantità che si conserva, per cui l'operatore quantistico che lo rappresenta commuta con l'Hamiltoniana e di conseguenza il suo valore può sempre essere determinato assieme a quello dell'energia del livello. Spesso in letteratura ci si riferisce allo "spin" di un nucleo intendendo il suo momento angolare totale \mathbf{J} , e non \mathbf{S} .

Ogni misura di \mathbf{J} dá risultati coerenti con le regole illustrate e ciò costituisce una delle ragioni che hanno portato ad escludere gli elettroni quali componenti dei nuclei. Si trova infatti ad esempio che ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{14}\text{N}$ hanno tutti spin pari ad \hbar , quindi in accordo con la regola indicata, avendo un numero pari di nucleoni componenti. Se tali nuclei fossero costituiti da protoni ed elettroni, il numero dei costituenti sarebbe dispari per rendere conto della loro carica elettrica, e conseguentemente il loro spin totale sarebbe un multiplo dispari di $\hbar/2$, contrariamente all'evidenza sperimentale.

Lo spin dello stato eccitato di un nucleo può, per i modi in cui si combina-

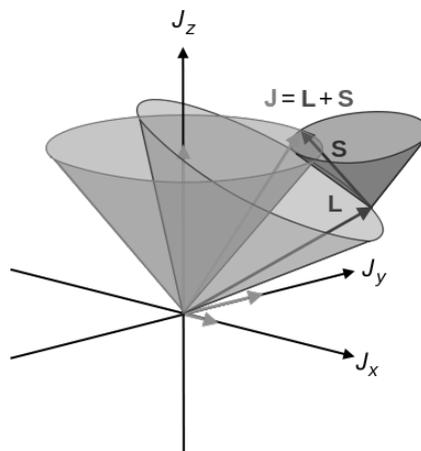


Figura 3.10: Momento angolare totale $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

no entrambi le tipologie di contributi, differire dal valore che caratterizza lo stato fondamentale del nucleo stesso; un qualunque effetto può modificare lo spin di un multiplo intero di \hbar , quindi se gli spin di un nucleo differiscono fra stati eccitati e stato fondamentale dello stesso nucleo, lo fanno per multipli interi di \hbar .

La maggior parte delle misure di spin nucleari si basa sulla cosiddetta quantizzazione spaziale del momento angolare. Assegnata una direzione di riferimento, quale può essere ad esempio quella di un campo elettrico o magnetico esterno al nucleo, il momento angolare \mathbf{J} del nucleo potrà orientarsi nello spazio soltanto secondo $(2J + 1)$ diverse direzioni, rispetto a quella di riferimento assegnata. La componente dello spin lungo la direzione di riferimento in ognuno di questi stati vale $m\hbar$, dove m , detto *numero quantico magnetico*, è un intero o un semi-intero qualsiasi della sequenza $-J, -J + 1, \dots, +J - 1, +J$.

Per un nucleo, la gran parte degli effetti osservabili dovuti allo spin sono legati al suo momento magnetico. Le $(2J + 1)$ possibili orientazioni del momento magnetico di un nucleo rispetto a un campo magnetico di riferimento danno luogo a $(2J + 1)$ diversi valori energetici che possono essere osservati e misurati in svariati modi: studiando la struttura iperfina degli spettri atomici, o gli spettri rotazionali di molecole biatomiche composte da atomi uguali, per le quali lo spin determina in modo univoco l'intensità relativa delle righe spettrali, o mediante spettroscopia delle microonde.

Sperimentalmente si trova che tutti i nuclei con Z ed N pari, e quindi anche A pari, hanno $J = 0$, mentre non è così per i nuclei con A pari ma Z e N dispari. I nuclei stabili dispari-dispari sono solo quattro, ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$ e ${}^{14}\text{N}$. Altri quattro hanno vita media molto lunga, dell'ordine dei milioni di anni, ${}^{40}\text{K}$, ${}^{50}\text{V}$, ${}^{138}\text{La}$ e ${}^{176}\text{Lu}$; quest'ultimo, con vita media di 3.78×10^{10} anni, è utilizzato nella datazione delle meteoriti ed è fra l'altro il nucleo col maggior

valore di spin: $J = 7$.

Per la gran parte dei nuclei i valori dello spin sono piccoli, di valore intero compreso fra $J = 1$ e $J = 7$ per i nuclei dispari-dispari, e di valore semi-intero compreso fra $J = 1/2$ e $J = 9/2$ per i nuclei con A dispari. Questo indica una caratteristica dell'interazione fra nucleoni che si manifesta come tendenza a *posizionarsi* nel nucleo in modo da ridurre, per quanto possibile, lo spin totale risultante dando luogo a strutture più legate, e ricorda quanto fanno gli elettroni di un atomo nel riempire le shell atomiche.

3.2.5 Parità e nuclei

Si ricordino dapprima, senza dimostrazione, alcune proprietà della *parità*. Nel caso di un potenziale centrale, quindi descritto da una funzione pari, anche la relativa Hamiltoniana è pari e le funzioni d'onda degli stati associati hanno parità definita $P = (-1)^\ell$.

Più generalmente si trova che se l'Hamiltoniano di un sistema è pari allora la parità delle funzioni d'onda degli stati associati è definita.

In conseguenza di ciò si possono misurare contemporaneamente l'energia E di uno stato, in particolare di un livello nucleare, e la sua parità P , che può valere $+1$ o -1 , e tale parità si conserva nel tempo se tutte le interazioni sono pari, ovvero conservano esse stesse la parità.

Per uno stato puro, ovvero a parità definita, la densità di probabilità è sempre pari.

Un vettore è una quantità dispari, nel senso che cambia verso se si cambia il segno di tutte le sue componenti. Uno pseudovettore è una quantità con le stesse proprietà di rotazione di un vettore, ma che non cambia verso se si cambia il segno di tutte le sue componenti, come avviene ad esempio per il prodotto vettoriale, quindi è pari.

L'impulso e l'operatore quantistico associato sono quantità con caratteristiche vettoriali, quindi "dispari"

$$\mathbf{p}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{p}(\mathbf{r}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial(-\mathbf{r})} = -\frac{\partial}{\partial(\mathbf{r})} \quad (3.21)$$

L'energia cinetica, essendo proporzionale al quadrato dell'impulso, è pari e così anche per l'operatore quantistico ad essa associato.

Il momento angolare, essendo ottenuto tramite un prodotto vettoriale fra due vettori, è uno pseudovettore, ed è quindi pari, come l'operatore quantistico ad esso associato.

Il momento di dipolo elettrico invece, che è omogeneo a un vettore, è dispari: $\mathbf{D}(-\mathbf{r}) = -\mathbf{D}(\mathbf{r})$.

Il momento di dipolo magnetico, omogeneo a uno pseudovettore, è pari.

In base a quanto detto per l'impulso, l'energia cinetica e il momento angolare, si può affermare che se di uno stato di cui si conosca l'energia si misura il momento angolare, allora se ne può contemporaneamente misurare anche

la parità, dato che i relativi operatori commutano. Ciò non si può invece fare con l'impulso, in quanto i relativi operatori non commutano.

Uno stato nucleare può quindi essere caratterizzato dalla contemporanea conoscenza di *energia*, *momento angolare* e *parità*. Ci si riferisce alla contemporanea indicazione dei valori di momento angolare J e parità P con il simbolo J^P .

Dai risultati sperimentali si sa che le forze nucleari conservano la parità, per cui un livello nucleare ha parità ben definita e questo ha conseguenze importanti sui suoi possibili momenti angolari orbitali. Il suo momento angolare J può infatti corrispondere a diversi valori del momento angolare orbitale L . Essendo questo associato a una parità positiva per L pari e negativa per L dispari, ne risulta che si possono avere eventuali mescolanze fra momenti angolari orbitali o solamente con L pari o solamente con L dispari.

Si veda ad esempio il deutone 2H : esso è costituito da un protone e un neutrone legati, il cui stato fondamentale ha un'energia di legame di circa 2.225 MeV, un momento angolare totale pari a $J = 1$, con i due nucleoni in uno stato di tripletto con $S = 1$ e di conseguenza ha momento angolare orbitale $L = 0$ (onda S), come si deduce dalla misura del suo momento di dipolo magnetico, pari a $0.857 \mu_N$, che corrisponde circa alla somma di quelli del protone e del neutrone. Siccome però si trova sperimentalmente che il deutone ha anche un momento non nullo di quadrupolo elettrico, pari a $2.82 \times 10^{-31} \text{ m}^2/e$, ciò significa che il suo stato fondamentale non può essere considerato un puro stato in onda S , che sarebbe sfericamente simmetrico e quindi compatibile con un momento di quadrupolo elettrico nullo⁴, ma dovrà essere una mescolanza con altri momenti angolari orbitali. Per rispondere a quali possano essere questi ultimi che concorrono allo stato fondamentale del deutone si consideri che deve valere

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad , \quad \text{con} \quad \mathbf{S} = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{J} = 1 \quad (3.22)$$

e questo è possibile per $L = 0$, $L = 1$ (onda P) ed $L = 2$ (onda D). Ma l'onda P ha parità opposta a quella delle onde S e D , quindi se ne deduce, come verificato sperimentalmente, che la mescolanza può sussistere solo fra onda S e onda D ⁵.

3.2.6 Momenti elettrici e magnetici dei nuclei

Buona parte di quanto si sa della struttura nucleare deriva dallo studio di come i nuclei interagiscano elettromagneticamente.

La forza nucleare determina sostanzialmente distribuzione e moto dei nucleoni nel nucleo e se per sondarli si utilizzano interazioni elettromagnetiche, che

⁴Vedi paragrafo [3.2.6](#)

⁵Sul deutone si vedano anche i paragrafi [11.1.1](#) e [11.1.2](#)

hanno effetti più deboli dell'ambiente *nucleare* circostante, si ha una discreta garanzia di non distorcere significativamente le caratteristiche di quanto si sta misurando.

Ogni distribuzione di cariche o correnti è sorgente di campi elettrici e magnetici la cui forma e intensità dipendono anche dalla distanza dalla sorgente. Abitualmente si associano alle distribuzioni di cariche e correnti dei *momenti di multipolo* per ogni specifica distribuzione spaziale: la proporzionalità $1/r^2$ del campo elettrico deriva dalla carica totale della sorgente e gli si assegna il momento d'ordine zero o *monopolo*; la proporzionalità $1/r^3$ deriva dal momento d'ordine uno o *dipolo*; la proporzionalità $1/r^4$ deriva dal momento d'ordine due o *quadrupolo*, e così via.

Per i momenti magnetici le cose sono simili con l'eccezione del momento di ordine zero, il monopolo magnetico, che sembra non esistere, e quindi non vi sono contributi di momento magnetico proporzionali a $1/r^2$.

La natura marcatamente quantistica d'un nucleo fa sì che i momenti di multipolo diventino delle osservabili per le quali si possono calcolare i valori d'aspettazione associati ai diversi stati di un nucleo.

Classicamente una distribuzione di carica a simmetria sferica genera solo il campo monopolare coulombiano e i multipoli d'ordine superiore sono tutti nulli.

Una corrente che si sviluppi su un percorso piano-circolare genera solo un campo magnetico dipolare.

È poi ragionevole pensare che i nucleoni di un nucleo si aggregino a formare il nucleo in una struttura che se non eccitata, nel rispetto dell'interazione nucleare, tende a una distribuzione e forma il più possibile simmetriche, quindi per quanto possibile prossima a quella sferica, ed è per questo che in molti casi è sufficiente misurare e calcolare soltanto i multipoli d'ordine più basso per caratterizzare le proprietà elettromagnetiche di un nucleo. Questo porta a immaginare che le proprietà multipolari d'ordine superiore di un nucleo possano essere ascritte alla presenza in esso di nucleoni spaiati.

Un ulteriore vincolo all'insorgere di momenti di multipolo nei nuclei è legato alle loro proprietà di simmetria e alla parità dei loro stati. Ogni momento di multipolo elettromagnetico ha una definita parità, determinata dal comportamento dell'operatore associato quando si considera la trasformazione $r \rightarrow -r$, e bisogna tenerne conto per la compatibilità con la parità degli stati del nucleo.

La parità dei momenti elettrici è data da $(-1)^\ell$, dove ℓ rappresenta l'ordine del momento di multipolo ($\ell = 0$ per il monopolo, $\ell = 1$ per il dipolo, ...). La parità dei momenti magnetici è invece data da $(-1)^{\ell+1}$.

Per calcolare il valore d'aspettazione di un operatore *momento di multipolo* \mathcal{O} , si effettua un integrale del tipo

$$\int \psi^*(\mathbf{r}) \mathcal{O} \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.23)$$

Se le forze in gioco conservano la parità, allora in un sistema descritto da una funzione d'onda ψ non degenera, la parità della stessa è ininfluente e si ha che $\psi^*\psi = |\psi|^2$ è pari. Se però \mathcal{O} è un operatore dispari allora tutto l'integrando è una funzione dispari, per cui l'integrale si annulla. Questo porta ad affermare che *in un nucleo tutti i momenti di multipolo statico con parità dispari devono essere nulli*, quindi il dipolo elettrico, il quadrupolo magnetico, l'ottupolo elettrico,

L'evidenza sperimentale dell'assenza di momenti di dipolo elettrici per i nuclei, porta dunque a concludere che le forze nucleari conservano la parità.

Il fatto che a meno di possibili piccole influenze dovute all'interazione debole che può introdurre nell'Hamiltoniana termini che non conservano la parità, gli stati nucleari abbiano parità definita, è però di per sé una condizione solo sufficiente all'annullarsi dei momenti di multipolo elettrico d'ordine dispari; si può infatti provare che il momento di dipolo elettrico di un nucleo si annulla anche se tutti i moti interni soddisfano l'*inversione temporale*.

I primi tre momenti di multipolo nucleari non nulli sono quelli significativi dal punto di vista sperimentale.

- Il momento di multipolo elettrico corrisponde alla carica nucleare Ze .
- Il successivo momento non nullo è quello dipolo magnetico μ . Considerata una corrente I che si sviluppa lungo una traiettoria piana circolare di area A , gli si associa un momento magnetico di modulo $|\boldsymbol{\mu}| = IA$, e se essa è dovuta a una particella di massa M e carica e che ruota con velocità di modulo v su una traiettoria circolare di raggio r , con periodo $T = 2\pi r/v$, allora

$$|\boldsymbol{\mu}| = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2M} |\boldsymbol{\ell}| \quad (3.24)$$

con $\boldsymbol{\ell}$ il momento angolare classico. Quantisticamente si definisce l'osservabile momento magnetico quella associata alla massima componente di $\boldsymbol{\ell}$, e si scrive la forma quantistica di μ sostituendo $\boldsymbol{\ell}$ nella 3.24 col suo valore d'aspettazione relativo alla direzione lungo la quale la sua proiezione è massima, ovvero pari ad $m_\ell \hbar$ con $m_\ell = +\ell$

$$\mu = \frac{e\hbar}{2M} \ell \quad (3.25)$$

con ℓ numero quantico del momento angolare orbitale.

La quantità $e\hbar/2M$ è detta *magnetone elementare* e nel caso atomico si pone $M = m_e$, ottenendo il magnetone di Bohr μ_B , mentre nel caso nucleare si pone $M = m_p$, ottenendo il magnetone nucleare μ_N .

Il fatto che $\mu_N/\mu_B \ll 1$ giustifica che in molte circostanze gli effetti derivanti dal magnetismo atomico siano preponderanti rispetto a quelli del magnetismo associato ai nuclei.

La [3.25](#) può essere scritta $\mu = g\ell\mu_N$ con $g\ell$ che vale 1 per i protoni e 0 per i neutroni.

I nucleoni hanno anche un momento angolare intrinseco di spin cui è associato un momento magnetico intrinseco, che non ha analogo classico, ma può essere scritto come $\mu = g_s s \mu_N$ con $s = 1/2$ e g_s il cosiddetto *fattore di spin*, che per l'equazione di Dirac dovrebbe coincidere con 2 per particelle puntiformi prive di struttura interna.

Ciò è molto ben verificato per l'elettrone, mentre i valori misurati sperimentalmente su nucleoni liberi sono $g_s = 5.5857$ per il protone, e $g_s = -3.8261$ per il neutrone.

Questo è un indizio imprescindibile che protoni e neutroni non sono assimilabili a particelle elementari, ma hanno una struttura costitutiva e non sono puntiformi.

Tabella - Dipolo magnetico di nuclei nello stato fondamentale

Nuclide	μ (μ_N)
n	-1.9130418
p	+2.7928456
${}^2\text{H}$ (D)	+0.8574376
${}^{17}\text{O}$	-1.89379
${}^{57}\text{Fe}$	+0.09062293
${}^{57}\text{Co}$	+4.733
${}^{93}\text{Nb}$	+6.1705

Si è accennato che i nucleoni in un nucleo interagiscono in modo da accoppiarsi favorendo quanto più possibile una condizione di massima energia di legame per il nucleo stesso, e questo corrisponde al fatto che gli accoppiamenti tendono a determinare per ogni nucleo un momento angolare orbitale totale e di spin totale, quanto più possibile prossimi a zero.

Questo porta a dedurre che i nucleoni accoppiati non danno contributo al momento magnetico che deriva sostanzialmente solo dagli eventuali "pochi" *nucleoni di valenza*, ovvero disaccoppiati, presenti.

Queste osservazioni sono suffragate dai risultati sperimentali che mostrano come la gran parte dei nuclei abbia valori contenuti del momento di dipolo magnetico; il valore più alto è quello del ${}^{93}\text{Nb}$, leggermente superiore a 6 magnetoni nucleari.

- Proseguendo nella ricerca dei momenti di multipolo non nulli si trova il *momento di quadrupolo elettrico*. L'espressione classica per il momen-

to di quadrupolo elettrico eQ associato a una carica puntiforme e , posta a distanza r dall'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y, z) , e riferito all'asse z , è data da

$$eQ = e(3z^2 - r^2) \quad (3.26)$$

Se nel nucleo c'è un nucleone spaiato che però si muove in modo sfericamente simmetrico, per cui in media si ha $x^2 = y^2 = z^2 = r^2/3$, allora il momento di quadrupolo elettrico risulta nullo.

Se si immagina che il nucleone si muova lungo un'orbita piana *classica* giacente sul piano $(x; y)$, allora si ha $z = 0$ e $Q = -r^2$.

L'osservabile momento di quadrupolo elettrico in meccanica quantistica è definita come

$$eQ = e \int \psi^*(\mathbf{r}) (3z^2 - r^2) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (3.27)$$

se quindi il nucleone spaiato è un neutrone, il suo contributo al momento di quadrupolo elettrico del nucleo è nullo.

Se $|\psi|^2$ ha simmetria sferica, quindi con $|\mathbf{J}| = 0$, allora $Q = 0$, come nel caso classico.

Quantisticamente si trova che $Q = 0$ anche per $|\mathbf{J}| = 1/2$ ⁶.

Se $|\psi|^2$ è concentrata nel piano $(x; y)$, ovvero $(z \simeq 0)$, allora si ha che $Q \sim -\langle r^2 \rangle$, con $\langle r^2 \rangle$ il raggio quadratico medio dell'orbita, e si ha una deformazione "oblata" della distribuzione di carica.

Se invece $|\psi|^2$ è concentrata lungo l'asse z , quindi $(z \simeq r)$, si trova $Q \sim +2\langle r^2 \rangle$, e si ha una deformazione "prolata" della distribuzione di carica.

Considerare il termine d'accoppiamento risulta anche in questo caso utile in quanto si può assumere che nucleoni accoppiati che si muovono nel nucleo in modo sfericamente simmetrico non contribuiscano a Q . Si può dunque immaginare che per nuclei che soddisfino questa simmetria strutturale il momento di quadrupolo elettrico possa essere stimato tenendo conto della presenza di un eventuale nucleone spaiato, detto anche di valenza, che si muova in prossimità della superficie di un core quasi sferico costituito dagli altri $A - 1$ nucleoni accoppiati, quindi a distanza $R = R_0 A^{1/3}$ dal centro, il che porta a stimare il momento di quadrupolo come

$$|eQ| \leq e R_0^2 A^{2/3} \quad (3.28)$$

Calcolando $|eQ|$ si trova che esso varia da circa $6 \times 10^{-30} e \cdot m^2$, per i nuclei leggeri, fino a circa $40 \times 10^{-30} e \cdot m^2$ per i nuclei più pesanti. Introducendo il *barn*, con $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$, si trova quindi che i valori

⁶Si veda l'Appendice ??

calcolati secondo il semplice modello proposto soddisfano la condizione $0.06 e \cdot b \leq |eQ| \leq 0.4 e \cdot b$.

Le misure sperimentali mostrano che molti nuclei hanno valori di $|eQ|$ compresi entro questo intervallo, nonostante ve ne siano alcuni, soprattutto fra le terre rare, che se ne discostano anche significativamente, indicando che in quei casi il modello a nucleone spaiato singolo non riesce a spiegare i grandi valori misurati per il momento di quadrupolo elettrico. Quindi l'assunzione che i nuclei siano costituiti da un core a simmetria sferica di nucleoni appaiati, più un eventuale nucleone spaiato, non è valida per tutti i nuclei; in certi casi anche il *core* può presentarsi con una simmetria non sferica.

Nella tabella che segue sono riportati i valori dei momenti di quadrupolo di alcuni nuclei nel loro stato fondamentale.

Tabella - Quadrupolo elettrico di alcuni nuclei nello stato fondamentale.

Nuclide	Q (barn)
^2H (D)	+0.00288
^{17}O	-0.02578
^{59}Co	+0.40
^{63}Cu	-0.209
^{133}Cs	-0.003
^{161}Dy	+2.4
^{179}Lu	+8.0
^{209}Bi	-0.37

3.2.7 Misure dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei

Nei nuclei ci sono quindi neutroni e protoni in movimento che danno luogo a densità di massa, di carica e di correnti. Nell'ipotesi che i campi elettrici e magnetici esterni in cui un nucleo si trova non perturbino le sue distribuzioni interne di cariche e correnti, l'energia globale del nucleo dipende anche dall'interazione dei suoi momenti elettrici e magnetici con questi campi esterni. I campi esterni elettrici e magnetici possono essere quelli dovuti agli elettroni dell'atomo e/o della molecola cui il nucleo appartiene, o altri prodotti ad hoc.

I campi magnetici dovuti agli elettroni atomici sono orientati lungo la direzione del momento angolare totale dell'atomo. Anche il momento angolare e il momento magnetico del nucleo sono orientati lungo una stessa direzione, che non potrà però mai allinearsi esattamente alla precedente, per il principio di indeterminazione.

Campi magnetici ad hoc possono essere generati e controllati, ma non superano intensità massime dell'ordine di poche decine di Tesla; quelli generati dagli elettroni atomici sono noti con minor precisione, ma possono essere molto più intensi. Le energie d'interazione con i momenti elettrici e magneti-

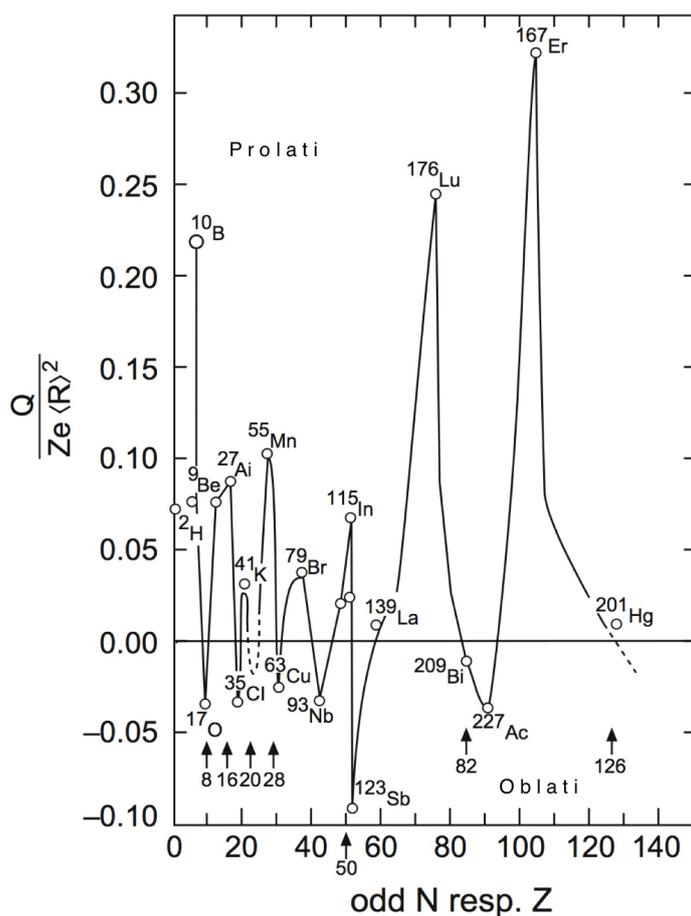


Figura 3.11: Q_{rid} di nuclei con A dispari in funzione di N . Il tratto continuo interpola i dati misurati, di cui è mostrato solo un sottoinsieme. I nuclidi con $Q_{rid} < 0$ assumono forme oblate, quelli con $Q_{rid} > 0$ forme prolate.

ci nucleari perturbano i livelli di atomi e/o molecole generando la cosiddetta *struttura iperfine* delle linee spettrali atomiche o molecolari, la cui analisi sperimentale permette di effettuare misure dei momenti nucleari [7].

Misure del momento d_n di dipolo elettrico del neutrone danno un limite superiore $(d_n/e) < 3 \times 10^{-28}$ m, con e la carica elementare.

I valori dei momenti di quadrupolo elettrico misurati per i nuclidi sono compresi fra +8 barn del ^{176}Lu e -1.0 barn del ^{123}Sb .

⁷Se ne veda un esempio in Appendice [D]

Introducendo la quantità

$$Q_{rid} = \frac{Q}{Ze \langle R \rangle^2} \quad (3.29)$$

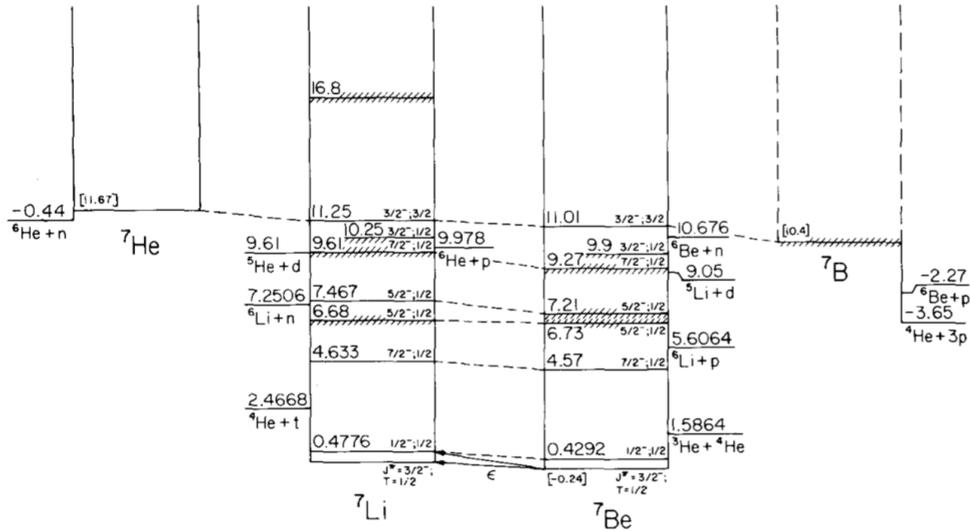
detta *momento di quadrupolo ridotto* e dove $\langle R \rangle$ è una sorta di raggio medio della distribuzione di carica, si agevola il confronto fra le entità delle deformazioni nucleari in funzione dei diversi numeri di massa.

Osservando in figura 3.11, la distribuzione dei momenti di quadrupolo elettrico ridotto di nuclei con A dispari, graficati in funzione del valore di N , si nota che il Q_{rid} dei nuclei con Z dispari e N pari dipende essenzialmente dal numero di protoni, mentre quello dei nuclei con Z pari ed N dispari dipende in segno dal numero di protoni e in valore assoluto dal numero di neutroni. Inoltre Q_{rid} cambia bruscamente valore tra coppie di nuclei adiacenti a nuclei con valori di Z ed N espressi da: $Z^*, N^* = 2, 8, 20, 50, 82, 126$, ovvero i *numeri magici* già incontrati nel paragrafo 1.4.

3.2.8 Isospin

Gli esperimenti di diffusione su nuclei a bassa energia hanno messo in evidenza la stretta somiglianza tra le forze *neutrone – protone* e quelle *protone – protone*, così come anche l'analisi delle proprietà dei nuclei speculari, quali ${}^3\text{H}$ ed ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}$ e ${}^7\text{Be}$, ...

Le forze coulombiane sono diverse nei nuclei speculari, ma a parte questo i livelli energetici di nuclei speculari mostrano una considerevole somiglianza, come si osserva nelle figure 3.12 e 3.13.



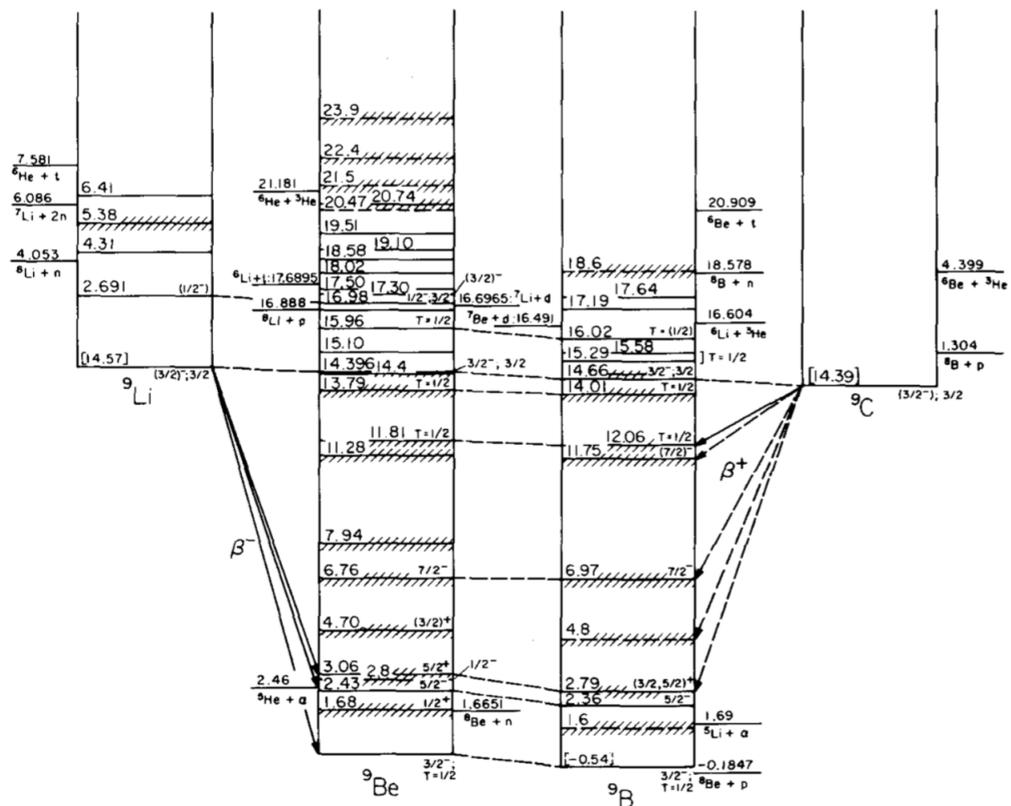


Figura 3.13: Livelli energetici dei nuclei speculari ${}^9\text{Li}$, ${}^9\text{C}$, e ${}^9\text{Be}$, ${}^9\text{B}$.

I nuclei speculari con $N = Z \pm 1$ hanno oltretutto masse molto simili, a meno del contributo dovuto alle diverse energie elettrostatiche; la loro differenza in massa, a meno del termine c^2 , è infatti espressa da

$$\Delta M = \frac{3}{5} \frac{2(2Z-1)}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0 A^{1/3}} \quad (3.30)$$

come si deduce dal termine coulombiano della formula semi-empirica di Weizsäcker [2.50](#).

Per la precisione, la somiglianza fra i livelli dei nuclei speculari del tipo $N = Z \pm 1$ suggerisce soltanto che vi sia *simmetria di carica*, ovvero sostanziale equivalenza tra le forze $n-n$ e quelle $p-p$. L'equivalenza più completa appare evidente analizzando anche nuclei con A pari quali ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{Be}$, ${}^8\text{Li}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^8\text{B}$, o ${}^{14}\text{C}$, ${}^{14}\text{N}$ e ${}^{14}\text{O}$, di cui si vedono alcuni livelli nelle figure [3.14](#) e [3.15](#). Le differenze tra i livelli si spiegano pressochè totalmente in base agli effetti coulombiani. Questi risultati suggerirono a Heisenberg, Coudon e Cassen, nel 1932, che le forze nucleari debbano essere considerate indipendenti dalla carica elettrica e che quindi, tolto l'effetto coulombiano, le interazioni fra $n-p$, $p-p$ e $n-n$, siano uguali (si trascura comunque,

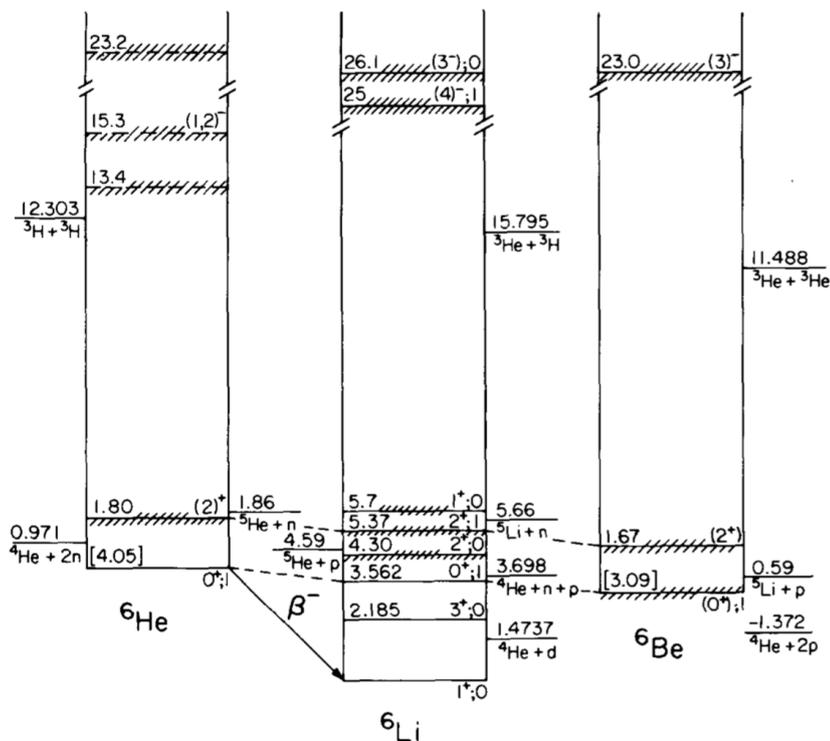


Figura 3.14: Livelli energetici dei nuclei ${}^6\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^6\text{Be}$.

ad esempio, quanto dipende dalla leggera differenza in massa tra protone e neutrone). Questa ipotesi è più forte della pura simmetria di carica ma non dice nulla circa le forze $n - p$.

Per sfruttare le conseguenze di quest'ipotesi si è introdotto il formalismo dello *spin isotopico* che assegna a ogni nucleone un ulteriore grado di libertà cui corrisponde una variabile detta *isospin* I o *spin isotopico*, che può assumere soltanto due valori, ed è dunque dicotomica, dovendosi limitare a differenziare tra protone e neutrone. Disponendo già di un modello di variabili dicotomiche per lo spin ordinario dei fermioni, se ne mutua in questo caso la struttura algebrica.

Partendo da un esempio specifico di nuclei speculari si presentano ora alcune caratteristiche della simmetria di isospin per i nuclei.

In figura 3.15 sono riportati i diagrammi dei livelli energetici di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$, assieme a quelli di ${}^{14}_7\text{N}_7$.

Sono evidenti le somiglianze fra i livelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$, sia per i numeri quantici J^P che nelle spaziature relative dei rispettivi livelli. Le piccole differenze residue e la traslazione globale quasi rigida dei livelli di ${}^{14}_8\text{O}_6$ a valori superiori rispetto a quelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$, sono spiegabili con i diversi contributi coulombiani all'energia per i due nuclei.

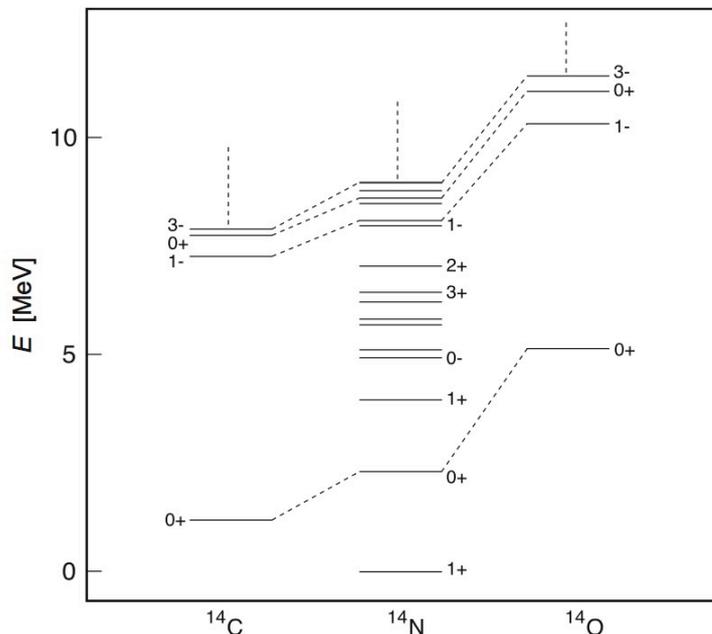


Figura 3.15: Livelli energetici dei nuclei speculari ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$.

Livelli energetici equivalenti a quelli di ${}^{14}_6\text{C}_8$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$ sono presenti anche nell'isobaro ${}^{14}_7\text{N}_7$, che possiede però anche altri livelli che non trovano corrispondenza con quelli dei due nuclei adiacenti. Si può distinguere fra stati di *tripletto* e stati di *singoletto*.

Questi *multipletti* di stati mostrano una chiara analogia formale con i multipletti degli accoppiamenti di spin. Protoni e neutroni possono quindi, come suggerito da Heisenberg nel 1932, essere visti come due diversi stati di una medesima entità, il *nucleone*, e formano un doppietto di isospin ($I = 1/2$), per le cui terze componenti si pone

$$\begin{cases} \text{protoni:} & I_3 = +1/2 \\ \text{neutroni:} & I_3 = -1/2 \end{cases} \quad (3.31)$$

Essi sono quindi autostati degli operatori I^2 e I_3

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

La sostanziale indipendenza dell'interazione nucleare dalla carica elettrica si traduce così in una legge di conservazione, ovvero una proprietà di simmetria per cui

- l'isospin si conserva nelle interazioni nucleari;

- l'hamiltoniana d'interazione nucleare commuta con l'operatore di isospin ed è invariante per le trasformazioni generate da \mathbf{I} , cioè le rotazioni nello spazio dell'isospin.

La carica elettrica q_N di un nucleone è legata alla sua terza componente dell'isospin dalla relazione

$$q_N = 1/2 + I_3 \quad (3.33)$$

per cui la conservazione della carica elettrica comporta la conservazione della terza componente I_3 dell'isospin.

La conservazione dell'isospin \mathbf{I} , ovvero l'indipendenza dalla carica elettrica, ha un valore più forte della semplice conservazione della carica elettrica.

Si ricordi comunque che l'isospin è un numero quantico *adimensionale*.

La trattazione formale dell'isospin corrisponde così a quella del momento angolare per cui si può ad esempio avere il caso di una coppia protone-neutrone in uno stato di isospin totale pari ad 1 o a 0.

La terza componente dell'isospin è additiva e per un nucleo si ha

$$I_3^{nucleo} = \sum I_3^{nucleoni} = \frac{Z - N}{2} \quad (3.34)$$

Questo aiuta nel descrivere gli stati simili che compaiono in figura [3.15](#) assegnando rispettivamente $I_3 = -1$, al nucleo ${}^{14}_6\text{C}_8$, e $I_3 = +1$, al nucleo ${}^{14}_8\text{O}_6$; il loro isospin non può quindi essere minore di $I = 1$, per cui gli stati in questi nuclei appartengono necessariamente a un tripletto di stati simili nei nuclei ${}^{14}_6\text{C}_8$, ${}^{14}_7\text{N}_7$ e ${}^{14}_8\text{O}_6$. Siccome però la terza componente I_3 dell'isospin di ${}^{14}_7\text{N}_7$ è pari a 0, ne deriva che questo nucleo può possedere stati addizionali con isospin $I = 0$.

L'azoto ${}^{14}_7\text{N}_7$ è il più stabile isobaro con $A = 14$ e quindi il suo stato fondamentale è necessariamente un singoletto di isospin, perchè se non fosse così ${}^{14}_6\text{C}_8$ dovrebbe possedere uno stato analogo che però, per la minor repulsione coulombiana, dovrebbe essere a un'energia inferiore e quindi più stabile.

In figura [3.15](#) non sono mostrati stati con $I = 2$, che dovrebbero in linea di principio avere stati analoghi in ${}^{14}_5\text{B}_9$ e ${}^{14}_9\text{F}_5$. Questi nuclei sono però molto instabili e i loro livelli stanno oltre il limite energetico mostrato in figura [3.15](#).

Gli isobari di $A = 14$ sono nuclei in cui l'effetto dell'energia coulombiana non è particolarmente intenso. L'influenza dell'energia coulombiana cresce al crescere del numero atomico Z , perturbando sempre più le caratteristiche di simmetria di isospin.

L'isospin è un buon numero quantico per la descrizione dei processi dinamici coinvolgenti le interazioni forti, nel corso dei quali appunto, l'isospin del sistema si conserva.

Capitolo 4

Instabilità dei nuclei

Le specie nucleari oggi note sono circa 3300: 254 sono i nuclidi naturali stabili, 85 quelli naturali instabili, i restanti sono radionuclidi prodotti artificialmente. Degli 85 nuclidi naturali instabili 32 sono ritenuti *primordiali*, mentre gli altri si sono formati attraverso reazioni e decadimenti nucleari spontanei nel corso dei miliardi di anni di vita dell'universo.

L'uranio ${}_{92}^{238}\text{U}$ è il nucleo con i valori maggiori di A e Z spontaneamente presente in natura. I nuclidi con $Z > 92$, detti *transuranici*, sono tutti prodotti artificialmente.

Tutti gli elementi transuranici e una parte di quelli *suburanici* sono naturalmente instabili rispetto all'emissione di nuclei di elio ${}^4_2\text{He}$ (radioattività α), rispetto all'emissione di elettroni e^- o positroni e^+ (radioattività β), e all'emissione di radiazione elettromagnetica (radioattività γ).

A questi tre tipi di decadimento si aggiunge la *fissione spontanea* dell'isotopo ${}_{92}^{238}\text{U}$, scoperta da K.Petrzhak e G.Flerov nel 1940, che consiste nella scissione del nucleo di uranio in due frammenti nucleari di massa confrontabile.

La radioattività naturale fu casualmente scoperta da H.Bequerel nel 1896 con l'osservazione di *raggi fortemente penetranti*, spontaneamente emessi dal minerale di uraninite picea (pechblenda), individuati per l'impressione da essi prodotta in lastre fotografiche, tramite l'eccitazione per fluorescenza di gas, oltre che per la ionizzazione dell'aria che provocavano ¹.

Utilizzando come indicatore il potere ionizzante ², si individuarono tre diversi tipi di radiazioni, fino ad allora sconosciute e molto diverse fra loro, che furono contraddistinte dalle lettere α , β e γ .

I nuclei stabili sono raccolti in una banda piuttosto stretta sul piano $(Z; N)$ del grafico della tabella dei nuclidi, come mostrato in figura [4.1](#).

¹Prime tecniche di misura della radioattività con elettroscopi ed elettrometri, che hanno anche permesso l'individuazione dei raggi cosmici

²Il potere ionizzante di una radiazione è legato al numero di coppie elettrone-ione che tale radiazione produce interagendo con gli atomi del materiale che attraversa.

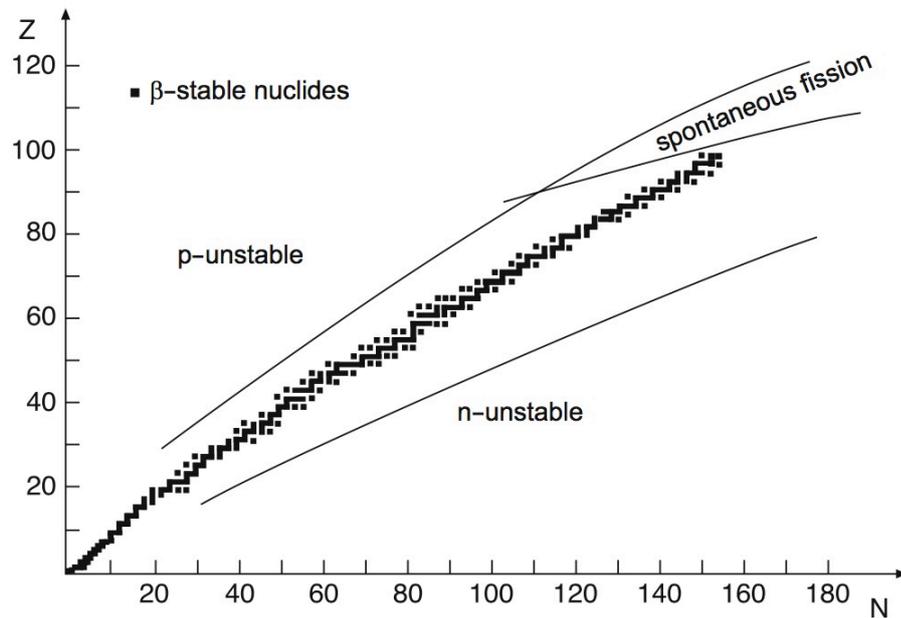


Figura 4.1: Carta dei nuclidi: i quadrati neri nel piano (Z, N) indicano i nuclei della "valle di stabilità".

Nel 1899, tre anni dopo la scoperta di Becquerel, si osservò che il rateo di decadimento di una sostanza radioattiva pura decresce, col passare del tempo, in accordo con un andamento esponenziale decrescente.

Ci vollero altri anni per assodare che la radioattività è un fenomeno che coinvolge ogni singolo atomo di una certa sostanza, e non il campione di sostanza radioattiva in quanto tale nella sua interezza.

Un'ulteriore paio d'anni furono quindi necessari per convincersi che il decadimento radioattivo di un atomo è un processo intrinsecamente statistico, e che sostanzialmente gli atomi di una sostanza, quand'anche radioattivi, "non invecchiano". È quindi impossibile predire quando uno specifico atomo deva decadere e ciò conduce naturalmente a una legge di tipo esponenziale decrescente col tempo.

Il decadimento radioattivo spontaneo è un fenomeno sostanzialmente indipendente dal tipo di emissione che produce. Nel caso di un decadimento in due corpi esso consiste nella disintegrazione spontanea del nucleo di un atomo, detto *genitore* che si trasforma in un più stabile nucleo *figlio*, più un residuo.

Se anche il nucleo figlio ed eventualmente il residuo sono radioattivi il processo continua con decadimenti a catena fino all'ottenimento di prodotti stabili.

Considerando processi che coinvolgono grandi numeri di atomi li si può trattare alla stregua di variabili continue e supposto un sistema costituito a un

certo istante da un gran numero di atomi radioattivi, la legge di decadimento fornisce il numero medio di atomi del sistema a un qualsiasi istante successivo.

I primi a formulare e applicare coerentemente la legge che descrive il decadimento di sostanze radioattive furono Rutherford e Soddy nel 1902.

Ogni nucleo instabile possiede quindi una determinata probabilità λ di decadere in un qualsiasi istante di tempo e la sua *vita media* τ è il reciproco della probabilità di decadimento: $\tau = 1/\lambda$.

4.1 Decadimento radioattivo di una sola sostanza

Dato un qualsiasi atomo, la probabilità che esso decada nell'intervallo di tempo dt è proporzionale a dt moltiplicato per una costante λ , detta *costante o probabilità di decadimento*, le cui dimensioni sono l'inverso di un tempo, che risulta indipendente dall'età dell'atomo ed è caratteristica della sostanza e del tipo di decadimento. Questa legge si applica indifferentemente a ogni tipo di decadimento radioattivo.

Supposto di avere inizialmente un numero molto grande $N(0)$ di atomi di una singola sostanza radioattiva, che ogni singolo decadimento radioattivo sia indipendente da tutti gli altri e considerando il numero residuo $N(t)$ di atomi della sostanza ad un istante successivo t alla stregua di una variabile continua, dalla legge del decadimento si ha che la diminuzione dN di atomi nell'intervallo di tempo dt sarà data da

$$dN(t) = -\lambda N(t)dt \quad (4.1)$$

Integrando quest'equazione tenendo conto del numero $N(0)$ di atomi presenti all'istante iniziale, si ha

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad (4.2)$$

L'inverso della costante di decadimento, $\tau = 1/\lambda$ è detto *vita media* ed è effettivamente il tempo medio $\langle t \rangle$ di vita d'un atomo. Se infatti

$$\frac{\lambda N(t)}{N(0)} = \frac{\lambda N(0)e^{-\lambda t}}{N(0)} = \lambda e^{-\lambda t} \quad (4.3)$$

rappresenta la funzione di distribuzione statistica dei tempi di vita di ogni atomo della sostanza radioattiva, il loro tempo medio $\langle t \rangle$ di vita è

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \tau \quad (4.4)$$

Si utilizza spesso il *tempo di dimezzamento* $T_{1/2}$, definito come il tempo affinché si riduca alla metà il numero di atomi inizialmente presenti

$$N(T_{1/2}) = N(0)e^{-T_{1/2}/\tau} = \frac{N(0)}{2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{T_{1/2}}{\tau} = \lambda T_{1/2} = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad T_{1/2} = \tau \ln 2 \simeq 0.693147 \cdot \tau \quad (4.5)$$

Il numero o *rateo* di decadimenti nell'unità di tempo, detto anche *attività*

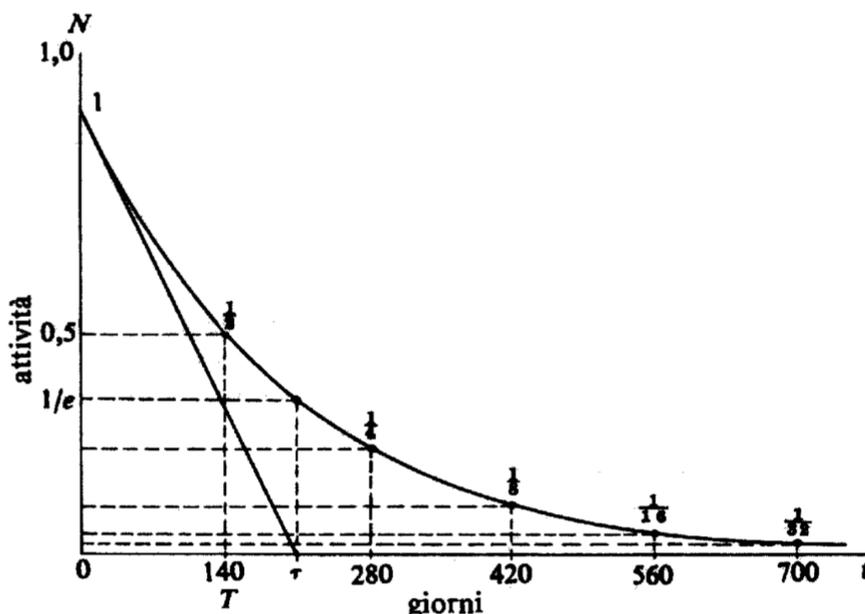


Figura 4.2: Decadimento d'una sostanza radioattiva con tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 140$ giorni. La tangente a $N(t)$ nel punto d'ascissa $t = 0$, interseca l'asse t nel punto di valore τ .

$\mathcal{A}(t)$ della sostanza radioattiva, si ottiene dalle [4.1](#) e [4.2](#):

$$\mathcal{A}(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right| = \lambda N(t) = \lambda N(0) e^{-\lambda t} = \mathcal{A}(0) e^{-\lambda t} \quad (4.6)$$

ed è una funzione decrescente col tempo, dato che al suo trascorrere il numero di atomi non ancora decaduti e che possono quindi decadere, cala.

L'unità di misura internazionale dell'attività è il Becquerel (Bq), corrispondente a 1 disintegrazione al secondo. È ancora molto usato anche il Curie (Ci), corrispondente a 3.7×10^{10} Bq

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

Una certa sostanza radioattiva può mostrare diversi meccanismi indipendenti e competitivi di decadimento, detti anche *canali di decadimento*, ognuno caratterizzato da una ben definita costante λ_i , originando così diverse sostanze figlie. Supposto che per una sostanza vi siano n diversi e indipendenti canali di decadimento, la sua probabilità totale λ_{tot} di decadimento, essendo additive le probabilità di eventi fra loro indipendenti, è data da

$$\lambda_{tot} = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{\tau_{tot}} \quad (4.7)$$

Un processo di decadimento con $n > 1$ viene anche detto *diramazione*, e il rapporto fra le quantità di due diversi tipi i e j di prodotti di decadimento associati a due diversi canali, in un certo intervallo di tempo, è detto *rapporto di diramazione (branching ratio) relativo* e coincide col rapporto fra le rispettive costanti di decadimento, λ_i/λ_j

$$\frac{dN_i(t)}{dN_j(t)} = \frac{\lambda_i N_0(t) dt}{\lambda_j N_0(t) dt} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \quad (4.8)$$

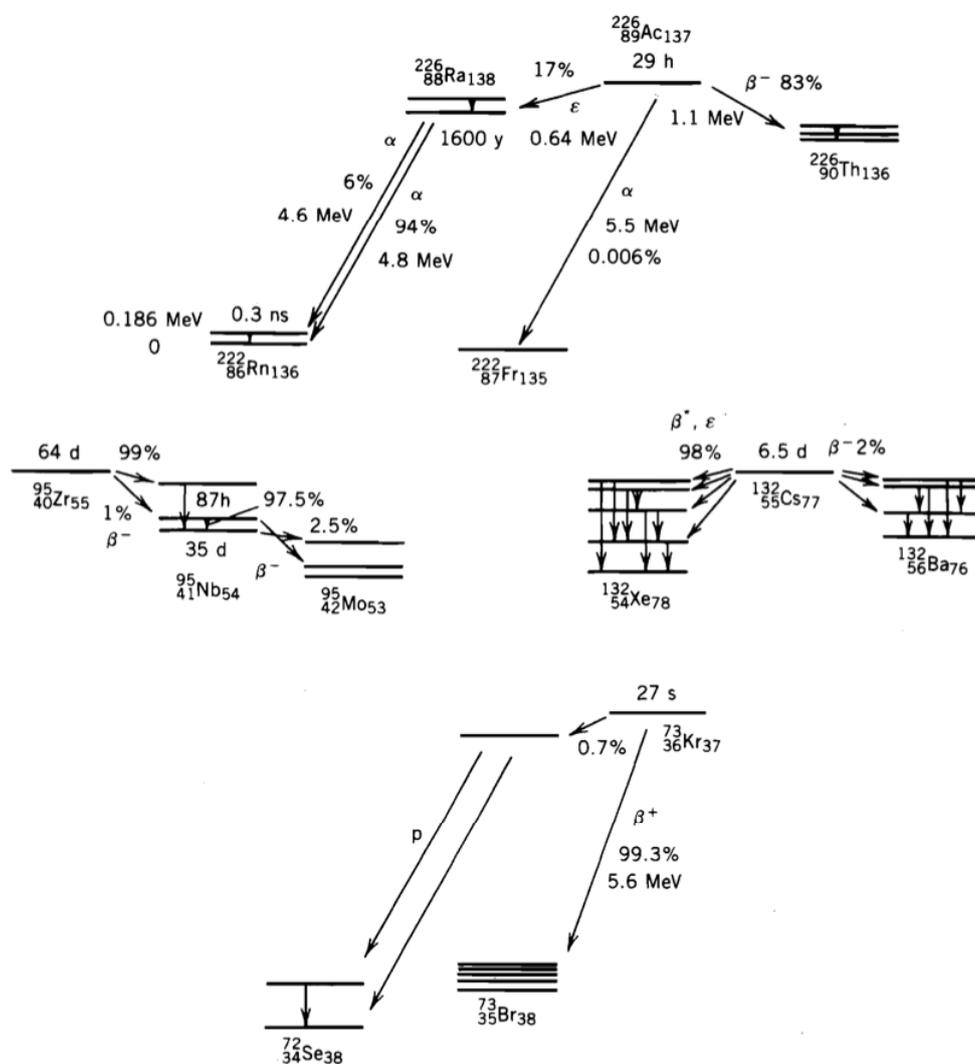


Figura 4.3: Esempi di decadimenti con *branching ratio*. ϵ indica cattura elettronica.

4.1.1 Misure di vite medie

Una misura di attività in funzione del tempo per una sostanza radioattiva si può effettuare contando il numero di decadimenti in una sequenza di brevi intervalli temporali successivi Δt . Graficando i dati in scala semilogaritmica, ovvero $\ln A(t) \% t$, si ottiene un segmento di retta la cui pendenza è $-\lambda$. Questo metodo è però utile e praticabile solo nel caso di vite medie che non siano ne' troppo corte ne' troppo lunghe, se confrontate con la vita media dello sperimentatore.

Nel caso di vite medie molto lunghe in pratica si misura direttamente l'attività dN/dt del processo di decadimento avendo accuratamente determinato, ad esempio per via chimica, il numero N_0 di atomi del campione

$$\lambda = -\frac{1}{N_0} \frac{dN(t)}{dt} \quad (4.9)$$

Nel caso di vite medie molto corte si ricorre ad altre tecniche.

È interessante vedere come si possano misurare le vite medie dei componenti di una miscela radioattiva nel caso in cui si sia in grado di contare il numero di decadimenti in una sequenza di intervalli temporali successivi.

Si supponga d'avere un preparato costituito da una miscela di due diverse sostanze radioattive completamente indipendenti l'una dall'altra e di misurare la distribuzione dei tempi d'attesa fra la rivelazione di due suoi successivi prodotti di decadimento. Detto $N_*(t) = N_1(t) + N_2(t)$ il numero totale di nuclei radioattivi del preparato non ancora decaduti ad un qualunque istante $t > 0$, con

$$N_1(t) = N_1(0) e^{-t/\tau_1} \quad \text{ed} \quad N_2(t) = N_2(0) e^{-t/\tau_2}$$

si ha:

$$N_*(0) = N_1(0) + N_2(0) \quad \text{ed} \quad N_*(t) = N_1(0) e^{-t/\tau_1} + N_2(0) e^{-t/\tau_2}$$

Si considerino tre casi estremi:

$$\tau_1 \ll \tau_2 \quad ; \quad \tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau \quad ; \quad \tau_1 \gg \tau_2$$

Si indichi con $N_*^{(sp)}(t_i)$ il numero di eventi raccolti nell' i -mo canale dell'istogramma sperimentale, compreso tra gli istanti t_i e $t_i + \Delta t$.

- Si comincia con l'analizzare il secondo caso: $\tau_1 \simeq \tau_2 \simeq \tau$ e si considera il logaritmo naturale di $N_*(t)$

$$\begin{aligned} \ln N_*(t) &= \ln \left[N_1(0) e^{-t/\tau_1} + N_2(0) e^{-t/\tau_2} \right] \\ &\simeq \ln \left[N_1(0) e^{-t/\tau} + N_2(0) e^{-t/\tau} \right] \\ &= \ln \{ e^{-t/\tau} [N_1(0) + N_2(0)] \} \\ &= -\frac{t}{\tau} + \ln [N_1(0) + N_2(0)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

che mostra una dipendenza quasi lineare di $\ln N_*(t)$ da t .

Ponendo in scala semilogaritmica $N_*^{(sp)}(t_i)$ si nota che il suo profilo dovrebbe poter essere approssimato da un andamento rettilineo con pendenza $-1/\tau$ e intercetta sull'asse delle ordinate pari a $\ln [N_1(0) + N_2(0)]$.

Effettuando quindi un "fit a retta" si riescono a stimare $\tau \simeq \tau_1 \simeq \tau_2$ e la somma $[N_1(0) + N_2(0)]$ delle abbondanze iniziali, ma non le singole abbondanze $N_1(0)$ e $N_2(0)$.

- Si suppone ora che sia $\tau_2 \gg \tau_1$.

In tal caso ci si aspetta che per tempi $t \gg \tau_1$ la legge di decadimento sia dominata dai prodotti della sostanza 2, come si vede anche in figura 4.4

Se quindi si effettua un fit sui valori di $\ln [N_*^{(sp)}(t_i)]$ per valori di $t \gg \tau_1$,

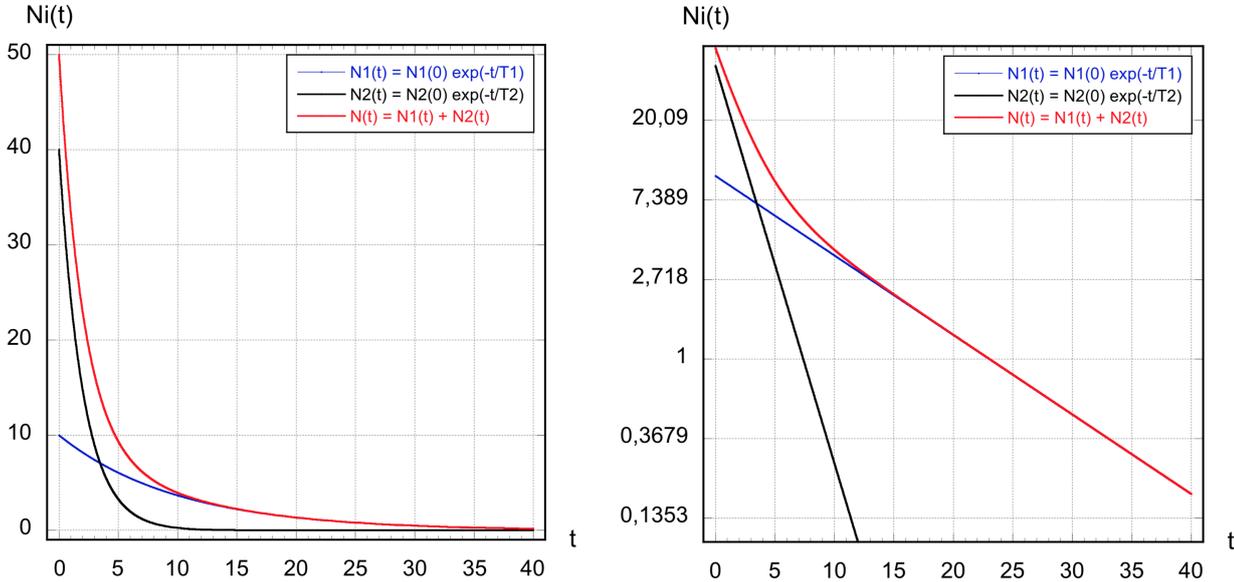


Figura 4.4: A sinistra, in scala lineare, gli andamenti di $N_1(t)$, $N_2(t)$ e la loro somma, nell'ipotesi che $N_1(0) = 10$, $N_2(0) = 40$, $\tau_1 = 10$ e $\tau_2 = 10$; a destra lo stesso in scala semi-logaritmica.

ovvero per $t \geq t'$ con $t' \gg \tau_1$, si dovrebbe ottenere una legge

$$N_2^{(fit)}(t) = N_2^{(fit)}(0) e^{-t/\tau_2^{(fit)}}$$

in grado di riprodurre la corretta legge di decadimento $N_2(0) e^{-t/\tau_2}$ tanto meglio quanto più vale $t' \gg \tau_1$, ovviamente sempre che per $t \geq t'$ ci siano a disposizione abbastanza valori sperimentali sui quali fare un fit affidabile.

In quest'ipotesi si può dunque sottrarre a $N_*^{(sp)}(t_i)$ per ogni valore di t_i , quanto dato da $N_2^{(fit)}(t_i)$, e quanto resta, $N_1^*(t_i)$, dovrebbe essere compatibile con la distribuzione dovuta ai decadimenti della sola sostanza 1:

$$[N_*^{(sp)}(t_i) - N_2^{(fit)}(t_i)] \propto N_1^*(t_i) \approx N_1(t_i)$$

Effettuando quindi un fit sui valori rappresentati da $N_1^*(t_i)$ si ottengono stime anche per $N_1(0)$ e per τ_1 .

- Il caso $\tau_2 \ll \tau_1$ è chiaramente simmetrico a quello ora discusso.

Un fattore che influenza quanto bene la procedura permetta di risalire a stime di $N_1(0)$, $N_2(0)$, τ_1 , τ_2 è il rapporto N_1/N_2 , peraltro non conoscibile a priori.

4.2 Decadimento radioattivo di più sostanze

Una sostanza radioattiva può come detto decadere in un'altra anch'essa radioattiva e in tal caso le due si dicono in relazione genetica, con la prima chiamata *genitore* e la seconda *figlia*. Ciò può estendersi a molte "generazioni".

Si supponga di avere al tempo $t = 0$, $N_1(0)$ ed $N_2(0)$ atomi delle sostanze radioattive (1) e (2), in relazione genetica. Se ne vogliono trovare le quantità $N_1(t)$ ed $N_2(t)$ presenti nel generico istante t successivo. La sostanza (1) decade secondo la legge

$$dN_1 = -N_1\lambda_1 dt \quad (4.11)$$

e per ogni suo atomo decaduto se ne forma uno della sostanza (2). Il numero di atomi della sostanza (2) quindi varia per due ragioni: da un lato diminuisce per i decadimenti spontanei degli atomi della sostanza (2), dall'altro cresce per effetto della formazione di atomi della sostanza (2) come prodotto del decadimento di atomi della sostanza (1). La variazione totale risultante è quindi:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (4.12)$$

con λ_1 e λ_2 le costanti di decadimento delle due sostanze.

Per una terza sostanza derivante dal decadimento di (2) si ha, in modo analogo:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \quad (4.13)$$

e così via.

Considerando k diverse generazioni in cascata si ha un sistema di k equazioni differenziali che può essere risolto ponendo:

$$\begin{cases} N_1 = a_{11}e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 = a_{21}e^{-\lambda_1 t} + a_{22}e^{-\lambda_2 t} \\ \dots \\ N_k = a_{k1}e^{-\lambda_1 t} + a_{k2}e^{-\lambda_2 t} + \dots + a_{kk}e^{-\lambda_k t} \end{cases} \quad (4.14)$$

Le costanti a_{ij} vanno determinate in modo che le [4.14](#) soddisfino le equazioni differenziali e le condizioni iniziali $N_i(0)$. Sostituendo le [4.14](#) in [4.11](#), [4.12](#),

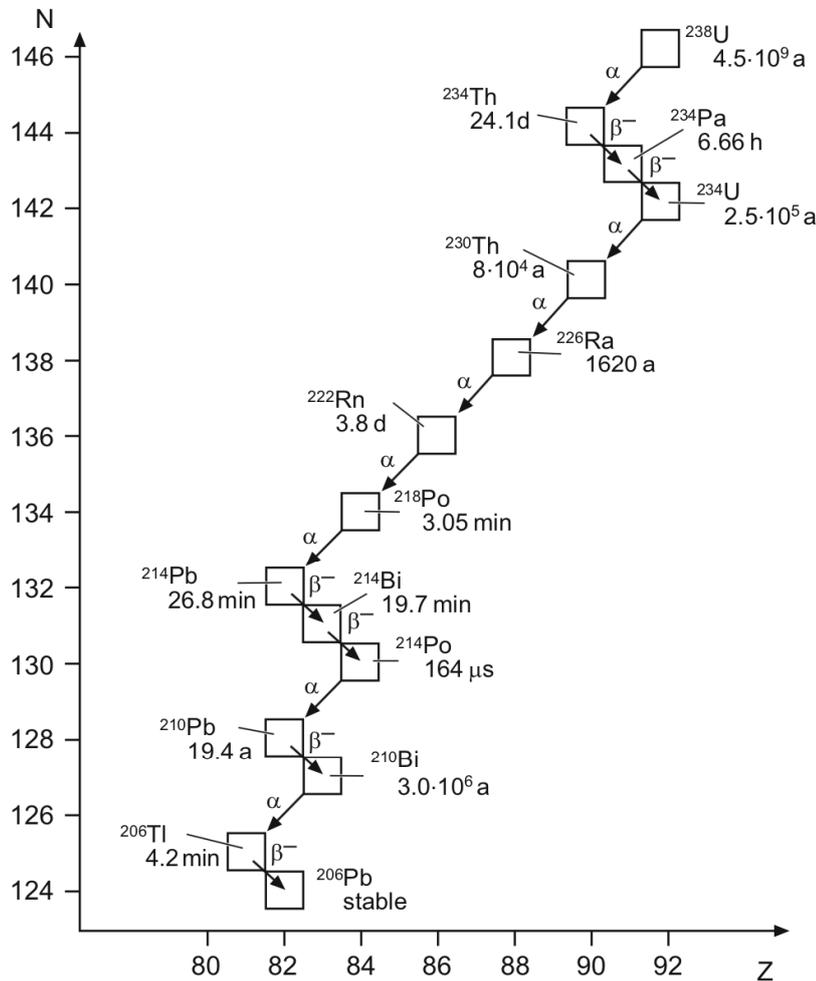


Figura 4.5: Famiglia radioattiva naturale dell'U²³⁸.

[4.13](#), ecc. si ottiene la seguente formula di ricorrenza, valida per i coefficienti a_{ij} con indici $i \neq j$

$$a_{ij} = a_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_j)(\lambda_2 - \lambda_j) \dots (\lambda_i - \lambda_j)} a_{11} \quad (4.15)$$

I coefficienti con indici uguali si ricavano dalla condizione

$$N_i(0) = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik} \quad (4.16)$$

Nel caso vi siano costanti di disintegrazione λ fra loro uguali, la [4.14](#) va modificata sostituendo, agli esponenziali con ugual valore di λ , termini della forma $te^{-\lambda t}$, $t^2 e^{-\lambda t}$,

Ogni espressione della [4.14](#) contiene una somma d'esponenziali in cui compaiono le costanti di disintegrazione di tutte le sostanze che precedono quella

considerata.

Alcuni casi specifici di condizioni iniziali hanno notevole importanza pratica. Si consideri il caso in cui all'inizio è presente la sola sostanza 1 con $N_1(0)$ atomi. Applicando direttamente le [4.14](#), [4.15](#) e [4.16](#) si ha, procedendo fino alla terza generazione

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) = N_1(0)\lambda_1\lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right] \end{cases} \quad (4.17)$$

Si consideri ora l'andamento col tempo delle attività di due sostanze radioattive, un genitore (1) e una sostanza figlia (2), di una stessa catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t)$ e si determini l'istante $t_{1,2}^*$ in cui le due attività combaciano.

Ciò implica, in base alla [4.6](#)

$$\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t) \quad (4.18)$$

e sostituendo dalla [4.17](#)

$$\lambda_1 N_1(0)e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

da cui

$$t_{1,2}^* = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (4.19)$$

L'istante in cui l'entità della sostanza figlia ha il suo massimo si ottiene uguagliando a zero la variazione temporale della quantità di sostanza figlia

$$dN_2(t)/dt = N_1(0)\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) = 0$$

da cui infine

$$t_{max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (4.20)$$

Quindi ne deriva l'interessante risultato che nel caso sia presente ad un istante iniziale una sola sostanza radioattiva, la sostanza figlia raggiunge il massimo della sua entità allo stesso istante in cui la sua attività coincide con quella della sostanza genitore, $t_{max} = t_{1,2}^*$.

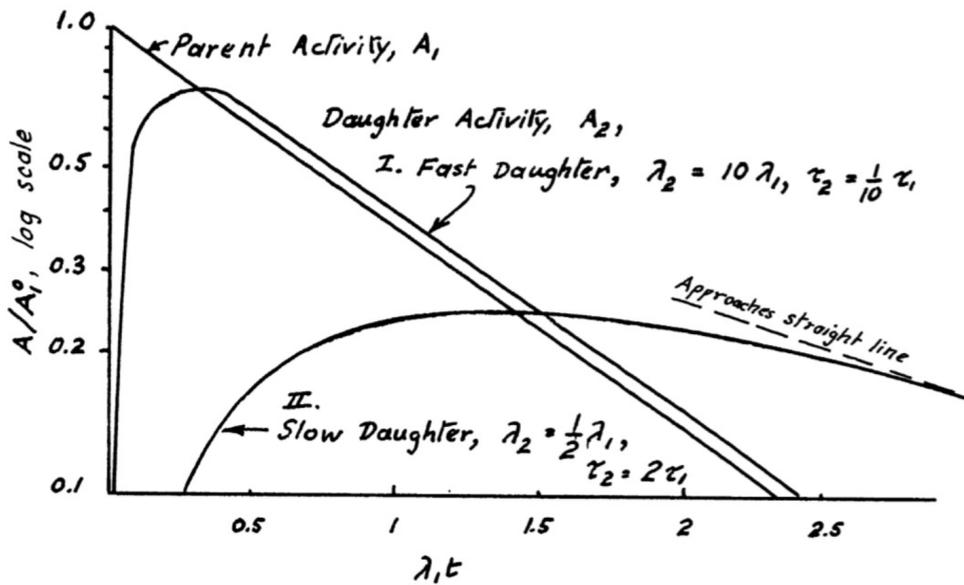


Figura 4.6: Ratei di decadimento di particelle figlie con probabilità di decadimento minore o maggiore di quella di uno stesso genitore.

Si consideri ora la catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t) \xrightarrow{\lambda_2} N_3(t)$ e si faccia sempre riferimento ai risultati presentati nelle [4.17](#), supponendo però che la sostanza di terza generazione sia stabile, ovvero $\lambda_3 = 0$. In tal caso

$$N_3(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right) \quad (4.21)$$

Si vedano ora quattro casi notevoli.

1. Supponendo dapprima $\lambda_1 > \lambda_2$, si ha che dopo un tempo t abbastanza lungo, per cui $t \gg 1/\lambda_1$, si può trascurare il primo esponenziale in parentesi per $N_2(t)$ dalle [4.17](#), ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \quad (4.22)$$

il che mostra come in questo caso, per tempi $t > t_{max}$, la sostanza figlia (2) proceda decadendo sostanzialmente secondo la propria costante di decadimento λ_2 , quindi secondo la propria vita media τ_2 .

2. Se invece si suppone $\lambda_1 < \lambda_2$, si ha che dopo un tempo t abbastanza lungo, per cui $t \gg 1/\lambda_2$ e quindi anche $t > t_{max}$, si può trascurare il secondo esponenziale in parentesi per $N_2(t)$ dalle [4.17](#), ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \quad (4.23)$$

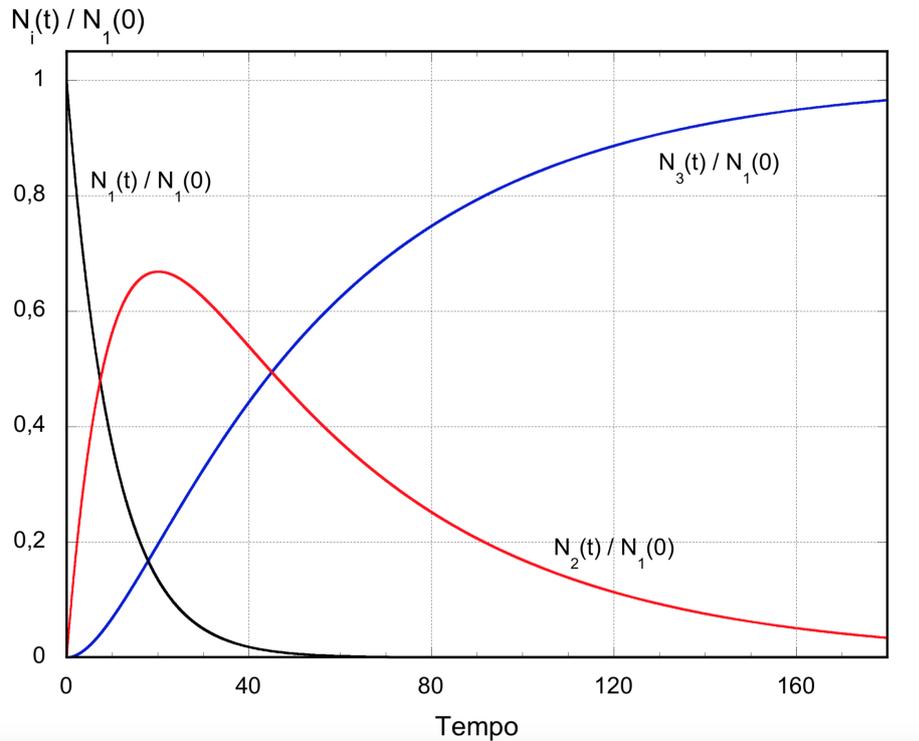


Figura 4.7: Esempio di una serie radioattiva con tre membri, di cui all'inizio è presente solo il genitore, l'ultimo è stabile e quello intermedio ha una vita media cinque volte superiore a quella del genitore

che mostra come in questo caso la sostanza figlia (2) proceda decedendo sostanzialmente secondo la costante di decadimento λ_1 della sostanza genitore, quindi secondo la vita media τ_1 .

Ciò risulta comprensibile riflettendo sul fatto che essendo lento il rateo di decadimento della sostanza (1) rispetto a quello della sostanza (2), lo è anche quello di formazione della sostanza (2), che però decade poi rapidamente subito dopo essersi formata.

Moltiplicando per λ_2 i due termini della [4.23](#) si ottiene, per il rateo di decadimenti della sostanza (2), ovvero per la sua attività $\mathcal{A}_2(t)$

$$\mathcal{A}_2(t) = \lambda_2 N_2(t) \cong \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathcal{A}_1(t) \quad (4.24)$$

- Supponendo ora $\lambda_1 \ll \lambda_2$, dalla [4.24](#) e sempre per tempi $t > t_{max}$, si ha $\mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(t)$, individuando quello che viene detto un *equilibrio transiente* fra le attività degli elementi (1) e (2), con un rapporto sostanzialmente costante fra esse: $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1 \cong \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \cong 1$.

4. Se ora, oltre a considerare $\lambda_1 \ll \lambda_2$ si suppone anche $\lambda_1 \cong 0$, e si considerano tempi t tali che $1/\lambda_1 \gg t \gg 1/\lambda_2$, allora

$$\begin{cases} N_1(t) \cong N_1(0) \\ N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (4.25)$$

da cui:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_1(t) \cong \mathcal{A}_1(0) \\ \mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \quad (4.26)$$

Si è quindi in presenza di un'attività molto piccola e quasi costante $\mathcal{A}_1(t)$. L'attività $\mathcal{A}_2(t)$ tende all'equilibrio per tempi $t \gg \lambda_2^{-1}$, quando $e^{-\lambda_2 t} \rightarrow 0$ e $\mathcal{A}_2(t) \rightarrow \mathcal{A}_1(0)$, quindi in regime di quasi saturazione, ovvero di quasi equilibrio (Figura [4.8](#)).

L'effettivo equilibrio richiederebbe d'altronde $dN_1(t)/dt = 0$, ed estendendo di nuovo al caso di una generica catena radioattiva con k decadimenti successivi, ciò implicherebbe l'uguaglianza di tutte le attività

$$\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t) = \mathcal{A}_3(t) = \dots = \mathcal{A}_k(t) \quad (4.27)$$

Questa condizione non può però essere effettivamente raggiunta in quanto l'aver $dN_1(t)/dt = 0$ significherebbe che la sostanza genitore è stabile, con $\lambda_1 = 0$ e $\tau_1 = \infty$. È d'altronde possibile conseguire una condizione tanto più prossima a quella dell'effettivo equilibrio quanto più lentamente decade la sostanza genitore rispetto ad ogni sostanza figlia della catena radioattiva. In tal caso, col crescere del tempo t , si tende alla condizione

$$N_1(t)\lambda_1 = N_2(t)\lambda_2 = N_3(t)\lambda_3 = \dots = N_k(t)\lambda_k \quad (4.28)$$

detta di *equilibrio secolare*. Essa risulta infatti applicabile soltanto quando un materiale, contenente tutti i prodotti di decadimento provenienti da una sostanza genitore, è stato lasciato indisturbato per un tempo sufficientemente lungo da permettere il conseguimento della suddetta condizione di equilibrio.

L'equilibrio può essere raggiunto anche nel caso in cui la sostanza genitore venga prodotta nel tempo con un rateo di produzione \mathcal{R} uguale al suo rateo di decadimento $\lambda N(t)$. Un caso del genere si può avere ad esempio bombardando un campione di sostanza i cui nuclei siano stabili, con un fascio di particelle che inducano un numero di trasmutazioni su \mathcal{R} atomi/s verso un elemento radioattivo che poi decada con una costante λ . Questo procedimento è in pratica utilizzato per produrre elementi radioattivi sfruttando ad esempio neutroni provenienti da reattori o fasci di particelle prodotti in acceleratori.

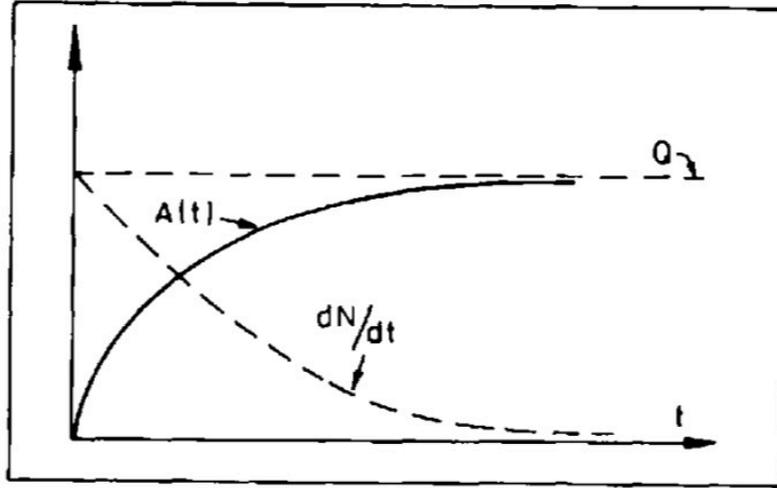


Figura 4.8: Equilibri asintotici fra ratei di produzione e attività.

La variazione del numero $N(t)$ di nuclei radioattivi presenti si ottiene dal bilanciamento fra il rateo \mathcal{R} di formazione e il rateo $-\lambda N(t)$ di decadimento:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mathcal{R} - \lambda N(t) \quad (4.29)$$

che se $\mathcal{R} = \text{cost.}$, si può riscrivere ridefinendo e quindi separando le variabili:

$$\frac{d[\mathcal{R} - \lambda N(t)]}{\mathcal{R} - \lambda N(t)} = -\lambda dt \quad (4.30)$$

Integrandola, nell'ipotesi che all'istante iniziale $t = 0$ si abbiano $N(0) = 0$ nuclei, si ottiene

$$\mathcal{R} - \lambda N(t) = [\mathcal{R} - \lambda N(0)] e^{-\lambda t} \implies N(t) = \frac{\mathcal{R}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.31)$$

da cui

$$\mathcal{A}(t) = \lambda N(t) = \mathcal{R} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (4.32)$$

che rappresenta un andamento a saturazione, tipico dei casi in cui formazione e decadimento sono in competizione. In figura [4.8](#) sono schematicamente illustrati l'attività $\mathcal{A}(t) \equiv \lambda N(t)$, o rateo di decadimento radioattivo, e la variazione temporale del numero di nuclei genitori $dN(t)/dt$, per un sistema con un rateo di formazione di \mathcal{R} atomi/s.

Se il tempo d'irraggiamento del campione è piccolo rispetto alla vita media ($t \ll \tau$) si può espandere l'esponenziale fino al termine lineare in t per cui $\mathcal{A}(t) \simeq \mathcal{R}\lambda t$, con l'attività che cresce ad un rateo praticamente costante. Per brevi tempi d'irraggiamento l'accumulo di nuclei prodotti è quindi

praticamente lineare nel tempo e non viene significativamente intaccato dai decadimenti.

Per tempi lunghi rispetto a τ l'esponenziale tende a 0 e l'attività si mantiene approssimativamente costante

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{R} , \quad \text{per } t \gg \tau \quad (4.33)$$

È la condizione in cui la nuova attività è prodotta circa con lo stesso rateo al quale la vecchia scompare, ed è un esempio di equilibrio secolare.

S'osservi che se si irradia un campione per un certo tempo e poi lo si toglie dalla zona d'irraggiamento, da quel momento esso mostrerà una diminuzione dell'attività con andamento esponenziale decrescente. Per produrre un campione utilizzabile in prossimità del luogo di produzione è quindi sufficiente irradiare per un tempo dell'ordine di $2 \div 3$ vite medie.

4.3 Tecniche radioattive di datazione

Le tecniche di datazione basate sui decadimenti radioattivi permettono di ottenere le informazioni più attendibili in merito alle valutazioni dei tempi assoluti delle epoche geologiche. Le sostanze comunemente utilizzate per questi scopi sono l'uranio e i suoi isotopi, il torio, il potassio e il rubidio.

La storia iniziale del pianeta Terra non è nota, ma ad un certo punto le rocce raggiunsero la loro composizione attuale, cristallizzandosi e differenziando i loro diversi componenti minerali. Un processo di metamorfosi, seppur lento, è tutt'ora in atto. La datazione radioattiva si riferisce sostanzialmente alla possibilità di determinare il tempo di formazione dei minerali, ovvero la loro età. Una roccia che al momento della sua formazione contenesse ad esempio una certa quantità di uranio, ha accumulato nel tempo trascorso, elio prodotto dal decadimento dell'uranio. Ogni atomo di ^{238}U che si trasforma in ^{206}Pb emette infatti otto particelle α , ovvero otto nuclei di elio, che se non sfuggono dalla roccia permettono di datare quest'ultima dalla valutazione fra l'uranio ancora presente e l'elio nel frattempo accumulato. Anche il torio permette di attuare un procedimento simile.

Particolare attenzione va posta nel verificare che l'elio e l'uranio non siano sfuggiti dai campioni in analisi durante la storia della roccia, cosa peraltro frequente per quanto concerne l'elio. Il rapporto uranio/piombo è anche utilizzabile e risente meno dei problemi che caratterizzano l'elio³, dovuti a diffusione o fuga dalle rocce. Si utilizzano inoltre anche i rapporti $^{206}\text{Pb}/^{207}\text{Pb}$, K/Ar e $^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$.

³L'elio in condizioni standard è gassoso e la sua molecola è monoatomica e molto piccola, da cui l'estrema facilità per l'elio di sfuggire da materiali in cui sia presente o sia stato assorbito.

Si veda ora come implementare questa tecnica, considerando che la si vuole applicare a decadimenti che si sviluppano su tempi geologici ($\sim 10^9$ y) per i quali non si è in grado di misurare direttamente l'attività in funzione del tempo. Quanto si fa in tali casi è utilizzare i numeri relativi di nuclei genitori e figli osservati al tempo t_1 (oggi) in un campione di materiale, confrontandoli con i numeri relativi al tempo t_0 , quando il materiale in studio si è cristallizzato a costituire la roccia (minerale) intrappolando i nuclei genitori nella loro "posizione" attuale.

Dato il decadimento dell'isotopo (nucleo/atomo) genitore G nell'isotopo (nucleo/atomo) figlio F, bisogna *contare*, ad esempio con metodi chimici, gli attuali numeri di atomi G ed F, $N_G(t_1)$ e $N_F(t_1)$; se null'altro tranne il decadimento radioattivo ha agito a partire dal tempo t_0 nel modificare $N_G(t)$ ed $N_F(t)$, allora supposto che al tempo t_0 della formazione non vi fosse ancora presenza di nuclei figli, cioè $N_F(t_0) = 0$, si ha

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_G(t_0) \quad (4.34)$$

e ancora

$$N_G(t_1) = N_G(t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)} \quad (4.35)$$

da cui

$$\Delta t \equiv t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{N_G(t_0)}{N_G(t_1)} \right] = \frac{1}{\lambda} \ln \left[1 + \frac{N_F(t_1)}{N_G(t_1)} \right] \quad (4.36)$$

Noti quindi la costante di decadimento λ del nucleo genitore, misurabile in laboratorio, e il rapporto attuale fra abbondanza di nuclei genitori e figli, si ottiene l'età del campione in studio con una precisione dipendente da quella con cui è nota λ e dalla statistica di conteggio per N_G ed N_F .

Nelle relazioni [4.34](#) e [4.35](#) sono implicite delle assunzioni che devono essere accuratamente verificate prima di applicare la relazione [4.36](#) alla determinazione dell'età di un campione. La [4.34](#) assume infatti, come detto, che $N_F(t_0) = 0$, e anche che nel tempo intercorso dalla formazione del campione fino ad oggi non si siano verificati fenomeni che hanno portato a modificare il numero totale di atomi presenti, variando il rapporto genitori/figli, se non per quanto dovuto al processo di decadimento radioattivo.

La [4.35](#) assume che la variazione di N_G dipenda soltanto dal decadimento e che quindi non vengano introdotti ulteriori atomi genitori nè da altri, diversi e concomitanti, fenomeni di decadimento, nè da reazioni nucleari, come ad esempio quelle inducibili da raggi cosmici.

Si può modificare la procedura per l'ottenimento di Δt tenendo conto anche dell'eventuale numero di nuclei/atomii figli F già presenti nel campione all'istante t_0 della sua formazione, anche se al momento t_1 dell'analisi del campione non si può dire quali atomi figli siano derivati dal decadimento durante il tempo Δt e quali ci fossero fin dall'inizio.

Si supponga che al tempo t_0 siano già presenti $N_F(t_0)$ nuclei figli, ad esempio formatisi da decadimenti del genitore in tempi precedenti t_0 o comunque inglobati nel campione al momento t_0 della sua formazione. La [4.34](#) diventa in questo caso

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_F(t_0) + N_G(t_0) \quad (4.37)$$

La quantità $N_F(t_0)$ non è però nota e questo non permette quindi di ottenere Δt . Se tuttavia nel campione è presente anche un diverso isotopo F' della specie figlia, che sia stabile e non proveniente dal decadimento di un genitore con lunga vita media, si può comunque risalire all'età del campione. Indicata con $N_{F'}$ la popolazione dell'isotopo F' , il fatto che esso sia stabile implica $N_{F'}(t_1) = N_{F'}(t_0)$, da cui

$$\frac{N_F(t_1) + N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_F(t_0) + N_G(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (4.38)$$

che diventa

$$\frac{N_F(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} [e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1] + \frac{N_F(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad (4.39)$$

I rapporti $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ e $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$ possono essere misurati in laboratorio ma resta sempre incognito il rapporto isotopico $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$. Avviene che minerali che cristallizzano secondo una comune origine dovrebbero mostrare uguali età e anche uguali rapporti isotopici $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$, anche se in essi il numero $N_G(t_0)$ degli stessi atomi genitori può essere molto diverso, ad esempio per la diversa composizione chimica.

Supponendo corretta quest'ipotesi ci si attende al momento della misura, ovvero al tempo t_1 , di osservare minerali con diversi rapporti $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ e $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$, corrispondenti ad una medesima coppia di valori Δt e $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$.

Questa ipotesi può essere analizzata graficando $N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ rispetto a $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$: per svariati minerali la [4.39](#) mostra infatti una dipendenza lineare fra i rapporti, con pendenza data da $[e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1]$ e intercetta $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$.

Un esempio, relativo al decadimento $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$ ($T_{1/2} = 4.8 \times 10^{10}$ y), confrontato con l'isotopo stabile ^{86}Sr , è illustrato in figura [4.9](#). La buona linearità della regressione sui punti sperimentali suffraga l'ipotesi che non vi siano state perdite di nuclei genitori o figli.

Le rocce terrestri superficiali più vecchie datate con tali metodi hanno un'età di $4.374 \times 10^9 \pm 0.006 \times 10^9$ anni e sono costituite da granuli di zircone scoperti in Australia, nella regione di Jack Hills, nel 2013. Il risultato, compatibile con l'età dei frammenti di meteoriti più antichi analizzati, suggerisce che la crosta terrestre si sia formata circa 100 milioni di anni dopo il gigantesco impatto che potrebbe aver dato origine alla Luna.

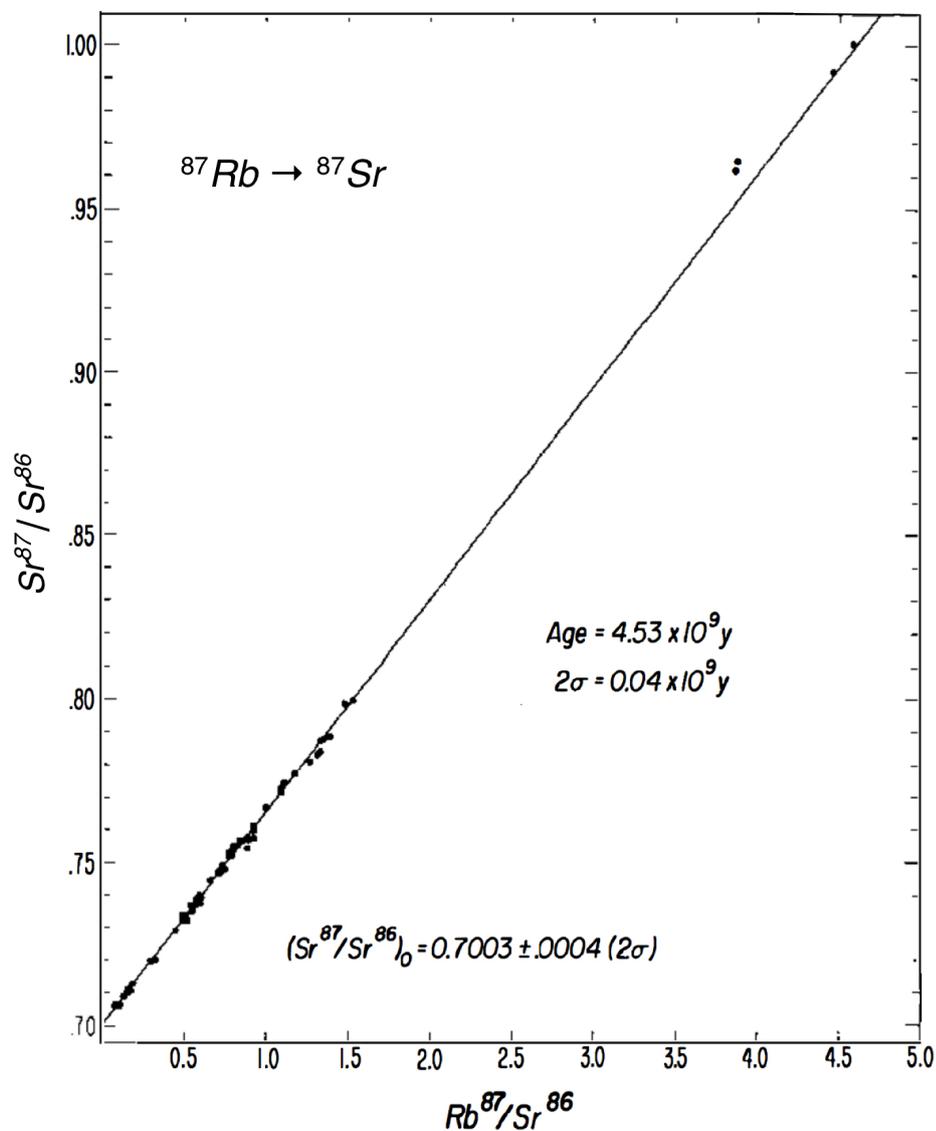


Figura 4.9: Tecnica di datazione Rb-Sr, tratto da G.W. Wertherill, Ann. Rev. Nucl. Sci. 25 (1975) 283.

Per datazioni di campioni più giovani, come quelli di materiali di tipo organico, il metodo che fa uso dell'isotopo radioattivo ^{14}C del Carbonio è il più utilizzato.

Una struttura organica vivente assorbe anidride carbonica, CO_2 , e il contenuto in carbonio di quest'ultima è costituito quasi interamente da ^{12}C (98.89%), mescolato ad una piccola percentuale di ^{13}C (1.11%).

Il ^{14}C radioattivo, che decade β^- in ^{14}N con una vita media $\tau = 8267$ an-

ni, è continuamente formato negli strati alti dell'atmosfera per effetto della cattura, da parte dell'azoto atmosferico, dei neutroni termici quali prodotti secondari del bombardamento da raggi cosmici. L'equilibrio dinamico che si instaura fra produzione e decadimento, supposti stabili la struttura chimica e in densità media dell'atmosfera, oltrechè il flusso di raggi cosmici che la investe, mantengono costante la concentrazione di ^{14}C nell'atmosfera stessa. Il ^{14}C così prodotto con un rateo $\mathcal{R}(^{14}\text{C})$, reagisce con l'ossigeno per dare anidride carbonica $^{14}\text{CO}_2$ che viene riutilizzata dalle piante durante la fotosintesi clorofilliana.

Con questo meccanismo il ^{14}C si trasferisce quindi nei composti organici e attraverso la catena alimentare è presente in ogni struttura vivente secondo un preciso rapporto (abbondanza isotopica), pari a circa 1.3 atomi di ^{14}C ogni 10^{12} atomi di ^{12}C . Tutta la materia vivente è dunque leggermente radioattiva in funzione del suo contenuto di ^{14}C .

Supposto che il rateo di produzione di ^{14}C da parte dei raggi cosmici si mantenga relativamente costante⁴, ne consegue che la materia organica, se vive sufficientemente a lungo, raggiunge l'equilibrio del suo contenuto di ^{14}C con quello dell'atmosfera

$$\frac{dN(^{14}\text{C})}{dt} = 0 \quad \implies \quad \mathcal{R}(^{14}\text{C}) = \lambda(^{14}\text{C}) N(^{14}\text{C}) \quad (4.40)$$

e tramite il metabolismo lo mantiene sino alla morte, momento a partire dal quale smette di assumere ^{14}C e quindi di essere in equilibrio, per il suo contenuto, con il ^{14}C atmosferico. Dal momento della morte dell'organismo il suo contenuto di ^{14}C decresce quindi secondo la legge del decadimento radioattivo.

Si può dunque determinare l'età di un campione organico a partire dal momento della morte dell'organismo cui esso è appartenuto, misurando l'attività per grammo di carbonio in esso contenuto, detta *attività specifica* (\mathcal{A}_{sp}), e confrontandola con l'attività specifica del carbonio atmosferico, pari a circa 0.23 Bq/g, ovvero 13.8 disintegrazioni/g al minuto.

Detto t_0 il tempo della morte dell'organismo, e t_1 il tempo della misura, si ha, per l'età $\Delta t = (t_1 - t_0)$ del campione

$$\mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_1) = \mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_0) e^{-\lambda(t_1 - t_0)} \quad (4.41)$$

da cui:

$$\Delta t \equiv (t_1 - t_0) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_0)}{\mathcal{A}_{sp}(^{14}\text{C}, t_1)} \quad (4.42)$$

I metodi di datazione che sfruttano l'attività danno affidamento fino a tempi sostanzialmente non superiori a $7 \times \tau$, quindi con il ^{14}C si possono ottenere

⁴Il livello di ^{14}C in atmosfera è variato significativamente nel tempo, per motivi naturali e "umani", come ad esempio nel XX secolo per gli esperimenti con ordigni nucleari. Per ottenere datazioni affidabili bisogna dunque ricorrere a metodi complementari, che affiancano e complementano quello del radiocarbonio

datazioni di una certa attendibilità fino a tempi inferiori a circa 6×10^4 y.
Si può fare ancor meglio utilizzando la tecnica della spettrometria di massa

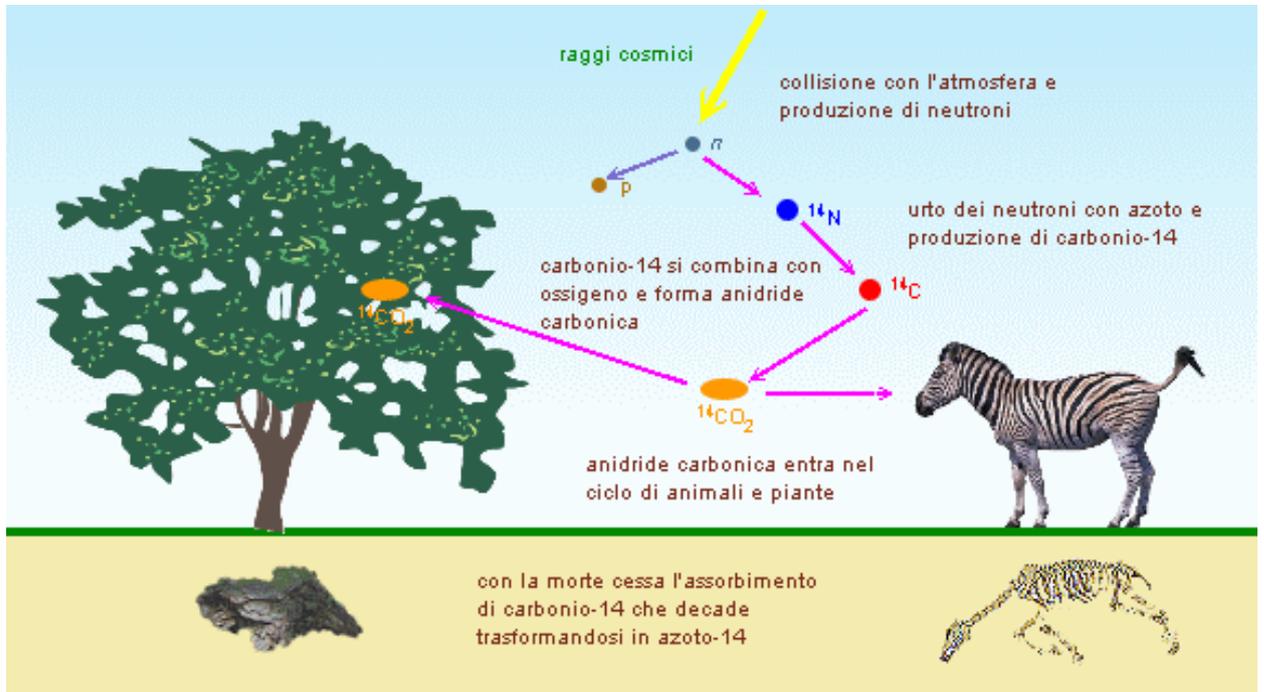


Figura 4.10: Schematizzazione del ciclo del ^{14}C .

con acceleratore (AMS) che permette di contare direttamente il numero di atomi sia di ^{14}C che anche di altri isotopi, presenti in un campione.

Capitolo 5

Decadimenti nucleari

5.1 Generalità

Un nucleo A_ZX si dice *stabile* rispetto al decadimento

$${}^A_ZX \longrightarrow {}^{A-A'}_{Z-Z'}X + \sum_{i=1}^n {}^{A^i}_{Z^i}b \quad (5.1)$$

con $\sum_{i=1}^n A^i = A'$ e $\sum_{i=1}^n Z^i = Z'$, se risulta negativa la differenza fra le masse

$$\Delta M_b(A, Z) = M_X(A, Z) - M_X(A - A', Z - Z') - \sum_{i=1}^n M_b(A^i, Z^i) \quad (5.2)$$

Se invece $\Delta M_b > 0$, il processo [5.1](#) può aver luogo spontaneamente, a meno di vincoli legati al rispetto di leggi di conservazione.

Questo presuppone che gli $n + 1$ prodotti del decadimento vengano emessi *contemporaneamente*. Non è però sempre così, soprattutto per $n > 2$. In quei casi ci si può trovare di fronte a catene di decadimenti sequenziali che partendo dai prodotti di un iniziale decadimento binario o ternario, ne coinvolgono poi alcuni in decadimenti successivi per cui, alla fine di tutto il processo, si possono avere molti prodotti come risultato del decadimento iniziale di un solo nucleo o particella, ma non tutti saranno stati emessi contemporaneamente. Lo studio di questi casi si può ricondurre a quello di decadimenti indipendenti, se si è in grado di risolvere la sequenza temporale con cui si manifestano.

Per decadimenti binari la quantità

$$E_b(A, Z) = \Delta M_b(A, Z)c^2 < 0 \quad (5.3)$$

è detta energia di legame di ${}^{A'}_{Z'}b$ nel nucleo A_ZX . L'opposto di $E_b(A, Z)$, detta energia di separazione, rappresenta l'energia minima che deve essere fornita al nucleo A_ZX affinché esso emetta ${}^{A'}_{Z'}b$.

Quindi, equivalentemente a quanto visto sopra, se $E_b(A, Z) > 0$, il processo avviene spontaneamente, e i termini a destra della freccia nella [5.1](#) sono detti *prodotti del decadimento*.

La quantità totale di energia rilasciata in un decadimento è anche detta Q -valore del decadimento, e si ha quindi che un decadimento può aver luogo spontaneamente solo se $Q > 0$.

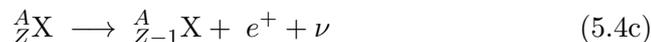
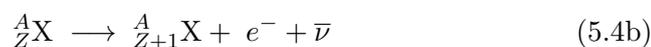
Dall'analisi dei valori sperimentali delle masse dei *nuclidi naturali* e di molti artificiali si trova, nel caso in cui ${}^A_Z b$ sia un protone p , un neutrone n o un deutone $d \equiv {}^2_1\text{H}$, che vale sempre $E_b(A, Z) < 0$, ovvero il decadimento spontaneo [5.1](#) non può aver luogo, quindi le radioattività naturali *protonica*, *neutronica* e *deutonica* sono energeticamente proibite.

In alcuni casi si osserva la cosiddetta *emissione ritardata* di neutroni o di protoni, che hanno però luogo sempre immediatamente a ridosso dell'emissione di un elettrone, o di un positrone (o di una cattura K), conseguenti a un decadimento β .

Si ha talvolta emissione di singoli nucleoni anche dai frammenti di fissione, immediatamente dopo questa, ma i nuclidi che li emettono sono appunto prodotti di una fissione, anche se questa è avvenuta in modo *naturale/spontaneo*. Per alcuni nuclei pesanti si ha $E_\alpha(A, Z) > 0$, ed è quindi energeticamente possibile l'emissione spontanea di particelle α da parte di quei nuclei pesanti. La grande energia di legame del nucleo di elio, pari a circa 28.3 MeV, rende inoltre la sua emissione da un nucleo pesante particolarmente favorevole, da un punto di vista energetico, rispetto a quella di altri frammenti nucleari leggeri.

Calcolando le energie di legame di protoni e neutroni, tramite la [5.3](#) si evidenzia che i nuclei con numero magico N^* di neutroni sono eccezionalmente stabili, in quanto le energie di legame per i loro protoni e neutroni sono maggiori di quelle calcolate per i nuclei con valori adiacenti di N .

Gli schemi di decadimento nucleare α e β sono rispettivamente



Analizzando il diagramma $Z - N$ si trova che il punto rappresentativo di un nucleo β -instabile si sposta lungo una linea isobarica verso il basso o verso l'alto, a seconda che venga emesso un positrone e^+ o un elettrone e^- ; il punto rappresentativo di un nucleo α -instabile si sposta invece nel punto di coordinate $(N - 2; Z - 2)$. Ciò è detto legge dello spostamento radioattivo. Si trova sperimentalmente che tutti i nuclei con $Z > 82$ hanno almeno un nuclide α -instabile. Fra i pochi nuclei α -instabili con $Z < 82$ ci sono il

neodimio (${}^{144}_{60}\text{Nd}$), il samario (${}^{146}_{62}\text{Sm}$ e ${}^{147}_{62}\text{Sm}$), il gadolinio (${}^{148}_{64}\text{Gd}$ e ${}^{149}_{64}\text{Gd}$), il terbio (${}^{149}_{65}\text{Tb}$ e ${}^{150}_{65}\text{Tb}$), l'afnio (${}^{174}_{72}\text{Hf}$), il platino (${}^{190}_{78}\text{Pt}$).
 I nuclei α -instabili ${}^{238}_{92}\text{U}$, ${}^{235}_{92}\text{U}$ e ${}^{232}_{90}\text{Th}$ sono i capostipiti di tre serie radioattive ognuna delle quali, tramite una successione di decadimenti a catena α e β , termina con un isotopo stabile del piombo.

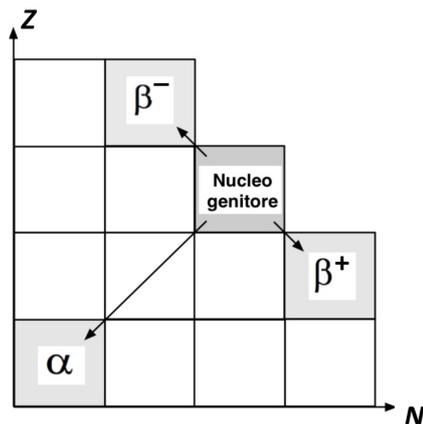


Figura 5.1: Legge dello spostamento radioattivo di Soddy-Fajans.

5.2 Radioattività α

Fu Rutherford nel 1909 a scoprire che la radiazione α è costituita da nuclei di elio: egli fece decadere sotto vuoto una sostanza radioattiva che emetteva particelle α e analizzando poi il contenuto dell'ambiente originariamente vuoto trovò presenza di elio.

Il decadimento α rappresenta quindi la disintegrazione di un nucleo genitore in un nucleo figlio e un nucleo di elio



e può essere considerato come una fissione spontanea del nucleo genitore (si veda il capitolo [13](#)) in due nuclei figli con masse fortemente asimmetriche. Esso è sostanzialmente dovuto all'azione concomitante delle forze nucleari attrattive e di quelle elettromagnetiche repulsive.

La sua importanza cresce al crescere del numero di massa A , in quanto la repulsione coulombiana, dipendendo da Z^2 , cresce più rapidamente della forza di legame nucleare che dipende approssimativamente da A solo per nuclei leggeri per poi saturare al crescere di A .

Il decadimento α si presta a molte applicazioni, alcune delle quali descritte in Appendice [E](#).

5.2.1 Energetica dei decadimenti α

Per studiare l'energetica del processo si supponga il nucleo genitore inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM); la conservazione dell'energia si esprime come

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + E_{k,Y} + M_\alpha c^2 + E_{k,\alpha} \quad (5.6)$$

con M_X , M_Y ed M_α le masse rispettivamente del nucleo genitore, di quello figlio e della particella α , $E_{k,Y}$ ed $E_{k,\alpha}$ le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella α .

Dalla [5.6](#) si ha

$$E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 = \Delta M c^2 \equiv Q_\alpha \quad (5.7)$$

che viene detto Q -valore del decadimento α e coincide con l'energia a disposizione della disintegrazione. Le energie in gioco sono tali da permettere, con buona approssimazione, l'utilizzo delle formule non relativistiche; le energie cinetiche del nucleo figlio e della particella α sono quindi

$$E_{k,Y} = \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 \quad , \quad E_{k,\alpha} = \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \quad (5.8)$$

con v_Y e v_α le velocità del nucleo figlio e della particella α . Avendo supposto il nucleo genitore a riposo, la conservazione dell'impulso implica che nucleo figlio e particella α si muovano con impulsi opposti

$$M_Y v_Y = -M_\alpha v_\alpha \quad \text{da cui,} \quad v_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \quad (5.9)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} E_{k,Y} + E_{k,\alpha} &= \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} M_Y \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \\ &= \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\text{da cui,} \quad E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = E_{k,\alpha} \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = Q_\alpha \quad (5.10)$$

e ancora

$$E_{k,\alpha} = \frac{M_Y}{M_\alpha + M_Y} Q_\alpha \quad \text{ed} \quad E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \quad (5.11)$$

Non potendo essere negativa l'energia cinetica della particella α emessa nel decadimento, ne deriva che questo, per aver luogo, deve necessariamente essere un processo esotermico, ovvero

$$\Delta M \geq 0 \quad \text{e} \quad Q_\alpha \geq 0 \quad (5.12)$$

Nel caso di nuclei pesanti, con $A \gg 1$, la gran parte dell'energia liberata dal decadimento diventa energia cinetica della particella α . Dalla seconda delle [5.11](#) si ha infatti in questo caso

$$E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha} \ll E_{k,\alpha} \quad (5.13)$$

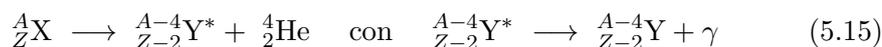
Ponendo $(M_\alpha/M_Y) \simeq 4/(A-4)$ si ha

$$E_{k,\alpha} \approx \frac{A-4}{A} Q_\alpha \quad , \quad E_{k,Y} \approx \frac{4}{A} Q_\alpha \quad (5.14)$$

che permettono una rapida stima dell'energia rilasciata nel decadimento, nota che sia Q_α . Nel seguito si ometterà per semplicità il pedice α .

Trattandosi di un decadimento in due corpi osservato nel sistema del centro di massa del nucleo genitore, l'energia cinetica espressa dalla prima delle [5.11](#) e il modulo della velocità della particella α emessa nel decadimento, dovrebbero assumere entrambi un unico valore.

Accurate misure in proposito hanno tuttavia evidenziato una *struttura fine* negli spettri energetici delle particelle α emesse da materiali radioattivi per diversi possibili Q -valori. Le particelle α del picco più intenso dello spettro sono prodotte da sole, mentre le altre sono sempre accompagnate dalla concomitante emissione di fotoni γ . Questo concorre a suggerire la presenza nei nuclei di livelli energetici e di una sottostante struttura di stati discreti. In tal caso quindi un nucleo genitore, decadendo α , può trasformarsi nello stato fondamentale di un nucleo figlio emettendo una particella α di energia corrispondente all'intero Q -valore disponibile, o può prima decadere in uno stato eccitato ${}_{Z-2}^{A-4}Y^*$ del nucleo figlio emettendo una particella α di energia inferiore all'intero Q -valore. Il nucleo figlio eccitato risultante potrà quindi decadere al proprio livello fondamentale emettendo fotoni γ , come ad esempio nel caso del torio ${}^{228}\text{Th}$ che decade α nel radio ${}^{224}\text{Ra}$, illustrato in figure [5.2](#).



Questo tipo di processo avviene raramente nei nuclei pari-pari, dato il loro ridotto Q -valore. Nei nuclei pari-dispari e dispari-dispari invece, è meno probabile che il nucleone spaiato prenda parte al processo di formazione della particella α , per cui ha una maggior probabilità di trovarsi in un livello eccitato del nucleo figlio Y , dopo il decadimento α .

La struttura fine dello spettro può essere determinata dalla misura delle energie cinetiche delle diverse particelle α osservate in un particolare decadimento, confrontata con il corrispondente Q -valore disponibile.

$$Q_\alpha \approx E_{k,\alpha} + E_\gamma \quad (5.16)$$

La misura diretta delle energie dei fotoni γ associati conferma quindi l'esistenza nel nucleo di una struttura a stati energetici discreti.

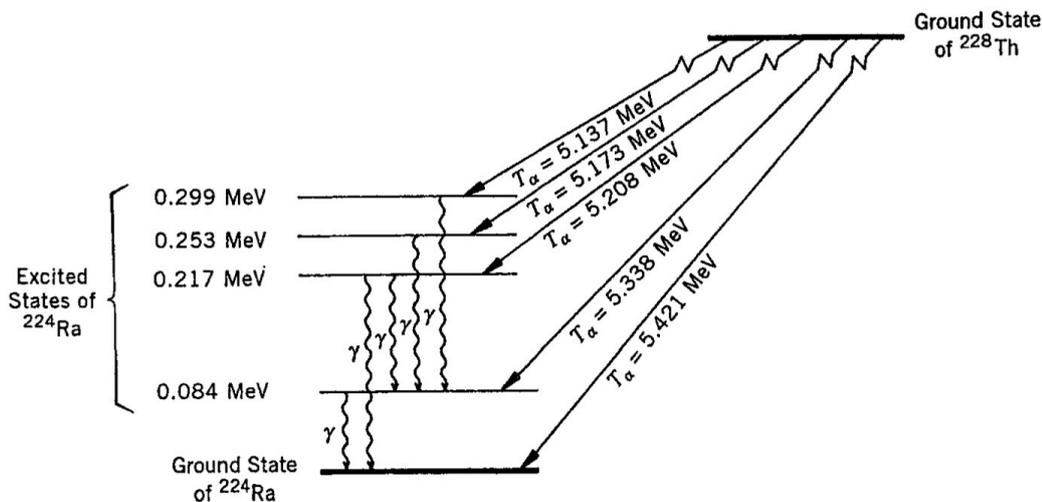


Figura 5.2: Struttura dello spettro di emissione α del torio ^{228}Th .

Talvolta si osserva l'emissione di particelle α con energie maggiori di quelle corrispondenti alla transizione tra i due livelli fondamentali dei nuclei genitore e figlio, ed è dovuta a decadimenti che avvengono a partire da livelli eccitati del nucleo genitore.

5.2.2 Soglia di instabilità

Si vuole ora individuare per quali valori di A e Z il decadimento α sia energeticamente possibile, tenendo conto del fatto che in ogni decadimento una parte dell'energia di massa del genitore è convertita in energia cinetica dei prodotti del decadimento.

Dato che la massa di un nucleo equivale alla somma delle masse dei nucleoni costituenti meno l'energia totale di legame divisa per c^2 , e dato che nel decadimento α i nucleoni non cambiano natura, si ha che il decadimento può aver luogo soltanto se accompagnato da un aumento dell'energia di legame per nucleone nei prodotti finali, rispetto al nucleo genitore.

Analizzando l'andamento dell'energia media di legame per nucleone $\langle B \rangle \equiv |B/A|$ in funzione di A , come mostrata in figura 2.1, ed essendo il ^{56}Fe il nuclide più stabile, ciò è possibile soltanto nella regione dove $\partial\langle B \rangle/\partial A < 0$ e contemporaneamente $A > (56 + 4) = 60$.

Il Q -valore del decadimento α espresso dalla 5.7 può essere scritto in termini delle energie medie di legame per nucleone $\langle B \rangle_{X,Y,\alpha}$ dei nuclei coinvolti

$$\begin{aligned}
 Q &\equiv [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M_\alpha] c^2 = \\
 &= A(\langle B_Y \rangle - \langle B_X \rangle) - 4(\langle B_Y \rangle - \langle B_\alpha \rangle) > 0
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Essendo $\langle B_\alpha \rangle \simeq 7.1$ MeV l'energia media di legame di un nucleone nella particella α , quindi minore di quelle per i nuclei pesanti coinvolti nel decadimento, ne segue che il secondo termine della [5.17](#) è positivo, da cui si ha che la soglia di instabilità deve essere decisamente superiore ad $A = 60$. Utilizzando la formula di Weizsäcker [2.55](#) a meno del termine d'accoppia-

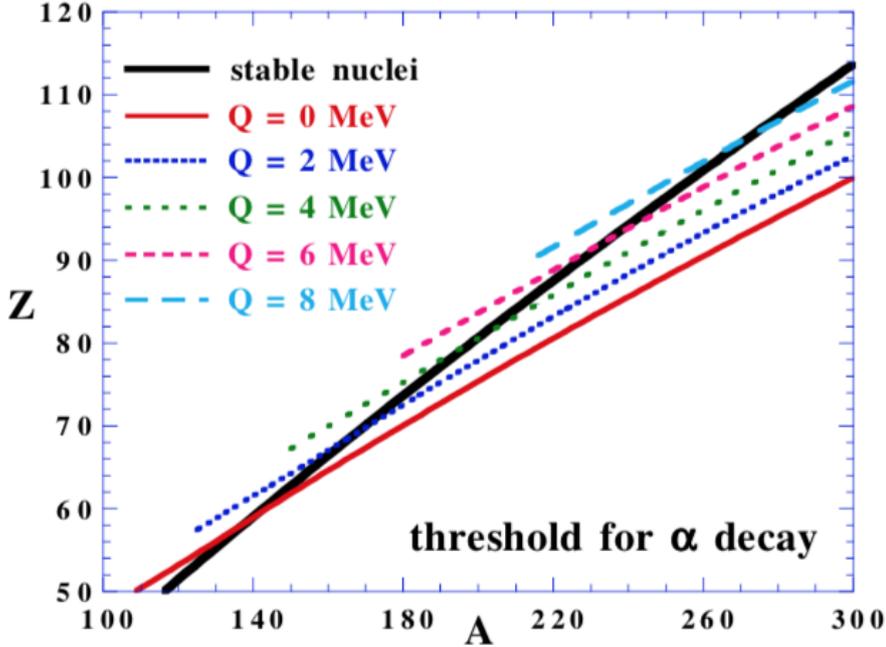


Figura 5.3: Linee di instabilità per il decadimento α .

mento, ponendo $Z(Z-1) \simeq Z^2$, e sviluppando in serie troncando al primo membro, il calcolo del Q -valore dà

$$\begin{aligned}
 Q &= 4\langle B \rangle_\alpha - [A\langle B \rangle_X - (A-4)\langle B \rangle_Y] = B_\alpha - (B_X - B_Y) \simeq \\
 &\simeq B_\alpha + 4b_V + 4 \left[\frac{2}{3}b_S + b_C Z \left(1 - \frac{Z}{3A} \right) \right] A^{-1/3} - 4b_{sim} \left(1 - \frac{2Z}{A} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Sostituendo ora i valori dei parametri b_k come riportati in [2.56](#), si ottengono nel piano (Z, A) , le linee per $Q = \text{costante}$ (fig. [5.3](#)) che individuano le *soglie di instabilità* del decadimento per emissione di particelle α con energia cinetica $E_k \simeq Q$. Si noti che si ottiene:

$$\begin{aligned}
 Q = 0 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 140 \\
 Q = 4 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 200 \\
 Q = 8 \text{ MeV} &\rightarrow A \approx 240
 \end{aligned}$$

Il decadimento α per nuclei con $140 < A < 200$ è sì possibile, ma date le lunghissime vite medie che lo caratterizzano, risulta praticamente inosservabile; si può quindi affermare che i nuclei con $A < 200$ sono essenzialmente stabili rispetto all'emissione α .

5.2.3 Teoria del decadimento α

I dati sperimentali mostrano una probabilità di decadimento α del nucleo genitore come funzione rapidamente crescente dell'energia $E_{k,\alpha}$, ovvero di Q_α , e dunque la riga più intensa dello spettro è quella dal livello fondamentale del nucleo genitore al livello fondamentale del nucleo figlio.

Per organizzare i dati e prima della formulazione d'una teoria da parte di Gamow et al., Geiger e Nuttall suggerirono, nel 1911, una relazione empirica fra la probabilità di decadimento λ_α e l'energia totale, ovvero il Q -valore a disposizione del decadimento, per ogni catena isotopica

$$\log \lambda_\alpha = A(Z) Q_\alpha^{-1/2} + B(Z) \quad (5.19)$$

con $A(Z)$ e $B(Z)$ coefficienti che vanno determinati con fit sui dati sperimentali. Prendendo l'esponente ad ogni membro della [5.19](#)

$$\lambda_\alpha(Q_\alpha) \propto e^{D(Z) Q_\alpha^{-1/2}} \quad (5.20)$$

La relazione di Geiger e Nuttall descrive abbastanza bene i dati finché la dipendenza di $\log \lambda_\alpha$ dal numero di neutroni si mantiene lineare.

È un risultato che una teoria del decadimento alfa deve riprodurre.

La teoria proposta nel 1928 da Gamow, e indipendentemente da Gurney e Condon per spiegare il decadimento α , pur fornendo una descrizione quantitativa e predittiva del fenomeno è però basata su un approccio che si avvale di assunzioni e descrizioni fisiche approssimate.

L'idea di partenza è che le particelle α emesse dai nuclei non esistano come tali nei nuclei molto prima del decadimento, ma si formino sostanzialmente all'inizio di questo processo. Si ammette che almeno a sufficiente distanza dal centro di massa del sistema, il nucleo genitore possa essere descritto, pochi istanti prima del decadimento, come un sistema costituito da "particella α + nucleo figlio", assumendo che la particella α possieda una propria identità strutturale e si muova all'interno di una buca di potenziale.

L'energia potenziale del sistema nella sua interezza può allora essere rappresentata come l'energia del sistema "particella α + nucleo figlio" considerati come due sottosistemi nucleari separati.

L'altezza della barriera coulombiana per nuclei con $A \simeq 200$ è dell'ordine di $20 \div 25$ MeV, e particelle α con energie cinetiche dell'ordine di pochi MeV, come quelle emesse per decadimento alfa, non riescono a superarla e avvicinarsi sufficientemente al nucleo da interagire con esso tramite interazione nucleare.

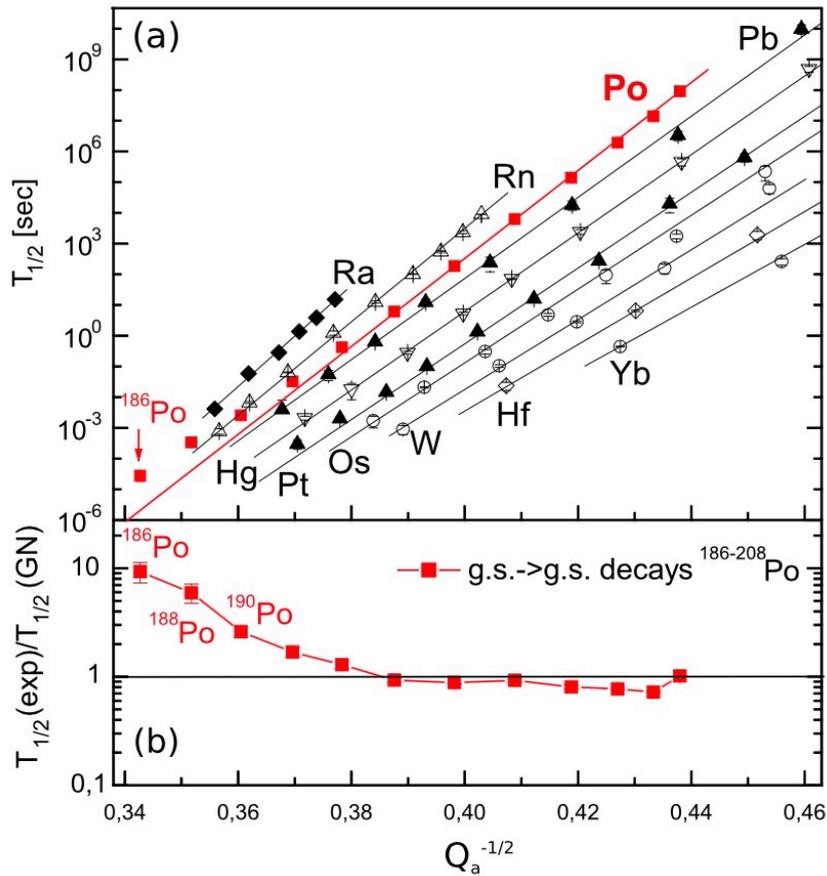


Figura 5.4: Dipendenza del tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ dall'inverso della radice quadrata del Q -valore, per i decadimenti α di alcune catene isotopiche. Sono sovrapposte le previsioni secondo Geiger-Nuttal ed è in evidenza il comportamento del Po. (Andreyev et al., Phys. Lett. B 734 (2014) 203)

D'altro canto se si immagina una particella α di bassa energia cinetica legata in un nucleo, anch'essa vede questa stessa barriera coulombiana ma dall'interno del nucleo, e nondimeno riesce talvolta ad uscire dal nucleo. Come ciò possa succedere costituisce un notevole rompicapo, finchè non si capì che l'emissione di particelle α da un nucleo è un fenomeno squisitamente quantistico, legato all'*effetto tunnel*.

Trasmissione attraverso una barriera rettangolare

Si consideri dapprima il caso di una barriera di potenziale rettangolare monodimensionale, distinguendo tre regioni

$$\begin{aligned}
\text{I: } & V = 0 & -\infty < x < 0 \\
\text{II: } & V = U & 0 < x < b \\
\text{III: } & V = 0 & b < x < \infty
\end{aligned}$$

Per una particella con energia cinetica $E < U$ la barriera risulta classicamente impenetrabile. Dal punto di vista quantistico essa ha invece una *trasparenza* non nulla.

Si tratti la particella come un'onda di lunghezza d'onda ridotta $\lambda = \hbar/mv =$

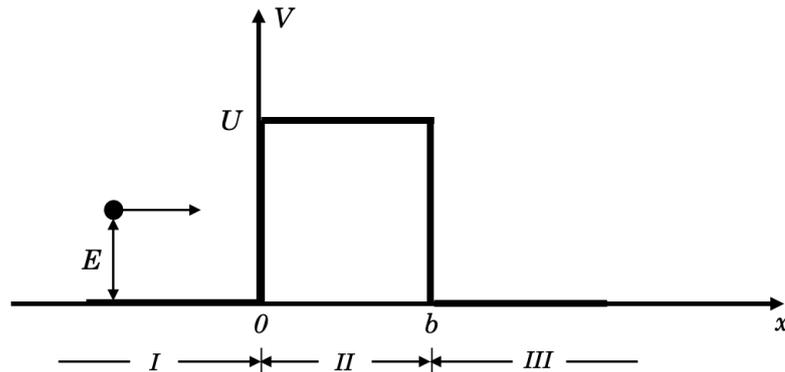


Figura 5.5: Barriera rettangolare monodimensionale.

$\hbar/\sqrt{2mE}$, con m la massa ridotta del sistema, e ampiezza A_1 . Una parte dell'onda, con ampiezza B_1 , è riflessa dalla barriera in $x = 0$ e una parte, con ampiezza A_2 , trasmessa. Similmente in $x = b$, una parte dell'onda

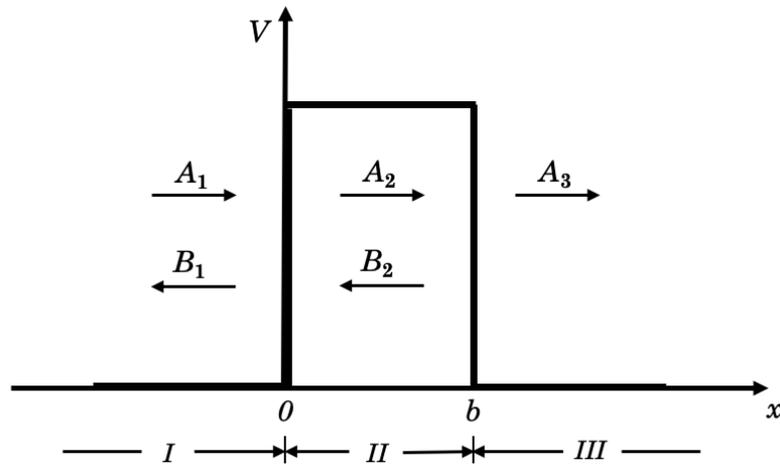


Figura 5.6: Trasmissione e riflessione da barriera rettangolare.

penetrata nella barriera è riflessa con ampiezza B_2 e la parte restante emer-

ge dall'altra parte della barriera con ampiezza A_3 . Si definisce *fattore di penetrazione della barriera* il rapporto

$$P = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \quad (5.21)$$

e *trasparenza*, o *coefficiente di trasmissione* della barriera, il rapporto

$$T = \frac{|A_3|^2 k_{III}}{|A_1|^2 k_I} \quad (5.22)$$

con k_{III} e k_I i numeri d'onda $1/\lambda$ nelle regioni *III* e *I*.

Le funzioni d'onda della particella nelle diverse regioni si ottengono come soluzioni dell'equazione di Schrödinger unidimensionale

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0 \quad (5.23)$$

Come funzioni d'onda per la particella incidente nella regione *I* nella direzione positiva di x , e per la riflessa sempre nella regione *I* ma nella direzione negativa di x , si scelgono onde piane

$$\begin{aligned} A_1 e^{ik_I x} \\ B_1 e^{-ik_I x} \end{aligned}$$

per cui la funzione d'onda totale nella regione *I* si ottiene come sovrapposizione lineare di queste due componenti

$$\psi_I = A_1 e^{ik_I x} + B_1 e^{-ik_I x} \quad (5.24)$$

con numero d'onda

$$k_I = \frac{1}{\lambda_I} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (5.25)$$

Similmente per la regione *III*

$$\psi_{III} = A_3 e^{ik_{III} x}, \quad \text{con } k_{III} = k_I, \quad \text{in questo caso specifico.} \quad (5.26)$$

ψ_I e ψ_{III} sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger per le regioni *I* e *III*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad (5.27)$$

Nella regione *II* il termine energetico dell'equazione di Schrödinger è

$$E - V = E - U = -E_B \quad (5.28)$$

dove $E_B > 0$ svolge il ruolo di un'energia di legame. La soluzione anche

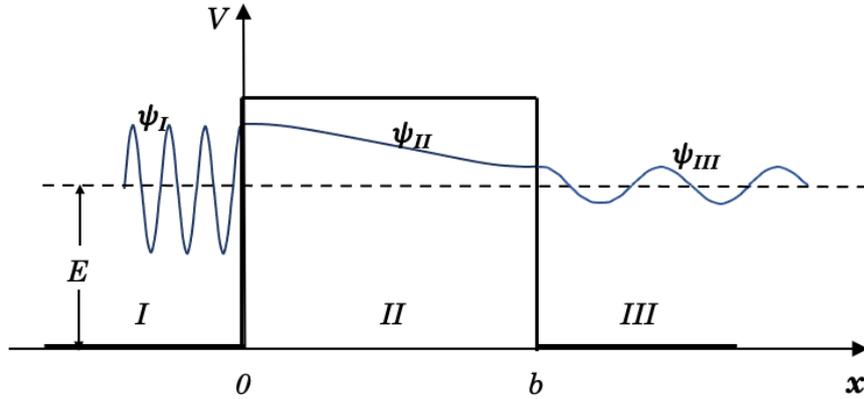


Figura 5.7: Funzione d'onda attraverso una barriera rettangolare.

in questo caso è una sovrapposizione lineare di componenti relative a moti progressivi e regressivi nella direzione x

$$\psi_{II} = A_2 e^{ik_{II}x} + B_2 e^{-ik_{II}x}, \quad \text{con} \quad k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{-2mE_B}}{\hbar} \quad (5.29)$$

Per $E < U$ il numero d'onda k_{II} è immaginario puro, conviene quindi introdurre un numero d'onda reale k'_{II} definito come

$$k'_{II} = ik_{II} = \frac{\sqrt{2mE_B}}{\hbar}$$

La funzione d'onda nella regione II diventa così

$$\psi_{II} = A_2 e^{k'_{II}x} + B_2 e^{-k'_{II}x} \quad (5.30)$$

Le equazioni per ψ_I , ψ_{II} e ψ_{III} contengono un'ampiezza nota A_1 (che può essere normalizzata ad 1) e quattro ampiezze incognite B_1 , A_2 , B_2 e A_3 che devono essere determinate per calcolare la trasparenza T .

I quattro coefficienti B_1 , A_2 , B_2 e A_3 devono avere valori tali da rendere soddisfatta la condizione di continuità delle funzioni d'onda e delle loro derivate prime in $x = 0$ e in $x = b$.

La funzione ψ_{II} non è periodica in quanto k_{II} è immaginario.

Le condizioni di continuità danno quattro equazioni

$$\begin{aligned} \psi_I(0) = \psi_{II}(0) &\rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ \psi_{II}(b) = \psi_{III}(b) &\rightarrow A_2 e^{k'_{II}b} + B_2 e^{-k'_{II}b} = A_3 e^{ik_{III}b} = A_3 e^{ik_I b} \end{aligned} \quad (5.31)$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}\right)_{x=0} &\rightarrow ik_I(A_1 - B_1) = k'_{II}(A_2 - B_2) \\ \left(\frac{\partial \psi_{II}}{\partial x}\right)_{x=b} = \left(\frac{\partial \psi_{III}}{\partial x}\right)_{x=b} &\rightarrow k'_{II}(A_2 e^{k'_{II}b} - B_2 e^{-k'_{II}b}) = ik_{III}A_3 e^{ik_{III}b} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Posto

$$p = \sqrt{2mE}, \quad q = \sqrt{2mE_b}, \quad k = k_I = k_{III} = \frac{p}{\hbar}$$

e moltiplicando la prima per ip/\hbar e sommando poi membro a membro con la terza si ottiene

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q}{ip}\right) A_2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q}{ip}\right) B_2 \quad (5.33)$$

Moltiplicando la seconda per $k'_{II} = q/\hbar$ e sommando poi membro a membro con la quarta si ottiene

$$A_2 = \frac{1}{2} A_3 e^{ikb} \left(1 + \frac{ip}{q}\right) e^{-qb/\hbar} \quad (5.34)$$

mentre sottraendo

$$B_2 = \frac{1}{2} A_3 e^{ikb} \left(1 - \frac{ip}{q}\right) e^{qb/\hbar} \quad (5.35)$$

Sostituendo nella [5.33](#) si ha

$$A_1 = \frac{1}{4} A_3 e^{ikb} \left[\left(1 + \frac{q}{ip}\right) \left(1 + \frac{ip}{q}\right) e^{-qb/\hbar} + \left(1 - \frac{q}{ip}\right) \left(1 - \frac{ip}{q}\right) e^{qb/\hbar} \right] \quad (5.36)$$

Si ottiene quindi per il coefficiente di trasmissione della barriera

$$T = \frac{|A_3|^2 k_{III}}{|A_1|^2 k_I} = \frac{4 k_I^2 k'_{II}{}^2}{(k_I^2 + k'_{II}{}^2)^2 \sinh^2 k'_{II} b + 4 k_I^2 k'_{II}{}^2} \quad (5.37)$$

Ricordando che

$$k_I^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad e \quad k'_{II}{}^2 = \frac{2mE_b}{\hbar^2} = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2}$$

si può scrivere T in termini dell'energia

$$T = \left\{ 1 + \frac{U^2}{4E(U-E)} \left[\frac{1}{4} (e^{2k'_{II}b} + e^{-2k'_{II}b}) - \frac{1}{2} \right] \right\}^{-1} \quad (5.38)$$

Al limite con barriere rettangolari spesse per cui $k'_{II}b \gg 1$ il termine in parentesi quadra si riduce in prima approssimazione a $(e^{2k'_{II}b}/4)$ e quindi

$$T \longrightarrow \left[\frac{U^2}{4E(U-E)} \frac{1}{4} e^{2k'_{II}b} \right]^{-1} = \frac{16E(U-E)}{U^2} e^{-2b\sqrt{2m(U-E)}/\hbar} \quad (5.39)$$

Si ha quindi

$$T \approx e^{\frac{-2b\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}} \quad (5.40)$$

che è sostanzialmente la *formula di Gamow*.

Questa si può ricavare anche partendo dalla [5.36](#), facendo la semplificazione

$$k_I \simeq k'_I I \quad \text{per cui} \quad E \simeq U - E \equiv /E_B$$

e supponendo, come fatto sopra, che $k'_I b \gg 1$, in tal caso si ha infatti $p/q = \sqrt{E/E_B} \simeq 1$, per cui

$$A_1 \approx \frac{1}{2} A_3 e^{ikb} e^{qb/\hbar} \quad (5.41)$$

Per la trasparenza si ha dunque

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} \approx 4 |e^{-ikb} e^{qb/\hbar}|^2 = 4 e^{-2qb/\hbar} \approx e^{-2b\sqrt{2m(U-E)}/\hbar} \quad (5.42)$$

e si vede che essa è maggiore per particelle di massa m piccola, potenziali $(U - E)$ non troppo elevati e ridotti spessori b , di conseguenza si può dedurre che gli elettroni dovrebbero superare agevolmente barriere di potenziale. Nel limite classico invece, ovvero per $\hbar \rightarrow 0$, la trasparenza tende a zero.

Nel caso di una barriera di forma arbitraria la trasparenza si ottiene generalizzando in modo approssimato la formula di Gamow, sostituendo la barriera effettiva con una barriera rettangolare *equivalente* che abbia un'altezza U_{eff} e una larghezza $(b - a)$ opportune e tali che

$$\sqrt{\frac{2m(U_{eff} - E)}{\hbar^2}} = \frac{\int_a^b \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}} dx}{b - a} \quad (5.43)$$

per cui la trasparenza si scrive come

$$T \approx e^{-2 \sqrt{\frac{2m(U_{eff} - E)}{\hbar^2}} (b - a)} = e^{-2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m[V(x) - E]}{\hbar^2}} dx} \quad (5.44)$$

Trasmissione attraverso la barriera di potenziale nucleare

Si tratta ora il problema più realistico di una barriera di potenziale a simmetria sferica che rappresenti quello sentito da una particella carica entro un nucleo.

Data la simmetria assunta per il potenziale, si può fattorizzare la funzione d'onda espressa in coordinate polari sferiche r, ϑ, φ , nelle singole variabili

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) = f(r) Y(\vartheta, \varphi) \quad (5.45)$$

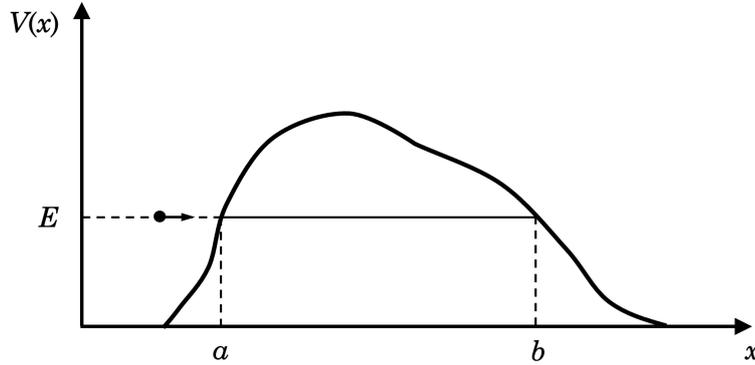


Figura 5.8: Barriera di forma arbitraria.

Come per l'atomo di idrogeno, l'equazione di Schrödinger del sistema può essere scissa in due parti, una dipendente dalla sola variabile radiale r , e una dalle sole variabili angolari ϑ e φ

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E_{tot} - V) \psi = 0 \quad (5.46)$$

Uguagliando le due parti a una medesima costante $\ell(\ell+1)$, con ℓ un numero positivo o nullo, si ottengono due equazioni differenziali, quella angolare e quella radiale.

L'equazione angolare

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin^2 \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell+1) Y = 0 \quad (5.47)$$

ha come soluzioni le armoniche sferiche

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (5.48)$$

con $P_\ell^m(\cos \vartheta)$ le funzioni associate di Legendre.

L'equazione radiale

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{df(r)}{dr} \right] + \frac{2m}{\hbar^2} \left[(E_{tot} - V) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] f(r) = 0 \quad (5.49)$$

contiene la fisica del problema, in quanto contiene l'energia totale E_{tot} ed il potenziale $V = V(r)$ del sistema fisico *nucleo + particella*.

Introducendo la funzione d'onda radiale modificata $u(r) = rf(r)$, la 5.49 diventa

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[(E_{tot} - V) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0 \quad (5.50)$$

che confrontata con l'equazione di Schrödinger per il caso unidimensionale, mostra sostanzialmente la presenza di un ulteriore termine di energia potenziale, ovvero

$$\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad (5.51)$$

che corrisponde ad un *potenziale centrifugo*, essendo sostanzialmente espresso come il quadrato di un operatore *momento angolare* fratto un operatore *momento d'inerzia*.

La [5.2.3](#) è quindi una sorta di energia rotazionale quanto-meccanica associata al moto delle particelle collidenti intorno al loro comune centro di massa, ed ha l'effetto di aumentare la barriera di potenziale di un nucleo ogniqualvolta è presente un momento angolare orbitale relativo.

In tal modo sostanzialmente, il moto relativo tridimensionale di due particelle interagenti con potenziale $V(r)$ è ricondotto ad un moto unidimensionale nella coordinata r , pur di assumere come potenziale di interazione la somma

$$V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

La *barriera centrifuga* interviene quindi ogniqualvolta in cui in una disintegrazione o in un urto si abbia $\ell \neq 0$, anche per particelle elettricamente neutre, come si verifica quando un neutrone penetra la barriera nucleare. Essa agisce quindi nel senso di ridurre la probabilità di penetrazione della barriera.

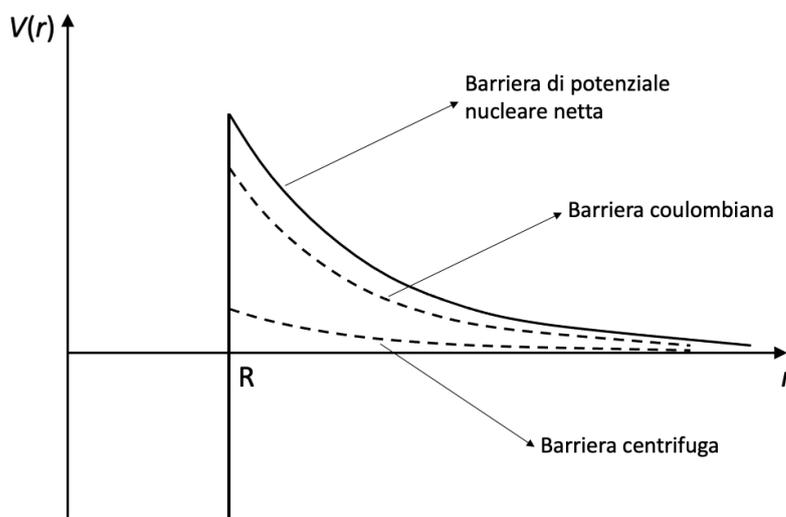


Figura 5.9: Contributo della barriera centrifuga.

Costante di decadimento α

Si ricava ora la relazione fra la trasparenza T e la costante λ_α di decadimento α . Si immagini un gran numero di uguali nuclei α -attivi visti ognuno come l'insieme del nucleo figlio e della particella α costretta a restare nel nucleo dalla presenza di una barriera di potenziale. Ciò è equivalente a considerare un fascio di particelle α , rappresentabile da un'onda di intensità I_0 , all'interno della barriera.

Si supponga che all'istante $t = 0$ ogni particella α incida sulla barriera del suo nucleo e che una frazione T di esse la attraversi. Si potrà esprimere quindi l'intensità dell'onda riflessa dalla barriera verso l'interno del nucleo dopo questo primo tentativo come $(1 - T)I_0$. Dopo n tentativi successivi nell'unità di tempo l'intensità è

$$I_n = (1 - T)^n I_0 = I_0 e^{n \ln(1-T)} \quad (5.52)$$

che per T molto piccolo si riduce a

$$\lim_{T \rightarrow 0} I_n = I_0 e^{-nT} \quad (5.53)$$

Detta v la velocità media della particella α nel nucleo di raggio R , il tempo medio Δt fra due successivi tentativi di attraversamento della barriera è dato da $\Delta t = 2R/v$. Il numero medio n di tentativi nel tempo t è quindi $n = tv/2R$. Di conseguenza

$$I_n = I_0 e^{-T \frac{v}{2R} t} \quad (5.54)$$

Il numero medio di tentativi per unità di tempo $dn/dt = v/2R$, considerata realisticamente un'energia cinetica di 8 MeV per la particella α nel nucleo, risulta dell'ordine di 10^{21} quindi così alto da poter esprimere I_n come una funzione praticamente *continua* del tempo

$$I_n \longrightarrow I(t) = I_0 e^{-\lambda_\alpha t} \quad (5.55)$$

con

$$\lambda_\alpha = T \frac{v}{2R} = T \frac{dn}{dt} = T \lambda_0 \quad (5.56)$$

la costante di decadimento.

Si osservi che λ_0 non cambia molto da nucleo a nucleo, ed è quindi praticamente sempre dell'ordine di 10^{21} s^{-1} , mentre T può variare molto da nucleo a nucleo.

Considerando ad esempio ${}^{238}\text{U}$, con $\lambda_0 \simeq 10^{21} \text{ s}^{-1}$, il numero n di tentativi nell'arco di una vita media $\tau = 6.5 \times 10^9$ anni, risulta pari a circa 10^{39} . Considerando ora la trasparenza T relativamente all'equazione radiale, nel-

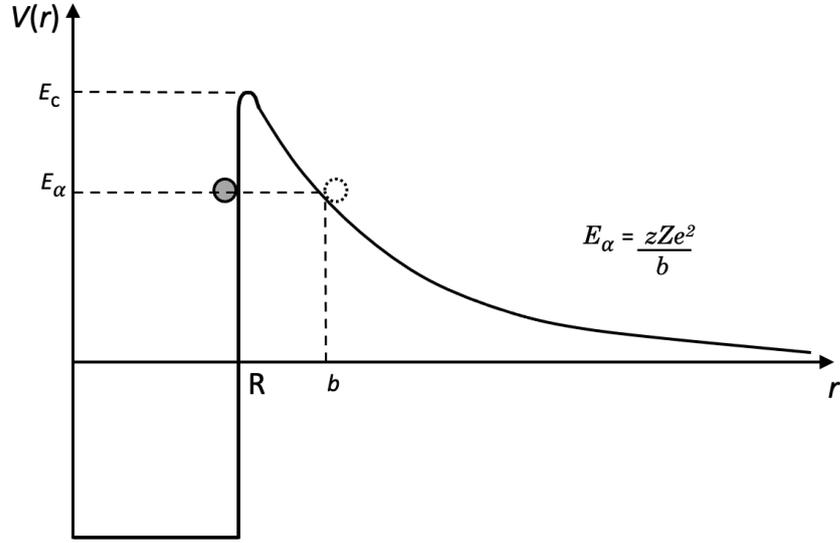


Figura 5.10: Schema posizionamento spaziale ed energetico della particella α di decadimento, rispetto alla barriera coulombiana.

l'ipotesi di un nucleo genitore a simmetria sferica e integrando fra $r = R$ ed $r = b$ per un potenziale a forma di barriera coulombiana (fig 5.10)

$$\begin{aligned}
 T &= e^{-2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m[V(r) - E]}{\hbar^2}} dr} = e^{-2 \int_R^b \sqrt{\frac{2m[(zZe^2/4\pi\epsilon_0 r) - E]}{\hbar^2}} dr} = \\
 &= e^{\sqrt{\frac{2mzZe^2}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \int_R^b \sqrt{\frac{1}{b} - \frac{1}{r}} dr} = e^{\sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \left(\sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} - \arccos\sqrt{\frac{R}{b}} \right)} \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

dove

$$G = \sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \left(\arccos\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right) \quad (5.58)$$

è detto *fattore di Gamow*, per cui

$$\lambda_\alpha = \lambda_0 e^{-G} \quad (5.59)$$

Se $E_{k,\alpha} \ll E_C$, allora $b \gg R$ e in prima approssimazione il termine in parentesi della 5.58 si riduce a $\pi/2 - \sqrt{R/b}$. Il fattore di Gamow può allora essere scritto come

$$G \simeq A + B\sqrt{R} \quad (5.60)$$

con A e B indipendenti da R

$$A = \sqrt{\frac{\pi m z Z e^2 b}{2 \epsilon_0 \hbar^2}}, \quad B = \sqrt{\frac{2 m z Z e^2 b}{\pi \epsilon_0 \hbar^2}} \quad (5.61)$$

Una ancor più grezza approssimazione, con tolleranza entro il 30%, pone $\pi/2 - \sqrt{R/b} \approx 1$, da cui

$$G \simeq \sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \sim (E_{k,\alpha})^{-1/2} \quad , \quad \text{con } b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0E} \quad (5.62)$$

che conduce direttamente alla legge di Geiger e Nuttal.

Si consideri ora l'esempio concreto



per il quale l'energia cinetica delle particelle α osservate è $E_{k,\alpha} = 4.05$ MeV, con una vita media $\tau_{232\text{Th}} = 1.39 \times 10^{10}$ y.

Per il raggio del torio si ottiene $R_{232\text{Th}} \simeq 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3} \simeq 7.4 \times 10^{-15}$ m.

$$T \simeq 4 \times 10^{-40} \quad (5.64)$$

La particella α ha dunque una probabilità estremamente piccola di penetrare la barriera. Questo spiega oltretutto perchè particelle α di bassa energia non siano assorbite da nuclei pesanti neppure grazie all'effetto tunnel.

Per una particella α legata in un nucleo la situazione è però diversa. La sua energia cinetica nella buca è dell'ordine di

$$E'_{k,\alpha} \simeq U_0 + E_{k,\alpha} \simeq 44 \text{ MeV} \quad (5.65)$$

e la corrispondente velocità si può dunque ottenere dall'espressione non relativistica

$$v_\alpha = \sqrt{\frac{2E'_{k,\alpha}}{M_\alpha}} \simeq 0.15 c \quad (5.66)$$

Essendo confinata nella piccola regione di spazio associata al volume del nucleo essa sbatterà quindi contro la barriera di potenziale con una frequenza data approssimativamente da

$$\frac{v_\alpha}{R_0 A^{1/3}} \simeq 6.0 \times 10^{21} \text{ s}^{-1} \quad (5.67)$$

Si deduce una probabilità al secondo per la particella α di sfuggire pari a

$$P(\text{emissione } \alpha) \simeq \frac{v_\alpha}{R_0 A^{1/3}} T \simeq 2.4 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad (5.68)$$

che coincide con la costante di decadimento λ_α cui corrisponde una vita media

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} \simeq 0.4 \times 10^{18} \text{ s} \simeq 1.3 \times 10^{10} \text{ y} \quad (5.69)$$

valore molto prossimo a quello osservato sperimentalmente per il ${}^{232}\text{Th}$.

La probabilità di emissione dipende quindi sensibilmente dalla massa e dall'energia della particella emessa, e questo ha un risvolto importante anche

nel fenomeno della fissione spontanea. Il fatto poi che la probabilità di emissione risulti proporzionale ad $E_{k,\alpha}^{1/2}$, e che quindi la vita media per decadimento α si accorci al crescere di $E_{k,\alpha}$, è consistente con quanto ci si attende anche intuitivamente.

In tabella sono riportati i valori calcolati di τ_α per alcune sequenze isotopiche, a confronto con i relativi valori sperimentali; $(b - R)$ è la corrispondente larghezza della barriera.

	Q_α (MeV)	R (fm)	b (fm)	G	τ_{exp} (s)	τ_{th} (s)
${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th}$	4.27	8.52	60.7	0.53	2.0×10^{17}	3.3×10^{17}
						$({}^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\text{Pa} \rightarrow {}^{234}_{92}\text{U})$
${}^{234}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{230}_{90}\text{Th}$	4.86	8.49	53.3	0.51	1.1×10^{13}	1.1×10^{13}
${}^{230}_{90}\text{U} \rightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra}$	4.77	8.45	53.1	0.51	3.5×10^{12}	3.9×10^{12}
${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn}$	4.87	8.41	50.9	0.50	7.4×10^{10}	7.4×10^{10}
${}^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po}$	5.59	8.37	43.3	0.46	4.8×10^5	4.2×10^5
${}^{218}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\text{Pb}$	6.11	8.33	38.7	0.43	2.6×10^2	1.6×10^2
						$({}^{214}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{214}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{214}_{84}\text{Po})$
${}^{214}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{210}_{82}\text{Pb}$	7.84	8.28	30.1	0.36	2.3×10^{-4}	1.1×10^{-4}
						$({}^{210}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{210}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\text{Po})$
${}^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Th}$	5.41	8.24	43.7	0.47	1.7×10^7	5.8×10^5

5.3 Radioattività β

Il decadimento β nucleare è dovuto all'azione dell'interazione debole che è responsabile di molti altri processi fisici: numerosi decadimenti di particelle elementari, le reazioni indotte da neutrini, la non conservazione della parità nei decadimenti γ dei nuclei e negli spettri ottici degli atomi. Tutti i leptoni e gli adroni conosciuti sono soggetti all'interazione debole. In astrofisica il suo ruolo è importante nelle reazioni nucleari all'interno del Sole e nell'esplosione delle supernovae. Alcuni processi deboli, come l'asimmetria angolare del decadimento muonico, trovano promettenti applicazioni nell'analisi di effetti chimici fini, ... (Okun).

Svariati meccanismi coinvolgono elettroni e nucleo di uno stesso atomo; si vedrà dapprima la *conversione interna*, per poi soffermarsi più ampiamente sul *decadimento β* .

5.3.1 Conversione interna

In un atomo la sovrapposizione spaziale tra la funzione d'onda di un suo elettrone, particolarmente uno delle shell più interne, e quella del nucleo non è mai nulla, da cui una probabilità finita che un elettrone si trovi dentro il nucleo del proprio atomo. Quando ciò si verifica l'elettrone ha la possibilità di accoppiarsi elettromagneticamente ad un eventuale stato energetico eccitato del nucleo acquisendone direttamente l'energia associata e determinando dunque la diseccitazione del nucleo senza che questo emetta un raggio γ .

In tal caso l'elettrone viene emesso dall'atomo, non dal nucleo, con un'energia cinetica $E_{k,e}$ pari all'energia di transizione E^* dello stato eccitato del nucleo, equivalente alla differenza, moltiplicata per c^2 , fra la massa del nucleo eccitato e dello stesso non eccitato, meno l'energia atomica B_e di legame dell'elettrone

$$E_{k,e} = E^* - B_e \quad (5.70)$$

Il processo di conversione interna non determina quindi una variazione del numero atomico dell'atomo coinvolto, ma soltanto una sua *ionizzazione*, costituendo nel contempo un meccanismo che permette al nucleo di diseccitarsi tramite un'interazione elettromagnetica ma senza produrre fotoni γ nello stato finale.

La gran parte degli elettroni emessi per conversione interna provengono dalle shell K, le più vicine ai nuclei, ma ve ne sono anche dalle shell L ed M.

Dopo l'emissione dell'elettrone per conversione interna, tipicamente un elettrone di una shell meno legata dello stesso atomo *cade* a riempire la posizione lasciata libera nella shell più interna, con la concomitante emissione di un raggio X caratteristico del salto energetico effettuato.

Lo spettro d'emissione di elettroni per conversione interna è quindi *discreto* e accompagnato dall'emissione ritardata di raggi X.

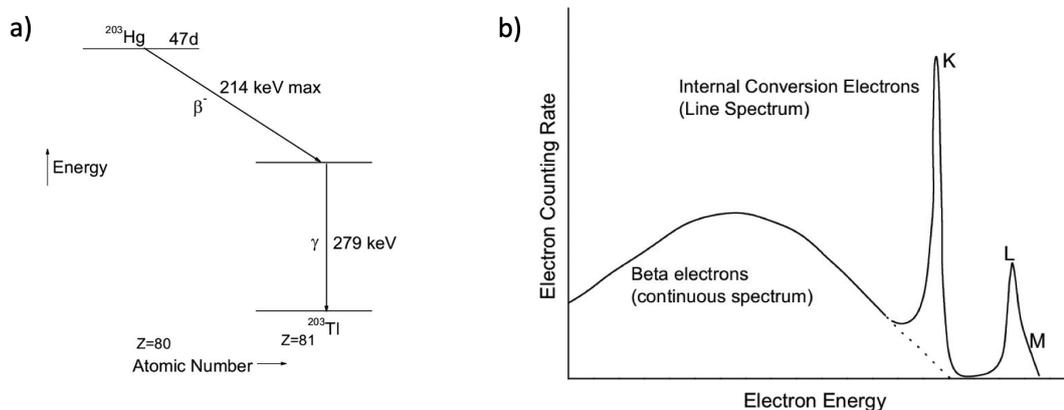


Figura 5.11: a) Decadimento β del mercurio ^{203}Hg . b) Spettro β del ^{203}Hg ; oltre alla parte continua si vedono anche i picchi dell'emissione per conversione interna dalle shell K, L ed M (non risolta).

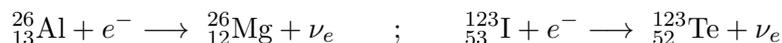
5.3.2 Decadimento β

Un nucleo con sovrabbondanza o viceversa con scarsità di neutroni, in cui cioè il rapporto N/Z è maggiore o rispettivamente minore che per i nuclei stabili, può trasformarsi in un nucleo più stabile emettendo un elettrone o rispettivamente un positrone. Il processo è detto *decadimento β* e viene indicato come in [5.4b](#) e in [5.4c](#), distinguendo in β^- , il primo ad essere osservato sperimentalmente da Rutherford nel 1900, e β^+ a seconda che si tratti dell'emissione di elettroni o positroni. Per la conservazione della carica elettrica il numero di protoni del nucleo figlio è maggiore o minore di un'unità rispetto al nucleo genitore, senza che ciò conduca a una variazione del numero complessivo di nucleoni, fra genitore e figlio.

In pratica all'interno del nucleo genitore si è avuta o la trasformazione di un neutrone in un protone, decadimento β^- , o la trasformazione di un protone in un neutrone, decadimento β^+ . Ricordando che i valori delle masse del protone, del neutrone e dell'elettrone (uguale a quella del positrone) sono rispettivamente $938.272 \text{ MeV}/c^2$, $939.565 \text{ MeV}/c^2$ e $0.511 \text{ MeV}/c^2$, si deduce che il decadimento β^- è energeticamente permesso anche per neutroni liberi che hanno una vita media $\tau_n = 879.5 \text{ s}$, mentre invece non lo è il decadimento β^+ per protoni liberi, che infatti risultano stabili con un limite inferiore per la vita media di $2.2 \cdot 10^{29}$ anni. La possibilità di decadimenti β^- e soprattutto β^+ , nei nuclei dipende dalle energie di legame relative degli isobari con diversi valori di Z ed N .

Un nucleo con un numero di neutroni inferiore rispetto a un corrispondente isobaro stabile, ovvero con un eccesso di protoni, può ridurre di un'unità

la propria carica anche assorbendo un elettrone da un orbitale atomico del proprio atomo, tipicamente da un orbitale K. Questo processo è detto *cattura K*.



In seguito a questa cattura un elettrone da un orbitale più esterno casca nell'orbitale dell'elettrone catturato dal nucleo, con la conseguente emissione di uno o più raggi-X. Anche in questo caso il numero di nucleoni del nucleo resta comunque invariato.

Nelle misure sui decadimenti β le uniche particelle che venivano osservate come prodotti di decadimento erano elettroni o positroni, assieme al corrispondente nucleo figlio; ciò fece inizialmente pensare che si trattasse di un processo di disintegrazione in due corpi, come il decadimento α . In tal caso, dalla conservazione dell'energia nel centro di massa del nucleo X genitore, per l'energia totale E_e dell'elettrone si dovrebbe avere, come mostrato nella relazione [B.5](#) dell'Appendice [B](#)

$$E_e = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X}$$

e di conseguenza, per l'energia cinetica $E_{k,e}$ dell'elettrone

$$E_{k,e} = \frac{M_X^2 c^2 + m_e^2 c^2 - M_Y^2 c^2}{2M_X} - m_e c^2$$

Ci si attendeva, in base a quest'ipotesi e come per il decadimento α , che il prodotto più leggero del decadimento, l'elettrone o il positrone, raccolta la gran parte dell'energia a disposizione del decadimento la mostrasse in uno spettro discreto con un unico valore, un picco ben definito centrato attorno ad $E_{k,e}$.

Gli spettri misurati di emissione β hanno invece un andamento continuo, a partire da un valore minimo, compatibile con zero, fino ad annullarsi in corrispondenza ad un valore massimo che entro le precisioni sperimentali, corrisponde ad $E_{max} \cong E_{k,e}$. Quando gli spettri β furono osservati per le prime volte ci fu anche la tentazione di mettere in discussione la validità di un principio che fino ad allora era apparso fermo e incrollabile, la conservazione dell'energia per un sistema fisico isolato^[1], e un nucleo durante il processo di decadimento β , può senz'altro essere considerato come un sistema fisico isolato.

Se inoltre il decadimento β fosse proprio in due soli corpi nello stato finale, ciò implicherebbe che neppure il momento angolare totale del nucleo genitore sarebbe conservato nel decadimento. Siccome infatti il numero di nucleoni, fermioni con spin semi-intero pari ad $\hbar/2$, resta invariato fra nucleo genitore e figlio, indipendentemente da qualsiasi possibile variazione di

¹Niels Bohr fu per un pò uno dei più ferventi sostenitori di quest'ipotesi!

Un decadimento in almeno tre corpi dà ragione dell'andamento continuo degli spettri energetici e non solo.

La conservazione della carica elettrica richiede che la particella proposta da Pauli sia neutra. Siccome inoltre le energie cinetiche massime degli elettroni/positroni emessi nei decadimenti β corrispondono praticamente all'energia che avrebbero se il decadimento fosse in due soli corpi, se ne deduce che la massa di tale particella è molto piccola, sostanzialmente compatibile con *zero*.

Uno dei compiti di questa particella era anche di garantire la conservazione del momento angolare nel decadimento β , e da ciò consegue che deve essere un fermione con momento angolare di spin pari ad $\hbar/2$.

Le caratteristiche dedotte per questa particella, a meno della massa, la fanno in un certo qual modo assomigliare a un neutrone, ed è per questo che Fermi la chiamò *neutrino*, indicata dalla lettera ν .

Con l'introduzione del neutrino le [5.71](#) si possono più correttamente scrivere

$${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu} \quad (5.72a)$$

$${}^A_Z X \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu \quad (5.72b)$$

$${}^A_Z X + e^- \longrightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu \quad (5.72c)$$

tenendo conto della differenza fra neutrino e anti-neutrino.

Sperimentalmente si trova che in una sequenza isobarica il nucleo con massa inferiore è stabile rispetto al decadimento β .

Considerando i nuclei con numero di massa A dispari si vedano come esempio gli isobari con $A = 101$. In tal caso l'isobaro di massa minima è il rutenio ${}^{101}_{44}\text{Ru}$, un nuclide pari-dispari che per quanto visto nei paragrafi [1.4](#) e [2.5.2](#), è in corrispondenza al minimo della parabola che descrive la sequenza isobarica. Isobari con più neutroni, quali ${}^{101}_{42}\text{Mo}$ e ${}^{101}_{43}\text{Tc}$, decadono convertendo un neutrone del nucleo in un protone secondo la

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (5.73)$$

Il numero atomico di ogni nucleo figlio è quindi superiore di un'unità a quello del nucleo genitore.

Si ha dunque

$${}^{101}_{42}\text{Mo} \rightarrow {}^{101}_{43}\text{Tc} + e^- + \bar{\nu}_e$$

$${}^{101}_{43}\text{Tc} \rightarrow {}^{101}_{44}\text{Ru} + e^- + \bar{\nu}_e$$

Gli isobari con un eccesso di protoni rispetto al ${}^{101}_{44}\text{Ru}$ decadono invece β^+ convertendo un protone interno al nucleo secondo la

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (5.74)$$

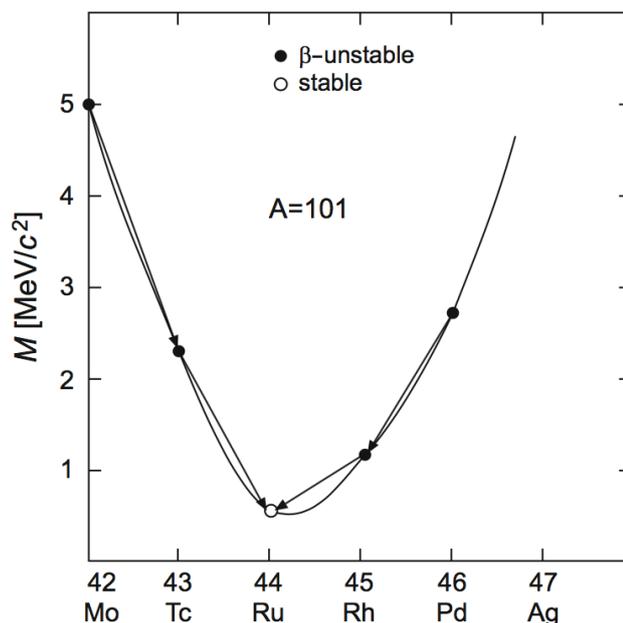
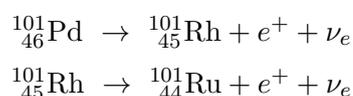


Figura 5.13: Sequenza isobarica del rutenio $^{101}_{44}\text{Ru}$

In tal caso l'isobaro $^{101}_{44}\text{Ru}$ è prodotto dalla sequenza



Si ricordi che il principio di conservazione dell'energia vieta la [5.74](#) al di fuori dei nuclei, mentre invece la [5.73](#) è permessa. Il fatto che la [5.74](#) possa aver luogo all'interno di un nucleo implica che sia energeticamente permessa, ovvero che l'incremento in energia di legame del nucleo figlio derivante dal decadimento sia sufficiente, cioè $\geq (m_n + m_e + m_{\bar{\nu}_e} - m_p) c^2$.

Si considerino ora i nuclei con numero di massa A pari. Sempre per quanto visto nei paragrafi [1.4](#) e [2.5.2](#), in questo caso le sequenze isobariche si dispongono secondo due diversi andamenti parabolici, uno per i nuclei dispari-dispari e uno, separato del doppio dell'energia di accoppiamento $2|B_{ac}(A, Z)|$ nella formula di Weizsäcker, per i nuclei pari-pari.

Capita spesso che soprattutto per valori di $A > 70$ vi sia più di un isobaro β -stabile. Si considerino come esempio gli isobari con $A = 106$.

Gli isobari pari-pari $^{106}_{46}\text{Pd}$ e $^{106}_{48}\text{Cd}$ sono sulla parabola inferiore e $^{106}_{46}\text{Pd}$, il più stabile dei due, si trova in corrispondenza al minimo della parabola pari-pari. Il $^{106}_{48}\text{Cd}$ è β -stabile in quanto i due isobari dispari-dispari a lui più prossimi sono situati a livelli energetici superiori, come mostrato in

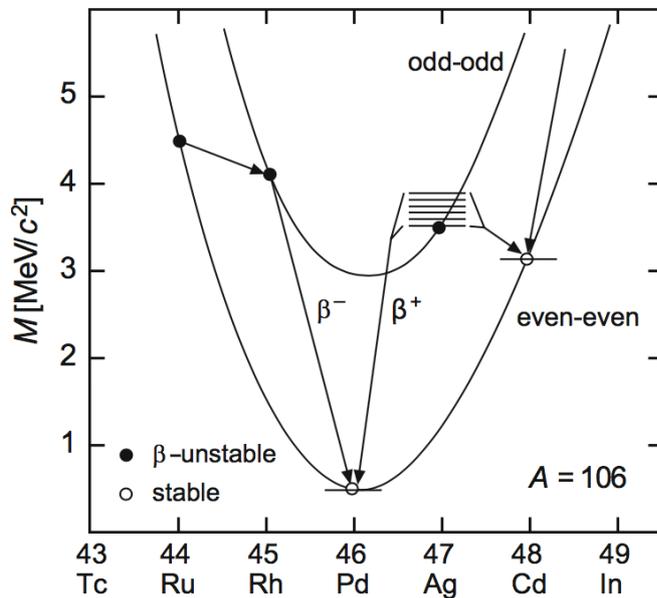
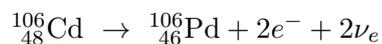


Figura 5.14: Sequenze isobariche del Palladio $^{106}_{46}\text{Pd}$

figura 5.14. Il decadimento del $^{106}_{48}\text{Cd}$ in $^{106}_{46}\text{Pd}$ sarebbe possibile soltanto attraverso un cosiddetto *decadimento doppio β* ⁴



La probabilità di un simile processo è però così piccola che il $^{106}_{48}\text{Cd}$ può essere considerato praticamente stabile.

I nuclei dispari-dispari hanno sempre almeno un nucleo pari-pari loro prossimo più fortemente legato nella sequenza isobarica, e di conseguenza sono instabili. Le sole eccezioni a questa regola sono i nuclei leggeri ^2_1H , ^6_3Li , $^{10}_5\text{B}$ e $^{14}_7\text{N}$ che sono β -stabili in quanto l'aumento dell'energia di asimmetria nella formula di Weizsäcker supera in valore assoluto la diminuzione nell'energia d'accoppiamento.

Vi sono anche nuclei che possono decadere sia β^- che β^+ , come il potassio $^{40}_{19}\text{K}$ e il $^{64}_{29}\text{Cu}$.

Cattura elettronica

Per quanto concerne la cattura elettronica o *cattura K* essa, come per la conversione interna, è dovuta alla non trascurabile sovrapposizione spaziale che la funzione d'onda di un tale elettrone ha con la funzione d'onda del nucleo, favorendo così la possibilità che un protone di questo e l'elettrone si

⁴Si veda ad esempio Povh et al. 7^a ed., Cap. 18, par. 7.

combinino per formare un neutrone e un neutrino secondo la



Questa reazione si osserva prevalentemente in nuclei pesanti per i quali il raggio nucleare è maggiore e l'estensione radiale degli orbitali atomici è minore. Solitamente gli elettroni catturati provengono dall'orbitale più interno, K appunto, la cui funzione d'onda ha la massima sovrapposizione spaziale con la zona occupata dal nucleo. Similmente al processo di conversione interna, la cattura di un elettrone dall'orbitale K ingenera la successiva cascata, nella vacanza da lui lasciata, di un altro elettrone dell'atomo proveniente da orbitali più esterni, quindi a energie più elevate, con la conseguente emissione di caratteristici raggi-X.

Questo processo è energeticamente in competizione col decadimento β^+ , come si può vedere ad esempio nel caso del $^{40}_{19}\text{K}$, di cui in figura 5.15 è riportato lo schema dei livelli. Il $^{40}_{19}\text{K}$ è un isotopo naturale con abbondanza

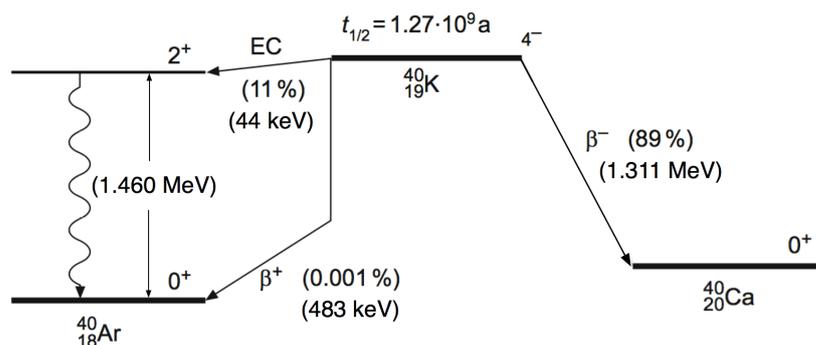


Figura 5.15: Decadimenti β e cattura K del $^{40}_{19}\text{K}$

dello 0.0117 % che può decadere β^- verso il livello fondamentale del $^{40}_{20}\text{Ca}$, con probabilità dell'89.25 % e un Q-valore di 1.311 MeV. Ma esso può anche, con probabilità del 10.55 %, dar luogo a una cattura K con successiva emissione di fotoni da 1.460 MeV verso il livello fondamentale di $^{40}_{18}\text{Ar}$. La residua probabilità di decadimento β^+ , sempre verso $^{40}_{18}\text{Ar}$, è pari a circa 0.001 % e l'energia di 483 keV a disposizione di positrone e neutrino tiene conto della frazione, pari a 1.022 MeV, necessaria a creare la coppia e^+e^- .

Vite medie

Per quanto concerne le vite medie caratteristiche dei decadimenti dei nuclei β -instabili, $\tau_\beta = 1/\lambda_\beta$, i loro valori spaziano fra circa 10^{16} anni e circa 10^{-3} secondi, con la massima energia d'emissione E_0 variabile da alcune frazioni di MeV fino a circa 7 MeV.

Un'analisi fenomenologica effettuata da Sargent mostra che la costante di

decadimento β va circa come la quinta potenza dell'energia rilasciata

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} \propto E^5 \quad (5.76)$$

e dipende dalle caratteristiche dei nuclei genitore e figlio.

Non vi sono casi di due isobari contigui che siano β -stabili, anche se talvolta uno dei due ha vita media così lunga da poter essere a tutti gli effetti considerato stabile. Un ben noto esempio è il ^{40}K che decadendo sia β^- che β^+ , si trasforma in altri isobari per i quali entra in competizione anche la cattura K. I prodotti stabili del decadimento del ^{40}K sono ^{40}Ar e ^{40}Ca , rappresentando un caso di due nuclei stabili con uguale numero di massa A , come in figura [5.15](#)

La scelta del ^{40}K come esempio non è casuale, infatti esso contribuisce considerevolmente all'esposizione radioattiva di tutte le strutture biologiche: il potassio è un elemento essenziale nella trasmissione dei segnali nervosi e la sua concentrazione nel corpo umano è tale da far sì che esso costituisca circa il 16% della radiazione naturale cui siamo mediamente esposti.

I nuclidi β -instabili con emissione di positroni hanno tutti $Z < 80$.

5.3.3 Regole di Sargent

Nel 1933 Sargent, con l'intento di cercare regolarità che permettessero di capire il meccanismo alla base dei decadimenti β , mostrò che graficando il log. della costante di decadimento λ_β verso il log. della massima energia E_{max} degli elettroni da nuclei β -emettitori, la gran parte dei punti trovati cadeva in prossimità di due curve quasi rettilinee, come in figura [5.16](#).

Il diagramma risultante, detto di Sargent, costituisce una regola empirica del tipo di quella di Geiger-Nuttall per il decadimento α .

In questo caso però le costanti di disintegrazione non cambiano molto velocemente con l'energia e le due curve non corrispondono ognuna a una diversa serie radioattiva. Per un definito valore di E_{max} la curva superiore fornisce un valore di λ_β circa 100 volte superiore a quello corrispondentemente fornito dalla curva inferiore, per cui, fissata un'energia, un decadimento β prossimo alla curva inferiore è circa 100 volte meno probabile di quello corrispondente sulla curva superiore. Ciò ha portato a chiamare *transizioni permesse* quelle rappresentate dalla curva superiore e *transizioni proibite* quelle rappresentate dalla curva inferiore. Chiaramente i termini "permesse" e "proibite" vanno intesi come valori di probabilità sostanzialmente diversi di decadimento spontaneo.

La descrizione della globalità dei dati sperimentali richiede di considerare separatamente curve di Sargent per nuclidi con numeri atomici piccoli, intermedi o grandi. In tutti i casi si ottengono più curve, una delle quali viene identificata come rappresentante le transizioni permesse e le altre come rappresentanti diversi livelli di transizioni proibite.

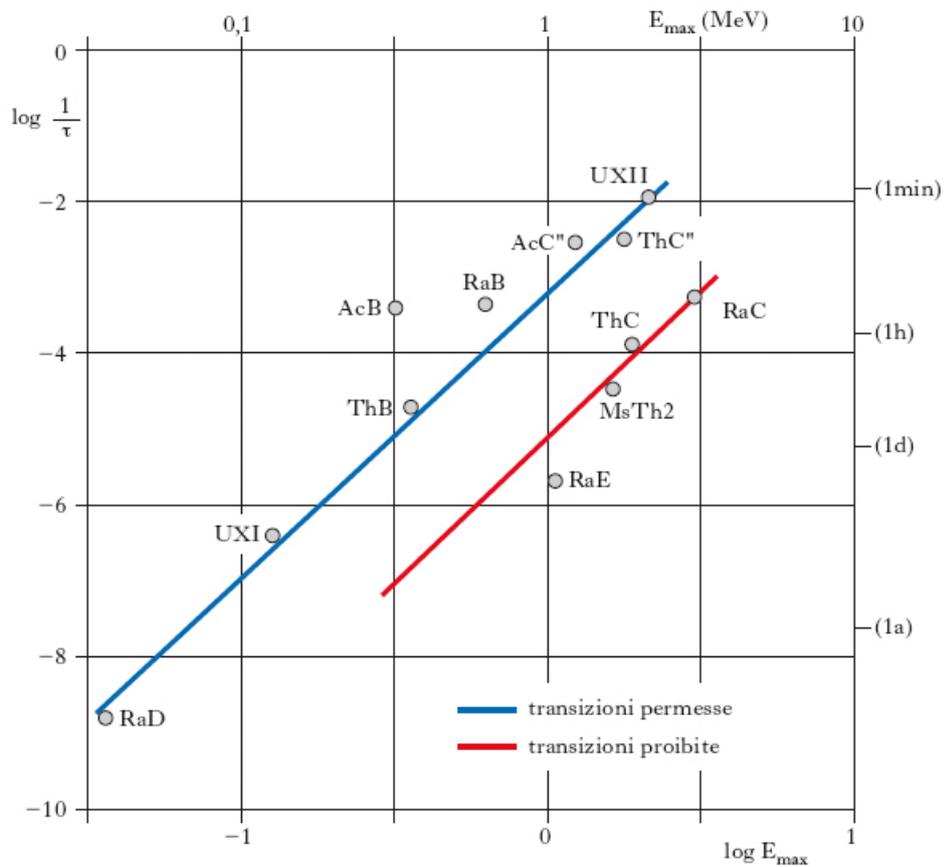


Figura 5.16: Tipico diagramma di Sargent.

Una teoria del decadimento β deve naturalmente poter riprodurre sia queste regolarità nei dati sperimentali che le caratteristiche degli spettri β .

5.3.4 Teoria di Fermi dell'interazione debole

Le vite medie misurate τ_β associate ai decadimenti β sono molto maggiori dei tempi caratteristici coinvolti nelle interazioni nucleari ed elettromagnetiche: infatti la scala temporale tipica dei processi governati dall'interazione forte è dell'ordine dei 10^{-23} s o inferiore, mentre quella dei processi governati dall'interazione elettromagnetica è dell'ordine dei 10^{-16} s. Nonostante quindi i decadimenti β siano chiaramente un fenomeno nucleare, essi non coinvolgono però né la forza nucleare né quella elettromagnetica, e data la piccolezza delle probabilità $\lambda_\beta = 1/\tau_\beta$ di decadimento ad essi associate, l'interazione che li governa deve essere *debole*.

Questa conclusione condusse Fermi a postulare l'esistenza di una nuova forza responsabile dei decadimenti β , la *forza debole*, che essendo efficace soltan-

to all'interno dell'ambiente nucleare dev'essere a breve raggio d'azione. La bassissima intensità di questa forza è quindi responsabile delle lunghe vite medie osservate nei decadimenti β . In termini di intensità relative, assunta come pari ad 1 quella della forza forte, si ha rispettivamente 10^{-2} per l'elettromagnetica, 10^{-5} per la debole e 10^{-39} per la gravitazionale.

Così come nel caso dell'interazione elettromagnetica, il ridotto valore dell'intensità d'accoppiamento della forza debole permette di affrontare con tecniche perturbative la formulazione di una teoria del decadimento β .

Si è visto che all'interno dei nuclei non vi possono essere, stabilmente presenti, elettroni (dimensioni nucleari, modello Rutherford, ecc. ecc.), e conseguentemente si deduce che gli elettroni emessi durante il decadimento β non possono provenire dal nucleo ma devono essere stati prodotti al momento del decadimento. Questa sequenza è abbastanza analoga a quanto avviene nelle transizioni atomiche, in cui i fotoni non pre-esistono all'interno degli atomi ma sono prodotti al momento delle transizioni.

Così come la transizione in un atomo può essere capita come indotta, ad esempio, da un'interazione di dipolo, e quindi calcolata utilizzando la teoria delle perturbazioni, similmente il decadimento β può essere capito come dovuto alla debole forza rappresentata dall'Hamiltoniano di interazione debole.

Il calcolo della probabilità λ_β di transizione per unità di tempo, e della forma dello spettro energetico delle particelle emesse nel processo, può quindi essere affrontato come fatto da Fermi⁵ con tecniche perturbative utilizzando la Regola d'Oro n. 2.

I risultati ottenuti da Fermi sono poi stati superati da sviluppi successivi e infine dalla *teoria elettrodebole* di S. Glashow, A. Salam e S. Weinberg. è nondimeno istruttivo e utile ripercorrere il calcolo nella sua forma originale; si tratta di una teoria di campo in cui l'Hamiltoniano d'interazione è un operatore agente sui campi fermionici tramite assorbimento o emissione di fermioni.

5.3.5 Il calcolo di Fermi

Fermi considera valida l'ipotesi di Pauli dell'esistenza del neutrino e suppone che in un decadimento β l'elettrone e il neutrino vengono formati al momento del decadimento e della loro emissione dall'atomo. Siano ψ_e e ψ_ν le funzioni d'onda che descrivono gli stati nei quali sono state create le due particelle e si assuma che siano rappresentabili da due onde piane di impulsi rispettivamente \mathbf{p}_e e \mathbf{p}_ν

$$\psi_e = N_e e^{i\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = N_\nu e^{i\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (5.77)$$

dove N rappresenta un fattore di normalizzazione. ψ_e è in realtà più complicata di quanto detto in quanto sente l'influenza della carica nucleare Ze .

⁵E. Fermi, Tentativo di una teoria dei raggi β , Nuovo Cimento 11 (1934) 1-19.

Considerarla un'onda piana è una buona approssimazione se l'energia dell'elettrone è molto maggiore dell'energia media di legame degli elettroni del nucleo di numero atomico Z . Per elettroni di bassa energia, dell'ordine ad esempio di 200 KeV, e in prossimità di un nucleo con alto valore di Z , ψ_e è fortemente perturbata.

Fermi assunse che la probabilità d'emissione dipenda dalla probabilità per l'elettrone e il neutrino di essere "creati" contemporaneamente e nello stesso punto⁶, coincidente con le coordinate del centro di massa O del nucleo, che si considera anche come origine del sistema di riferimento. La probabilità d'emissione dipende quindi dal prodotto $|\psi_e(O)|^2 |\psi_\nu(O)|^2$, ma anche da altri fattori.

Uno è il modulo quadro dell'elemento di matrice \mathcal{M} fra gli stati iniziali e finale del nucleo. Questo è analogo a quello usato nella descrizione dell'emissione di fotoni per la quale, nel caso di radiazione da dipolo, si ha

$$\mathcal{M} = \int \psi_{fin}^*(\text{mom. el.}) \psi_{in} d\tau$$

Per l'interazione β , \mathcal{M} non è noto esattamente, ma scegliendo la forma più semplice, la trasformazione $n \rightarrow p$ assumendo che nel processo sia coinvolto un solo nucleone del nucleo, si ha

$$\mathcal{M} = \int \psi_p^* \psi_n d\tau \quad (5.78)$$

dove ψ_n e ψ_p rappresentano rispettivamente lo stato iniziale e finale del nucleone coinvolto. Se si tiene anche conto dei possibili stati di spin, allora \mathcal{M} ⁷ diventa un vettore la cui generica componente è

$$\mathcal{M}_i = \int \psi_p^* \sigma_i \psi_n d\tau \quad (5.79)$$

dove σ_i è l' i -ma componente di un operatore relativistico di spin, per cui

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{i=1}^3 |\mathcal{M}_i|^2 \quad (5.80)$$

L'espressione per la probabilità d'emissione include anche un fattore *costante* g^2 che rappresenta l'intensità dell'accoppiamento che dà luogo all'emissione e gioca il ruolo di una costante universale, per la quale si trova sperimentalmente

$$10^{-48} \text{ g m}^3 \text{ s}^{-2} \lesssim g \lesssim 10^{-49} \text{ g m}^3 \text{ s}^{-2} \quad (5.81)$$

⁶Con questa assunzione Fermi ipotizzò sostanzialmente che non vi fosse necessità di una particella mediatrice per questo processo, essendo puntuale, approssimazione valida purchè le energie in gioco non siano troppo alte.

⁷La scelta di \mathcal{M} determina delle regole di selezione per i decadimenti β .

Tenendo conto di tutto e dalla Regola d'Oro n.2 si ha, per la probabilità d'emissione

$$\frac{2\pi}{\hbar} (|\psi_e(O)| |\psi_\nu(O)| |\mathcal{M}| g)^2 \frac{dn}{dE} \quad (5.82)$$

con dn/dE la densità energetica degli stati finali ed O che indica il *punto* in cui avviene il decadimento, assunto come centro di massa del nucleo genitore. Le funzioni d'onda ψ sono normalizzate sul volume V in modo che

$$\int_V \psi^* \psi \, d\tau = 1 \quad , \text{ per cui: } \quad N = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (5.83)$$

e

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_\nu \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (5.84)$$

Ha senso dire che il nucleo è posizionato in $\mathbf{r} = 0$ solo se ψ cambia poco sulle dimensioni del nucleo stesso.

Per valori dell'impulso p tipici dei decadimenti β , il *passo* con cui si hanno sensibili variazioni di ψ è dato da $\lambda = \hbar/p \simeq 10^{-13}$ m, quindi grande se confrontato con le dimensioni nucleari, dell'ordine di 10^{-14} m, cui sono estesi gli integrali che compaiono nell'elemento di matrice. Ha quindi abbastanza senso considerare il nucleo in buona approssimazione *puntiforme* in $\mathbf{r} = 0$. In tal caso le [5.84](#) si riducono a

$$\psi_e(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad , \quad \psi_\nu(O) = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (5.85)$$

Si consideri ora la densità degli stati finali. Il numero dn' di stati d'onda piana con valore dell'impulso compreso fra p e $p + dp$, considerando la particella dovunque in V è

$$\frac{dn'}{dp} \, dp = \frac{V \, p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3} \quad (5.86)$$

quindi si ha, per dn

$$dn = \frac{p_e^2 \, dp_e}{2\pi^2 \hbar^3} \frac{p_\nu^2 \, dp_\nu}{2\pi^2 \hbar^3} V^2 = \frac{p_e^2 \, p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6} V^2 \, dp_e \, dp_\nu \quad (5.87)$$

con $dp_e \, dp_\nu = J \, dp_e \, dE$, e J lo Jacobiano che trascurando l'energia di rinculo del nucleo rispetto alle energie di elettrone e neutrino, e assumendo nulla la massa del neutrino ($m_\nu = 0$), può essere calcolato partendo dalla relazione $E = cp_\nu + E_e$, ottenendo⁸ $J = 1/c$. Quindi:

$$\frac{dn}{dE} = \frac{p_e^2 \, p_\nu^2}{4\pi^4 \hbar^6 c} V^2 \, dp_e \quad (5.88)$$

$${}^8 J = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_e}{\partial p_e} & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ \frac{\partial p_\nu}{\partial p_e} & \frac{\partial p_\nu}{\partial E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial p_e}{\partial E} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{c}$$

In base quindi alla [5.82](#) si ottiene la probabilità d'emissione per unità di tempo $P(p_\nu, p_e) dp_e$ in funzione della sola variabile misurata, cioè l'impulso p_e dell'elettrone

$$P(p_\nu, p_e) dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{1}{V} |\mathcal{M}| g \right)^2 \frac{p_e^2 p_\nu^2 V^2 dp_e}{4\pi^4 \hbar^6 c} \quad (5.89)$$

Sempre nell'ipotesi $m_\nu = 0$ si ha anche, detta E_{tot} l'energia totale a disposizione nello stato finale del decadimento, che coincide praticamente quasi con l'estremo superiore $E_{e,max}$ della distribuzione in energia degli elettroni emessi: $E_\nu = p_\nu c = E_{tot} - E_e$, da cui: $p_\nu = (E_{tot} - E_e)/c$, che sostituito dà, per la probabilità d'emissione

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} (E_{tot} - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.90)$$

Esprimendo infine $p_{e,max}$ dalla $E_{e,max} = \sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} \simeq E_{tot}$, si ha:

$$P(p_e) dp_e = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.91)$$

che rappresenta sostanzialmente la distribuzione dello spazio delle fasi nel decadimento a tre corpi in cui la massa del nucleo residuo è molto maggiore di quella dell'elettrone, la cui massa è a sua volta molto maggiore di quella del neutrino.

Rateo di decadimento

Per trovare ora il rateo di decadimento λ_β , o equivalentemente la vita media τ_β , bisogna integrare su tutti i possibili valori di p_e

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^3} \int_0^{p_{e,max}} \left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.92)$$

Dalla misura della vita media τ_β si può quindi ottenere il valore del prodotto fra la costante d'accoppiamento e l'elemento di matrice $g |\mathcal{M}|$.

Per risolvere l'integrale conviene ridefinire gli impulsi in unità di mc , rendendo così esplicita la dipendenza dalla massa dell'elettrone e ottenendo le due quantità $\eta = p_e/(mc)$ ed $\eta_0 = p_{e,max}/(mc)$, tramite le quali si riesprime l'integrale della [5.92](#), chiamandolo $F(\eta_0)$:

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 |\mathcal{M}|^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} F(\eta_0) \quad (5.93a)$$

$$\text{con, } F(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} \left(\sqrt{1 + \eta_0^2} - \sqrt{1 + \eta^2} \right)^2 \eta^2 d\eta \quad (5.93b)$$

Integrando la [5.93b](#) si ottiene

$$\begin{aligned}
 F(\eta_0) &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1+\eta_0^2} \ln\left(\eta_0 + \sqrt{1+\eta_0^2}\right) \\
 &= -\frac{1}{4}\eta_0 - \frac{1}{12}\eta_0^3 + \frac{1}{30}\eta_0^5 + \frac{1}{4}\sqrt{1+\eta_0^2} \operatorname{senh}^{-1}\eta_0
 \end{aligned}
 \tag{5.94}$$

Sviluppando il logaritmo si ottengono termini con potenze di η_0 che nell'espressione per $F(\eta_0)$ cancellano quelli delle potenze inferiori ad η_0^7 . Si individuano quindi per $F(\eta_0)$ le seguenti forme limite :

$$\eta_0 > 5 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{1}{30} \eta_0^5 \tag{5.95a}$$

$$\eta_0 < 0.5 : F(\eta_0) \longrightarrow \frac{2}{105} \eta_0^7 \tag{5.95b}$$

Alcuni valori di $F(\eta_0)$, calcolati nell'ipotesi che la funzione d'onda ψ sia quella di un'onda piana, sono riportati nella tabella seguente.

η_0	$F(\eta_0)$
0.5	0.00012
1	0.0115
2	0.557
3	6.23
4	29.5

La [5.95a](#), che descrive la condizione in cui gli elettroni sono decisamente relativistici, e quindi per essi si ha $p_e \approx E$, equivale sostanzialmente alla legge di Sargent [5.76](#).

Le approssimazioni fatte finora sono un pò drastiche, sia per l'elemento di matrice che per le funzioni d'onda dell'elettrone o del positrone emessi. Considerarle delle semplici onde piane significa trascurare l'interazione coulombiana dell'elettrone o del positrone col nucleo. Per tenerne conto si introduce, nell'espressione integranda per ottenere λ_β , un fattore $f(\pm Z, \eta_0)$ dipendente dal nucleo e dall'energia dell'elettrone. La funzione integrata risultante dipende anch'essa da Z e si scrive $F(\pm Z, \eta_0)$, che per piccoli valori di Z si riduce alla $F(\pm Z, \eta_0) \approx F(\eta_0)$ introdotta sopra. Si ha quindi per λ_β

$$\lambda_\beta = \frac{1}{\tau_\beta} = \frac{g^2 m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |\mathcal{M}|^2 F(\pm Z, \eta_0) \tag{5.96}$$

per cui se il modulo quadro dell'elemento di matrice si mantiene \sim costante, anche il prodotto $F \cdot \tau \simeq$ costante.

Nei decadimenti β con $E_{tot} \gg m_e c^2$, l'impulso dell'elettrone emesso è mediamente grande e si trova $F(\pm Z, \eta_0) \approx 1$.

$F(\pm Z, \eta_0)$ è significativamente diversa dall'unità soltanto per valori grandi di Z e piccoli delle energie.

Forma degli spettri

Dalla [5.96](#), ricordando la [5.91](#), si può ottenere la forma dello spettro d'emissione β .

L'equazione [5.91](#) per la probabilità d'emissione di un elettrone nell'intervallo d'impulso dp_e dipende da p_e tramite il fattore

$$\left[\left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 \right]$$

che ha la forma mostrata in figura [5.17](#). La curva si avvicina a $P(p_e) = 0$

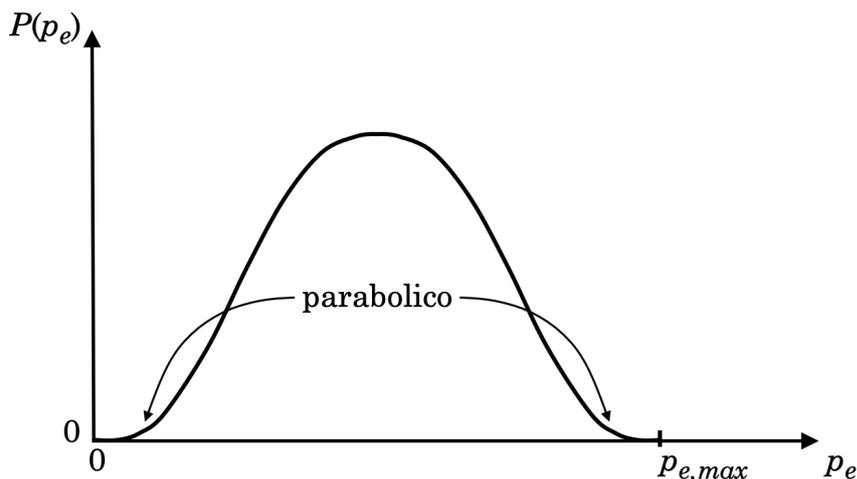


Figura 5.17: Forma dello spettro β a impulsi bassi e alti.

con andamento parabolico in prossimità dello 0, in quanto il quadrato della differenza fra le radici è circa costante per piccolissimi valori di p_e .

Inoltre raggiunge $P(p_e) = 0$ sempre con andamento parabolico anche all'avvicinarsi di p_e a $p_{e,max}$. Infatti in tal caso p_e^2 è circa costante e sviluppando in serie di Taylor attorno a $p_{e,max}$ la seconda radice, si ha

$$c\sqrt{m^2 c^2 + p_e^2} = c\sqrt{m^2 c^2 + p_{e,max}^2} + c\frac{(p_e - p_{e,max})p_{e,max}}{\sqrt{m^2 c^2 + p_{e,max}^2}} + \dots$$

e prendendo il limite per $p_e \rightarrow p_{e,max}$

$$\lim_{p_e \rightarrow p_{e,max}} \left(\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} \right)^2 = \frac{c^2 (p_e - p_{e,max})^2}{m^2 c^2 + p_{e,max}^2} p_{e,max}^2 \quad (5.97)$$

Bisogna poi tener conto delle diverse perturbazioni causate dalla carica nucleare sulle funzioni d'onda dell'elettrone o del positrone: la prima viene accresciuta e la seconda ridotta rispetto all'assenza di carica nucleare.

L'effetto è inoltre di portata maggiore a energie minori. Per gli elettroni la correzione in prossimità di $p_e = 0$ è circa proporzionale ad $1/p_e$, da cui si deduce che l'andamento per elettroni del decadimento β^- in prossimità di $p_e = 0$ è lineare.

Per positroni del decadimento β^+ l'effetto è opposto, come mostrato in figura [5.18](#).

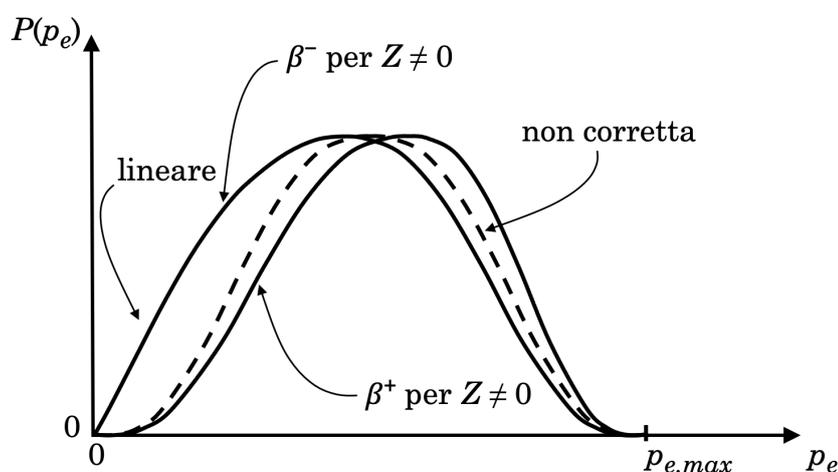


Figura 5.18: Forma degli spettri β^+ e β^- .

Gli andamenti corrispondenti in funzione dell'energia cinetica E degli elettroni o dei positroni di decadimento sono dati, per $E \ll m_e c^2$, da

$$\left(\sqrt{m^2 c^4 + p_{e,max}^2 c^2} - \sqrt{m^2 c^4 + p_e^2 c^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \propto \left(E_{\beta}^{max} - E \right)^2 \sqrt{E} dE$$

osservando che $p_e^2 dp_e = (p/2) dp_e^2 \propto \sqrt{E} dE$.

Massa del neutrino

Nell'ipotesi fatta da Fermi che la massa del neutrino sia nulla ($m_\nu = 0$), l'andamento della distribuzione verso l'estremo superiore dei valori di p_e è dunque quello di un avvicinamento parabolico dolce al valore nullo. Se viceversa la massa del neutrino non fosse nulla si può provare (H. Bethe) che tale avvicinamento avverrebbe con derivata decrescente tendente a $-\infty$, tanto più marcato quanto maggiore fosse la massa del neutrino. I dati sperimentali sono compatibili con $m_\nu = 0$ o comunque con una m_ν inferiore a quanto rilevabile dai dati stessi.

Ciò rende chiaramente difficoltoso individuare sperimentalmente con precisione l'estremo superiore $p_{e,max}$ dei valori di p_e , ovvero il punto in cui la distribuzione incontra l'asse delle ascisse, e quindi anche $E_{e,max}$.

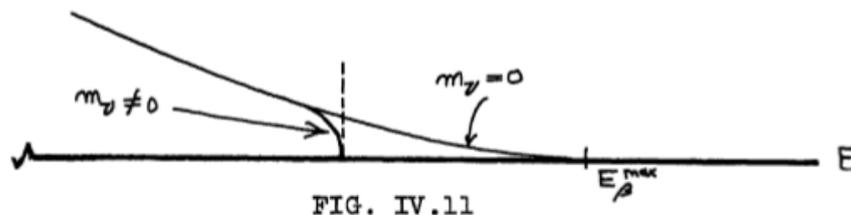


Figura 5.19: Massa del neutrino e forma dello spettro β .

5.3.6 Emissione ritardata di nucleoni

Gli stati eccitati nucleari popolatisi in seguito a decadimento β non si diseccitano sempre soltanto emettendo raggi γ . Occasionalmente essi risultano instabili anche per emissione di uno o più nucleoni. Il processo ha luogo in

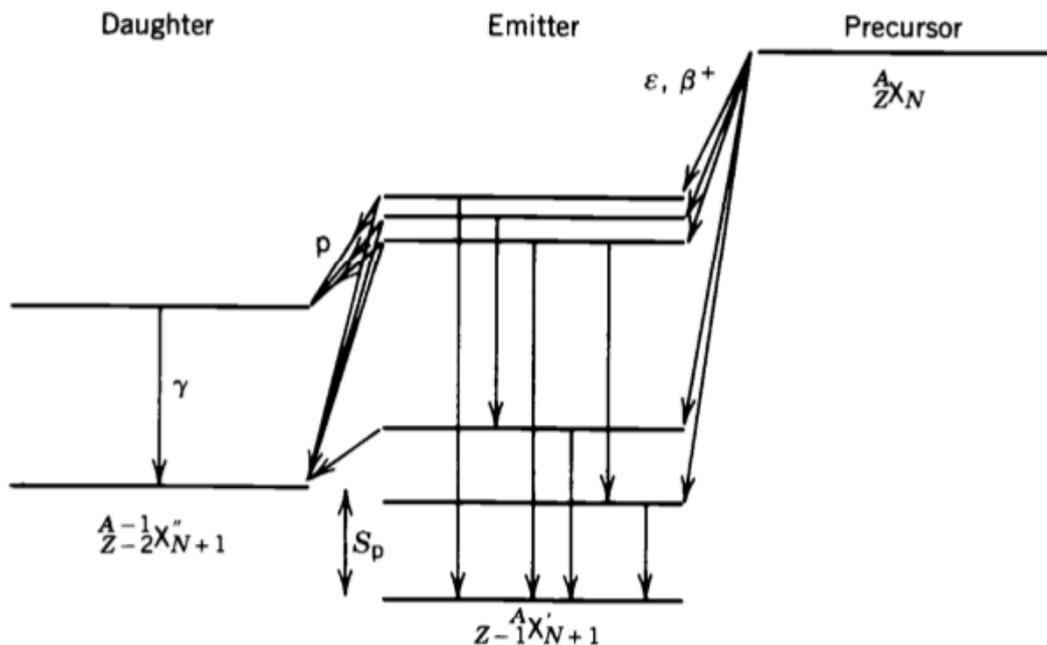


Figura 5.20: Schematizzazione dell'emissione ritardata di nucleoni stimolata da decadimento β .

tempi rapidissimi, competitivi con l'emissione γ , e nel complesso l'emissione d'un nucleone avviene con tempi caratteristici del decadimento β .

Le energie in gioco nel decadimento di nuclidi situati, per ogni valore di A , solo una o due posizioni oltre l'isobaro più stabile, sono piccole ($1 \div 2$ MeV), e l'emissione di nucleoni singoli è quindi proibita energeticamente. Lontano dalla valle di stabilità le energie associate ai decadimenti possono però essere abbastanza grandi da popolare stati maggiormente eccitati che decadono poi con emissione di nucleoni (figura [5.20](#)).

Il nucleo *genitore* che decade β è detto precursore.

5.4 Radioattività γ

L'emissione di radioattività γ dai nuclei è un processo analogo a quello dell'emissione di raggi X dagli atomi. Si tratta della diseccitazione di uno stato nucleare eccitato verso uno stato meno eccitato, o verso lo stato fondamentale, tramite l'emissione di un fotone γ di energia pari alla differenza fra quelle dei due stati, a meno dell'energia di rinculo del nucleo emittente.

L'emissione γ si osserva da tutti i nuclei che presentano stati legati eccitati ($A > 5$), e tipicamente segue decadimenti α o β in quanto questi spesso lasciano in uno stato eccitato il nucleo figlio.

Le vite medie che caratterizzano i decadimenti γ sono generalmente inferiori a 10^{-9} s, ma occasionalmente se ne possono presentare di più o molto più lunghe. Queste ultime caratterizzano stati *isomerici* o comunque *metastabili*.

Un processo che spesso compete con l'emissione γ è la *conversione interna*.

5.4.1 Energetica dei decadimenti γ

Si consideri il decadimento γ di un nucleo di massa M a riposo, dallo stato eccitato E_i allo stato finale E_f . Per la conservazione dell'impulso il nucleo finale non sarà a riposo ma avrà un impulso di rinculo p_R e una corrispondente energia cinetica di rinculo E_R , che si assume ragionevolmente non relativistica.

Conservazione di impulso ed energia totali danno

$$E_i = E_f + E_\gamma + E_R \quad (5.98)$$

$$0 = \mathbf{p}_R + \mathbf{p}_\gamma$$

Quindi $p_R = p_\gamma$, da cui, ponendo $\Delta E = E_i - E_f$ e ricordando che $E_\gamma = cp_\gamma$

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \quad (5.99)$$

da cui

$$E_\gamma = Mc^2 \left[-1 \pm \left(1 + 2 \frac{\Delta E}{Mc^2} \right)^{1/2} \right] \quad (5.100)$$

I valori di ΔE sono tipicamente dell'ordine del MeV mentre le energie a riposo sono dell'ordine di $A \times 10^3$ MeV. In buona approssimazione si può quindi sviluppare la radice fermandosi al terzo termine ottenendo

$$E_\gamma \simeq \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2} \quad (5.101)$$

Il termine legato al rinculo del nucleo è solitamente trascurabile, dell'ordine di 10^{-5} e quindi inferiore alle incertezze sperimentali tipiche delle misure d'energia. Solo nel caso dell'effetto Mössbauer non si può trascurare il termine di rinculo.

5.4.2 Regole di selezione per decadimenti γ

Un nucleo può avere a disposizione molti stati eccitati. In figura 5.21 sono schematicamente illustrati i livelli energetici di un nucleo pari-pari con $A \approx 100$. Al di sopra dello stato fondamentale vi sono stati discreti indivi-

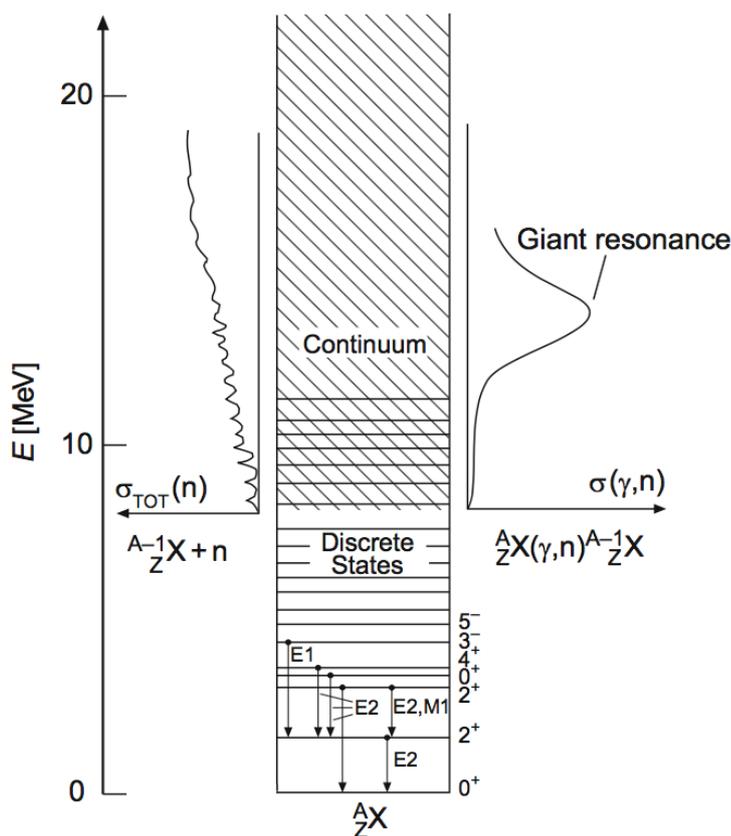


Figura 5.21: ... Stati Gamma ...

duali contraddistinti da specifici numeri quantici J^P . L'eccitazione di nuclei pari-pari corrisponde generalmente alla "rottura" del legame fra una coppia di nucleoni e richiede energie di circa $1 \div 2$ MeV. Nuclei pari-pari con $A \gtrsim 40$, hanno raramente energie d'eccitazione inferiori ai 2 MeV; gli stati collettivi in nuclei deformati sono un'eccezione a questo e non possono essere spiegati in termini dell'eccitazione di una singola particella. Nei nuclei dispari-pari e dispari-dispari, il numero di stati eccitati a basse energie, tipicamente poche centinaia di keV, è considerevolmente maggiore.

Gli stati di nuclei eccitati a bassa energia decadono solitamente emettendo radiazione elettromagnetica. Una trattazione raffinata del fenomeno richiede l'uso della teoria dei campi quantizzati della radiazione elettromagnetica, di cui si utilizzeranno qui alcuni risultati rimandando a corsi successivi per

la loro deduzione.

Si può descrivere il fenomeno ricorrendo allo sviluppo in serie di una sovrapposizione di diversi termini multipolari, ognuno con la propria caratteristica distribuzione angolare. La radiazione elettrica di dipolo, quadrupolo, ottupolo, ecc. è indicata con E1, E2, E3, ecc.; similmente la corrispondente radiazione multipolare magnetica è indicata con M1, M2, M3, ecc.

La conservazione del momento angolare e della parità, caratteristiche dell'interazione elettromagnetica, determinano quali multipolarità siano permesse nella transizione: un fotone di multipolarità $E\ell$ ha momento angolare ℓ e parità $(-1)^\ell$, un fotone di multipolarità $M\ell$ ha momento angolare ℓ e parità $(-1)^{\ell+1}$. In tabella 5.1 sono riportate alcune regole di selezione per transizioni elettromagnetiche con le quali si può costruire un insieme di transizioni permesse quali ad esempio quelle in tabella 5.2. In una transizione $J_i \rightarrow J_f$

Tabella 5.1: Regole di selezione per decadimenti γ

Multipolarità	Elettrica			Magnetica		
	$E\ell$	$ \Delta J $	ΔP	$M\ell$	$ \Delta J $	ΔP
Dipolo	E1	1	-	M1	1	+
Quadrupolo	E2	2	+	M2	2	-
Ottupolo	E3	3	-	M3	3	+

Tabella 5.2: Esempi di transizioni nucleari elettromagnetiche

$J_i^{P_i}$	$J_f^{P_f}$	ΔP	L	Transizioni permesse
0^+	0^+	No	-	Nessuna
$(1/2)^+$	$(1/2)^-$	Sì	1	E1
1^+	0^+	No	1	M1
2^+	0^+	No	2	E2
$(3/2)^-$	$(1/2)^+$	Sì	1, 2	E1, M2
2^+	1^+	No	1, 2, 3	M1, E2, M3
$(3/2)^-$	$(5/2)^+$	Sì	1, 2, 3, 4	E1, M2, E3, M4

la conservazione del momento angolare implica che sia soddisfatta la disuguaglianza triangolare $|J_i - J_f| \leq \ell \leq J_i + J_f$.

La vita media per emissione γ di uno stato eccitato dipende fortemente dalla multipolarità da cui avviene l'emissione ed è tanto più breve quanto più basso è il livello di multipolarità. Una transizione magnetica $M\ell$ ha approssimativamente la stessa probabilità di una transizione elettrica $E(\ell + 1)$. Una transizione $3^+ \rightarrow 1^+$, ad esempio, è in linea di principio una miscela

di E2, M3 ed E4, ma risulta facilmente dominata dal contributo E2. Una transizione $3^+ \rightarrow 2^+$ consiste usualmente in una miscela di M1 ed E2 ed E4, anche se sono possibili transizioni M3, E4 ed M5.

In una serie di stati eccitati 0^+ , 2^+ , 4^+ , il decadimento più probabile consiste in una cascata di transizioni E2 del tipo $4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$, e non in una singola transizione E4 del tipo $4^+ \rightarrow 0^+$.

La vita media di uno stato eccitato e la distribuzione angolare della radiazione elettromagnetica emessa costituiscono delle "firme" della multipolarità delle transizioni, che a loro volta rivelano spin e parità dei livelli eccitati del nucleo.

La probabilità di decadimento dipende fortemente anche dall'energia: per radiazione di multipolarità ℓ , essa è infatti proporzionale ad $E_\gamma^{2\ell+1}$.

L'energia d'eccitazione di un nucleo può talvolta essere anche trasferita a un elettrone di un orbitale atomico tramite un processo detto *conversione interna*, in cui si immagina coinvolto un fotone *virtuale*, che non abbia dunque le restrizioni sui possibili stati di polarizzazione di un fotone reale; esso diviene un processo rilevante in transizioni per le quali risulta soppressa l'emissione γ , come nel caso di alta multipolarità o bassa energia d'eccitazione, e il nucleo coinvolto è pesante, per cui cresce la probabilità di una sovrapposizione spaziale non trascurabile fra le funzioni d'onda del nucleo e degli elettroni atomici.

La transizione $0^+ \rightarrow 0^+$ non può aver luogo tramite l'emissione di un fotone, se quindi un nucleo è in uno stato eccitato 0^+ , e anche tutti i suoi livelli eccitati più bassi sono del tipo 0^+ , come per ^{16}O o ^{40}Ca , allora il suo decadimento dovrà procedere in modo diverso. Ciò può ad esempio avvenire per conversione interna, con l'emissione di due fotoni o se energeticamente permesso, con l'emissione di una coppia e^+e^- . La conservazione della parità vieta la conversione fra due livelli con $J = 0$ e parità opposte.

La vita media di uno stato nucleare eccitato varia tipicamente fra 10^{-9} e 10^{-15} s, che corrispondono a stati con larghezze inferiori a 1 eV.

Gli stati che possono decadere soltanto attraverso transizioni a bassa energia e alta multipolarità hanno vite medie considerevolmente più lunghe. Essi sono detti *isomeri* e vengono indicati con una m in apice al simbolo dell'elemento. Un esempio estremo di isomero è il secondo stato eccitato di ^{110}Ag , con energia d'eccitazione di 117.7 keV e $J^P = 6^+$. Esso si diseccita attraverso una transizione M4 nel primo stato eccitato (1.3 keV; 2^-), in quanto un decadimento diretto verso lo stato fondamentale 1^+ è ancor più improbabile, e la vita media τ di $^{110}\text{Ag}^m$ è pari a 339 giorni.

Un nucleo in uno stato eccitato $^A_Z\text{X}^*$ può decadere allo stato fondamentale ^A_ZX senza emettere radiazione γ ma cedendo l'energia d'eccitazione a un elettrone atomico tramite il processo di conversione interna. La vita media di quello stato eccitato è allora inferiore a quanto previsto dal solo processo

di decadimento radiativo, dato che le probabilità di decadimento si sommano

$$\lambda_{tot} = \lambda_{\gamma} + \lambda_c \quad (5.102)$$

essendo λ_c la probabilità di decadimento per conversione interna.

Capitolo 6

Processi d'urto

Gli esperimenti che coinvolgono processi d'urto sono strumenti fondamentali d'indagine nella fisica nucleare e delle particelle.

In un tipico esperimento d'urto si individuano un oggetto da studiare che funge solitamente da *bersaglio* e dei *proiettili*, sotto forma di fascio incidente. L'individuazione di proiettile e bersaglio non è però sempre univoca, a volte appartengono entrambi a fasci collidenti l'uno contro l'altro e in certi casi si creano fasci di *bersagli* che vengono accelerati contro *proiettili*.

Talvolta le misure sperimentali su reazioni nucleari non permettono di rivelare tutti i prodotti di reazione: quando se ne rivelano solo alcuni si parla di misure *inclusive*. Se al contrario tutti i prodotti di reazione vengono rivelati e identificati si parla di misure *esclusive*.

Le reazioni nucleari innescate da processi d'urto hanno luogo sempre nel rispetto di un certo insieme di leggi di conservazione. Inoltre può accadere che nel corso d'una reazione particelle del fascio presenti nel canale d'ingresso non si ritrovino nel canale d'uscita e che l'equivalente energetico della loro massa, e/o parte della loro energia cinetica, si trasformino in altre particelle e/o eccitazione dei prodotti presenti nel canale d'uscita della reazione.

6.1 Sezioni d'urto

La misura dei tassi di reazione in esperimenti d'urto, detti anche di *scattering*, così come degli spettri energetici e delle distribuzioni angolari dei prodotti di reazione, fornisce informazioni sulle caratteristiche dinamiche delle interazioni, quindi sulla forma del potenziale d'interazione e sull'intensità della forza d'accoppiamento.

Si introduce il concetto di sezione d'urto che può essere considerata una misura della probabilità relativa che una certa reazione abbia luogo. Si immagini una situazione in cui si ha un fascio collimato di particelle a incidenti su un bersaglio macroscopico contenente nuclei X . Sia

$$I_a = dN_a/dt = n_a v_a S \quad (6.1)$$

l'intensità della corrente di particelle a incidenti per unità di tempo, con n_a la loro densità nel fascio, v_a la loro velocità ed S l'area della sezione retta del fascio incidente sul bersaglio macroscopico. Si può introdurre anche la densità di flusso incidente $j_a = n_a v_a$.

Detto N_t il numero di nuclei bersaglio per unità d'area ed R_b il rateo con cui appaiono le particelle in uscita dalla reazione, si definisce la *sezione d'urto*

$$\sigma = \frac{R_b}{I_a N_t} \quad (6.2)$$

che risulta avere quindi le dimensioni di un'area per nucleo. Il suo valore può essere anche molto diverso da quello dell'area geometrica del "disco di materia" del nucleo bersaglio. Si pensa quindi alla sezione d'urto per una certa reazione come una quantità che ha le dimensioni di un'area efficace, proporzionale alla probabilità che la reazione in questione abbia luogo.

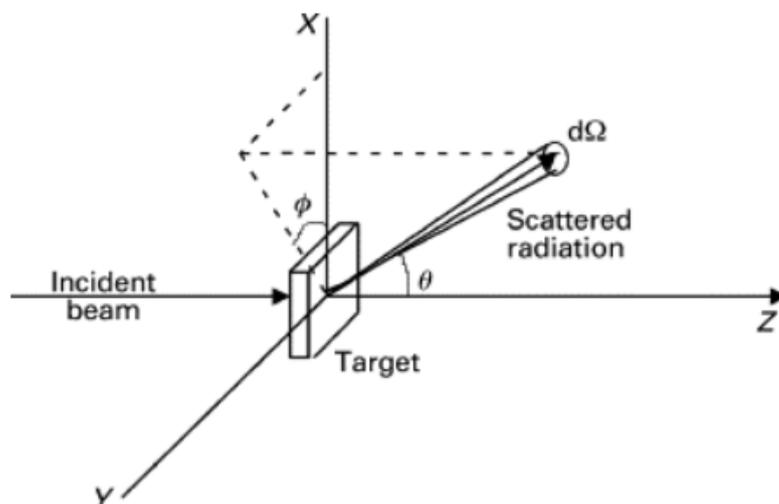


Figura 6.1: Geometria di scattering su bersaglio fisso.

Si definisce il *tasso di reazione* dN/dt come il numero di particelle che attraversando nell'unità di tempo l'unità d'area di un bersaglio interagiscono con esso. In tal caso vale

$$\frac{dN}{dt} = n_a v_a N_t \sigma \quad (6.3)$$

Si supponga d'avere un rivelatore sistemato in modo da rivelare particelle b prodotte dalle interazioni tra particelle del fascio e bersagli, entro l'angolo solido $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$, centrato nella direzione individuata dagli angoli (ϑ, φ) rispetto al bersaglio X .

Siano dR_b la frazione di rateo intercettata dal rivelatore e conseguentemente $d\sigma$ la frazione di sezione d'urto da esso esplorata.

Considerando che le particelle uscenti non saranno necessariamente emesse in modo uniforme in tutte le direzioni, ma potranno presentare una distribuzione angolare dipendente sia da ϑ che da φ , indicando con $r(\vartheta, \varphi)$ tale distribuzione si ha $dR_b = r(\vartheta, \varphi)d\Omega/4\pi$, da cui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r(\vartheta, \varphi)}{4\pi I_a N_t} \quad (6.4)$$

che è detta *sezione d'urto differenziale*, spesso indicata come $\sigma(\vartheta, \varphi)$ (talvolta impropriamente come $\sigma(\vartheta)$). La sezione d'urto di reazione σ si trova quindi integrando la $d\sigma/d\Omega$ su tutto l'angolo solido

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\varphi \quad (6.5)$$

Spesso si è anche interessati a conoscere la probabilità di trovare particelle diffuse con un'energia compresa in un certo *range* dE_c , e in tal caso si considera la *sezione d'urto doppiamente differenziale* $d^2\sigma/dE_b d\Omega$.

Table 11.1 Reaction Cross Sections

Cross Sections	Symbol	Technique	Possible Application
Total	σ_t	Attenuation of beam	Shielding
Reaction	σ	Integrate over all angles and all energies of b (all excited states of Y)	Production of radioisotope Y in a nuclear reaction
Differential (Angular)	$d\sigma/d\Omega$	Observe b at (θ, ϕ) but integrate over all energies	Formation of beam of b particles in a certain direction (or recoil of Y in a certain direction)
Differential (Energy)	$d\sigma/dE$	Don't observe b, but observe excitation of Y by subsequent γ emission	Study of decay of excited states of Y
Doubly differential	$d^2\sigma/dE_b d\Omega$	Observe b at (θ, ϕ) at a specific energy	Information on excited states of Y by angular distribution of b

Figura 6.2: Sezioni d'urto ...

Sostanzialmente trattando di una specifica reazione, il significato esatto del

termine *sezione d'urto* dipende da cosa esattamente si misura. Nello schema sono richiamati diversi tipi di misure di scattering, come li si attua, le applicazioni possibili e la tipologie di sezione d'urto associata.

Si consideri ad esempio il caso dell'attenuazione dell'intensità di un fascio incidente per effetto dell'interazione con un certo bersaglio; in tal caso la sezione d'urto considerata è quella totale σ_{Tot} senza distinzione per le specifiche tipologie d'interazione fra proiettili e bersagli.

Si possono voler distinguere, fra tutte le tipologie d'interazione possibili, quelle di tipo anelastico da quelle elastiche, scrivendo allora

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{el} + \sigma_{anel} \quad (6.6)$$

6.1.1 Lunghezza di attenuazione

Si suppone un fascio di intensità iniziale I_0 incidente su un bersaglio spesso di densità $\rho \text{ kg} \times \text{m}^{-3}$. Sia z la lunghezza del percorso compiuto dalle particelle del fascio penetrate nel bersaglio e si vuole determinare l'intensità residua $I(z)$ del fascio in funzione di z . Si consideri un generico spessore infinitesimo di bersaglio compreso fra z e $z+dz$ e sia dR_i il numero totale di interazioni per unità di tempo fra particelle del fascio e nuclei del bersaglio nello spessore dz . La corrispondente variazione dell'intensità del fascio sarà dunque $dI(z) = -dR_i$.

La densità di flusso incidente in funzione di z è

$$j_a(z) = \frac{I(z)}{S}$$

Detta n_t la densità volumetrica dei nuclei bersaglio si ha quindi

$$dI(z) = -dR_i = -\sigma_{Tot} j_a(z) S dN_t = -\sigma_{Tot} \frac{I(z)}{S} n_t S dz$$

da cui

$$\frac{dI(z)}{I(z)} = -n_t \sigma_{Tot} dz$$

e infine

$$I(z) = I_0 e^{-n_t z \sigma_{Tot}} \quad (6.7)$$

Si definisce la *lunghezza di attenuazione* L_{att} come la distanza z percorsa dal fascio nel bersaglio, dopo la quale l'intensità del fascio stesso si è ridotta di un fattore $1/e$,

$$L_{att} = \frac{1}{n_t \sigma_{Tot}} \quad (6.8)$$

Esplicitando la relazione fra ρ ed n_t , detti N_0 il numero di Avogadro, A la massa in grammi di una mole di nuclei bersaglio si ha, ricordando che $1\text{kg}/\text{m}^3 = 10^{-3}\text{g}/\text{cm}^3$

$$n_t = \frac{\rho N_0 10^{-3}}{A}$$

6.1.2 Luminosità

Un'altra grandezza utile è la "luminosità" \mathcal{L} , definita come il numero di urti potenziali nell'unità di tempo fra le particelle di un fascio incidente e i centri diffusori di un bersaglio, ovvero $I_a N_t S = I_a n_t \Delta z S$. Dalla [6.2](#) si ha

$$\mathcal{L} = I_a N_t S = \frac{R_b}{\sigma} \quad (6.9)$$

per cui la luminosità ha le dimensioni dell'inverso di un'area per l'inverso di un tempo: $[\mathcal{L}] = [m]^{-2} [s]^{-1}$.

Nel caso si tratti non di un fascio collidente contro un bersaglio fisso ma dell'interazione di due fasci, costituiti da successivi pacchetti di particelle equispaziati e portati a collidere l'uno contro l'altro in un anello di accumulazione la cui circonferenza sia lunga C , si definisce la luminosità secondo il seguente ragionamento: si supponga vi siano k pacchetti di particelle, circolanti ognuno con velocità di modulo v , e si indichino rispettivamente con N_a ed N_t i numeri di particelle presenti nei pacchetti circolanti in un verso e nel verso opposto. Opportuni campi magnetici li portano a collidere in un particolare punto della traiettoria circolare un numero pari a $(k v)/C$ volte al secondo. La luminosità risulta quindi

$$\mathcal{L} = \frac{(N_a N_t k v)/C}{S} \quad (6.10)$$

dove S rappresenta l'area della sezione retta del volume d'intersezione dei fasci in corrispondenza della zona dell'urto.

Naturalmente la luminosità aumenta al migliorare della focalizzazione dei fasci entro un'area S che in questo caso appunto diminuisce in corrispondenza della zona d'interazione.

Si definisce anche la *luminosità integrata* come

$$\mathcal{L}_{int} = \int \mathcal{L} dt \quad (6.11)$$

Il numero $N(\Delta t)$ di interazioni osservabili in un certo intervallo di tempo Δt coincide quindi col prodotto fra la luminosità integrata nell'arco di tempo Δt e la relativa sezione d'urto totale σ_{Tot}

$$N(\Delta t) = \mathcal{L}_{int} \cdot \sigma_{Tot} \quad (6.12)$$

6.1.3 Sezione d'urto in funzione dell'impulso

A seconda del problema studiato, lo stato finale f può essere caratterizzato da diverse variabili associate alla particella diffusa. Una quantità tipicamente considerata è l'impulso \mathbf{p} della particella diffusa nello stato finale. In

tal caso la sezione d'urto totale σ_{Tot} del processo si ottiene integrando la sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\mathbf{p}$ su tutti i possibili valori di \mathbf{p}

$$\sigma_{Tot} = \int_f \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}} d\mathbf{p} \quad (6.13)$$

La quantità $d\mathbf{p}$ può poi essere esplicitata in diverse coordinate, a seconda della migliore geometria nella quale trattare il problema specifico

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &\equiv dp'_x dp'_y dp'_z && \text{cartesiane ortogonali} \\ &\equiv p'^2 dp' \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi' && \text{sferiche} \\ &\equiv p'_\perp dp'_\perp dp'_\parallel d\varphi' && \text{cilindriche} \end{aligned} \quad (6.14)$$

dove con i simboli "||", " \perp " e " φ " si intendono rispettivamente le coordinate assiale, radiale e angolare, come anche trattato nell'Appendice [A.1](#)

6.1.4 Sezione d'urto invariante

Il sistema di riferimento naturale per un processo d'urto è quello del centro di massa delle particelle che interagiscono, e può non coincidere col sistema di riferimento in cui si effettua la misura.

Le caratteristiche di un processo non devono del resto dipendere dal particolare sistema di riferimento scelto per la misura, infatti la sezione d'urto è definita sostanzialmente come una superficie ortogonale alla direzione del moto delle particelle incidenti, ed è quindi un invariante relativistico.

Ricordando le leggi di trasformazione delle variabili dal sistema del laboratorio al sistema del centro di massa, come riportato in Appendice [A.1](#), si può esprimere la sezione d'urto differenziale in funzione di variabili invarianti.

Le componenti dell'impulso si trasformano come indicato dalla [A.23](#) e quindi $d\mathbf{p}$ non è un invariante, come non lo è $d\mathbf{p}_\parallel$, mentre invece lo sono $d\mathbf{p}_\perp$ e $d\sigma$.

Il rapporto $d\mathbf{p}_\parallel/E$ è invariante, essendo $(E/c) = (p_\perp^2 + p_\parallel^2 + m^2c^2)^{1/2}$,

$$\begin{aligned} dp'_\parallel &= \gamma (dp_\parallel - \beta dE) = \gamma dp_\parallel \left(1 - \frac{\beta p_\parallel}{E}\right) = \\ &= \frac{\gamma E - \beta \gamma p_\parallel}{E} dp_\parallel = \frac{E'}{E} dp_\parallel \end{aligned} \quad (6.15)$$

Di conseguenza la *sezione d'urto invariante*

$$E \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}} \quad (6.16)$$

è indipendente dal sistema di riferimento scelto per effettuare la misura.

6.1.5 Probabilità di transizione e sezione d'urto

La conoscenza della sezione d'urto differenziale di un processo che conduce un sistema dallo stato iniziale i allo stato finale f , permette di calcolare la probabilità di transizione nell'unità di tempo $dP_{i \rightarrow f}/dt$ associata ad ogni particella bersaglio

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP_{i \rightarrow f}}{dt} \frac{V}{v_a} \quad (6.17)$$

essendo, $V = A \times \Delta z$ il volume efficace del bersaglio e v_a il modulo della velocità di ogni particella incidente.

6.2 Approccio quantistico al concetto di sezione d'urto

Il tasso di reazioni, fissate l'intensità del fascio incidente e la densità di nuclei nel bersaglio, dipende dalle proprietà del potenziale d'interazione e dal numero di stati finali accessibili alla reazione.

Il potenziale d'interazione può venir descritto tramite l'operatore Hamiltoniano \mathcal{H}_{int} . In una reazione il ruolo di questo potenziale è di trasformare la funzione d'onda ψ_i dello stato iniziale del sistema, nella funzione d'onda dello stato finale del sistema, ψ_f .

Il corrispondente *elemento della matrice di transizione*, detto anche *ampiezza di probabilità per la transizione*, è dato da

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H}_{int} \psi_i dV \quad (6.18)$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio, ovvero in pratica a tutto il volume utile di normalizzazione. Concettualmente l'approccio è equivalente per la trattazione dei decadimenti.

Per determinare il numero di stati finali disponibili, da cui anche dipende il tasso di reazione, si tiene conto che nello *spazio delle fasi*, lo spazio esadimensionale delle coordinate e degli impulsi, in accordo col principio di indeterminazione, ogni particella occupa un volume pari ad $h^3 = (2\pi\hbar)^3$.

Si consideri una particella diffusa entro un volume V con impulso di modulo compreso nell'intervallo fra p' e $p' + dp'$ ¹. Ciò corrisponde, nello spazio degli impulsi, ad un guscio sferico con raggio minore p' , spessore dp' e volume pari a $4\pi p'^2 dp'$. Non considerando per ora processi che determinino modifiche dello stato di spin, si ottiene per il numero finale $dn(p')$ di stati disponibili

$$dn(p') = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p'^2 dp' \quad (6.19)$$

¹L'apice caratterizza qui la particella diffusa. Inoltre in questo paragrafo con p si intende il modulo del vettore impulso \mathbf{p} , e non il quadri-impulso.

Il volume V su cui normalizzare corrisponde al volume che contiene tutte le particelle incidenti durante il tempo t in cui hanno luogo gli urti, quindi

$$V = v_a t S = \frac{I_a t}{n_a} = \frac{N_a}{n_a} \quad (6.20)$$

essendo S l'area della sezione retta del fascio incidente, v_a il modulo della velocità di ogni particella del fascio, N_a la totalità delle particelle nel fascio, I_a ed n_a l'intensità del loro flusso incidente e la loro densità, supposte uniformi.

Ricordando che l'energia totale e l'impulso di una particella sono legate dalla relazione

$$dE' = v' dp' \quad (6.21)$$

dedotta in Appendice [A](#), si ha per la densità $\rho(E')$ degli stati finali nell'intervallo energetico dE'

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{4\pi p'^2 V}{v' (2\pi\hbar)^3} \quad (6.22)$$

Il collegamento fra tasso di reazione, elemento della matrice di transizione e densità degli stati finali è dato dalla *seconda regola d'oro* di Fermi come per i decadimenti, dove il loro tasso è legato all'elemento della matrice di transizione e alla densità dei possibili stati finali.

Essa esprime qui il tasso di reazione W [2](#) per nucleo bersaglio e per particella del fascio incidente, quindi la quantità

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} \quad (6.23)$$

dove si è esplicitata, per le particelle del fascio che hanno interagito, l'eventuale dipendenza dall'energia E in gioco nel canale d'ingresso della reazione. Sostituendo quindi in base alle [6.3](#) e [6.20](#) si ottiene

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} = \frac{\sigma v_a}{V} \quad (6.24)$$

Di conseguenza si ha, per la sezione d'urto

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E') V \quad (6.25)$$

Se si conosce il potenziale d'interazione la [6.25](#) permette quindi di calcolare la sezione d'urto σ . Altrimenti si possono utilizzare i valori misurati della sezione d'urto σ e l'equazione [6.25](#) per calcolare l'elemento di matrice \mathcal{M}_{fi} .

²Il tasso di reazioni è stato introdotto nel paragrafo [6.1](#)