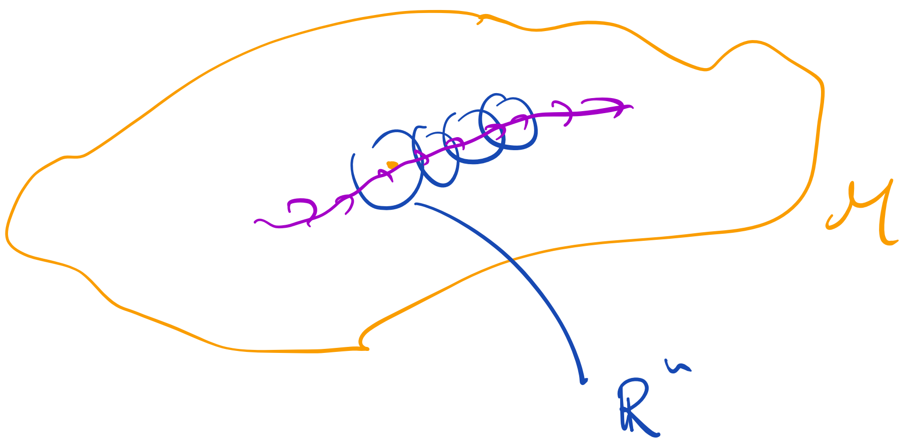
SISTEMI DINAMICI

SISTEMI DINAMICI

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t))$$

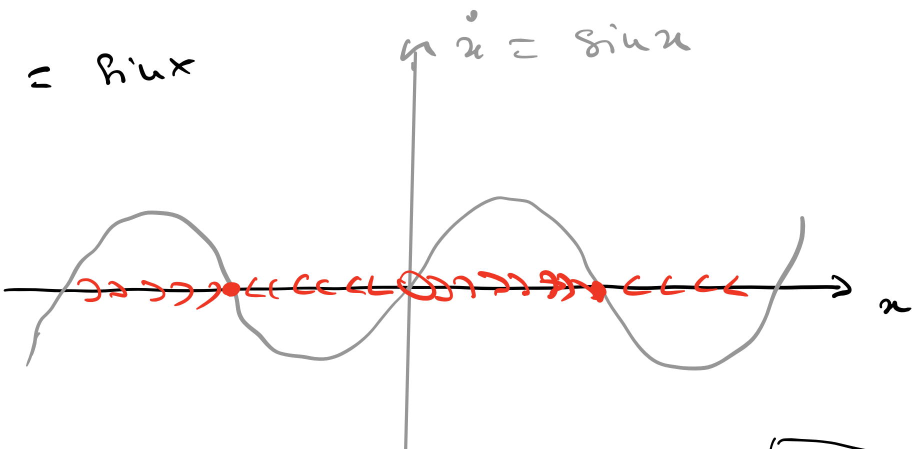
determina un campo vettoriale



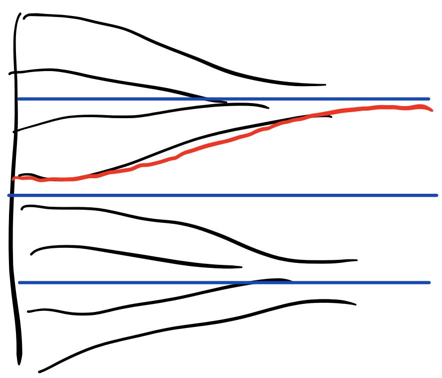
$x_1 \dots x_n$

1 dim: $\frac{d}{dt} x = f(x(t))$

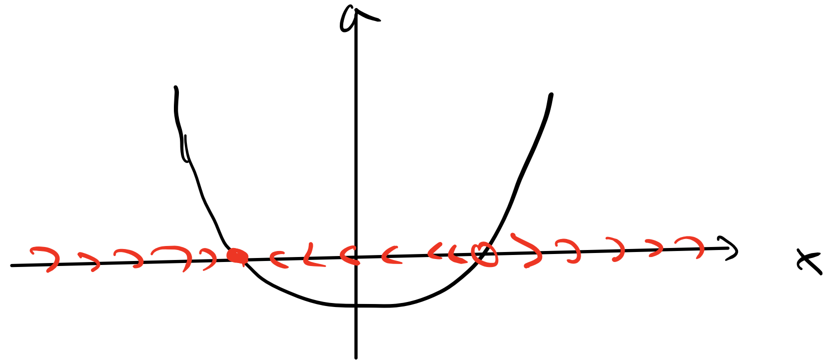
$\dot{x} = \sin x$



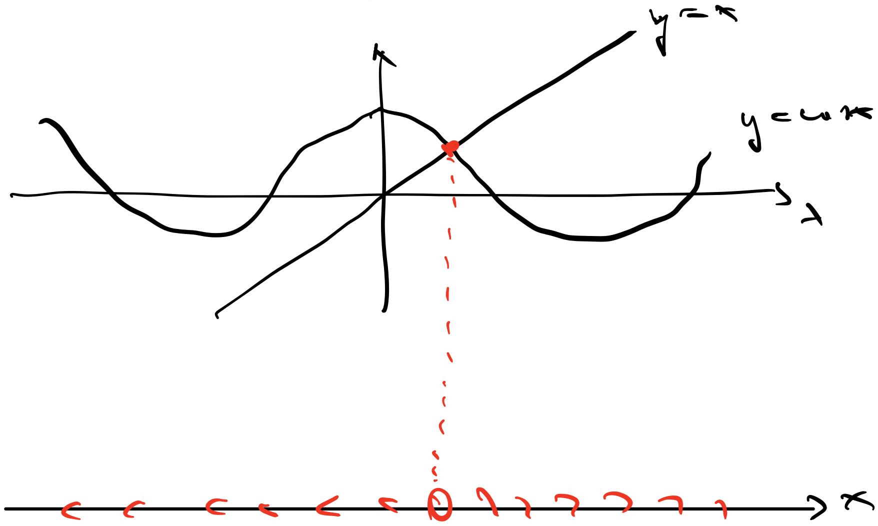
$$\frac{d}{dt} x = 0$$



$\dot{x} = x^2 - 1$



$\dot{x} = x - \cos x$



$y = x$

$y = \cos x$

Esempio

Popolazione N individui

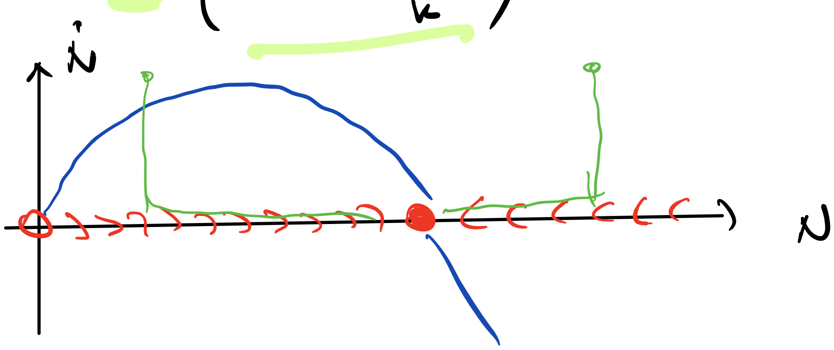
MALTHUS : $\frac{d}{dt} N = r N$ $\quad r > 0$

Risorse sono limitate : VERHULST 1838

ipotizzo $\frac{\dot{N}}{N}$ diminuisce con N

$$\frac{d}{dt} N = r N \left(1 - \frac{N}{k} \right) \qquad k > 0$$

$N > 0$



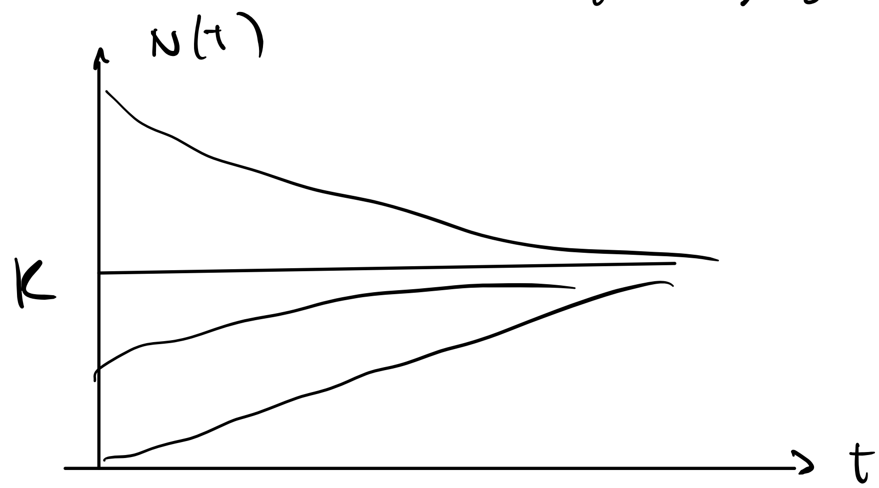
$N^* = 0$

$N^* = k$

$N^* = 0$ instabile

$N^* = k$ stabile : se $N_0 \neq 0$
$N(t=0)$

allora $N(t) \longrightarrow k$
$t \longrightarrow \infty$



k capacità portante

Analisi lineare :

punto di equilibrio

$$x(t) = x^* + \eta(t)$$

è perturbazione

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}\eta(t) = f(\eta(t) + x^*)$$

$$= f(x^*) + \eta f'(x^*) + O(\eta^2)$$

- $f(x^*) = 0$ perché punto di equilibrio
$\frac{dx}{dt} = 0 = f(x(t))$
- η piccolo = lavoriamo al primo ordine
- assumiamo $f'(x^*) \neq 0$

$$\frac{d}{d\tau}\eta(\tau) = \eta(\tau)\, f'(x^*)$$ eq. diff che governa la perturbazione

perturbazione cresce exp se $f'(x^*) > 0$

decresce " " $f'(x^*) < 0$

Se $f'(x^*) \neq 0$, il segno della derivata determina la stabilità del punto critico

Commento: soluzioni sono exp $\sim e^{f'(x^*)t}$

la quantità $\frac{1}{|f'(x^*)|}$ fissa la scala temporale

Def Un punto critico x^* t.c. $f'(x^*) \neq 0$ si dice IPERBOLICO (o non-degenere)

Def Sistema dinamico si dice IPERBOLICO se tutti i punti critici sono iperbolici.

Esempio eq. logistica $f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{k}\right)$

$f'(N) = r - \frac{2rN}{k}$: $f'(0) = r > 0$ instabile

$f'(k) = -r < 0$ stabile

$N^* = k$

Commenti:

1) $\dot{x} = f(t)$ non può avere soluzioni periodiche

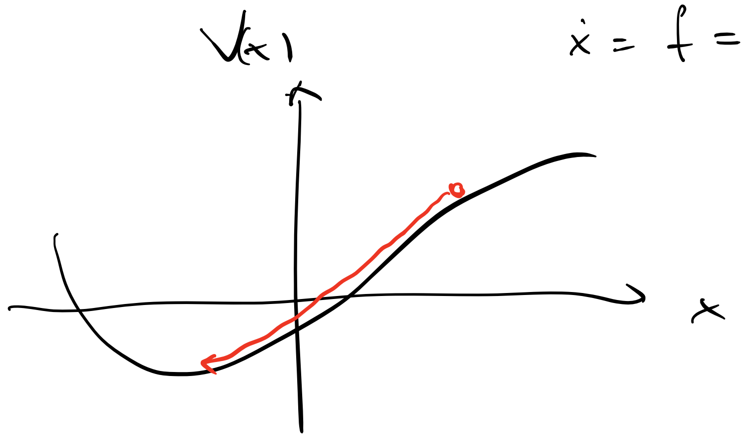
Diverso sarà il caso S^1

2) Supponiamo che $f(x) = -\frac{d}{dx}V(x)$ $\quad V(x) = -\int_0^x f(s)\,ds$

$V(x(\tau))$

$$\frac{d}{d\tau}V(x(\tau)) = \frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = -\frac{dV}{dx}\frac{dV}{dx} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

$\dot{x} = f = -\frac{dV}{dx}$



pti di eq

$\frac{dV}{dx} = 0$

Supponiamo di avere

$$\frac{d}{d\tau}x(\tau) = f_\mu(x(\tau)) = f(x(\tau), \mu)$$

vogliamo capire come cambia l'andamento qualitativo al variare di μ

Cambio drastico : BIFORCAZIONE

x^* punto critico iperbolico per un qualche μ^*: $\quad f_{\mu^*}(x^*)=0 \quad f'_{\mu^*}(x^*)\neq 0$

Situazione: $\quad f(x^*,\mu^*)=0$ con $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,\mu^*}\neq 0$

il Teorema della funzione implicita dice che esiste un unica funzione $x(\mu)$ tale che $f(x(\mu),\mu)=0$ per μ abbastanza vicino a μ^*, dove $x(\mu^*)=x^*$

Il punto di equilibrio è STRUTTURALMENTE STABILE: non può essere rimosso variando μ

Punti critici iperbolici rimangono iperbolici per variazioni di μ
(continuità rispetto ai parametri
$\longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x(\mu),\mu)\neq 0$)

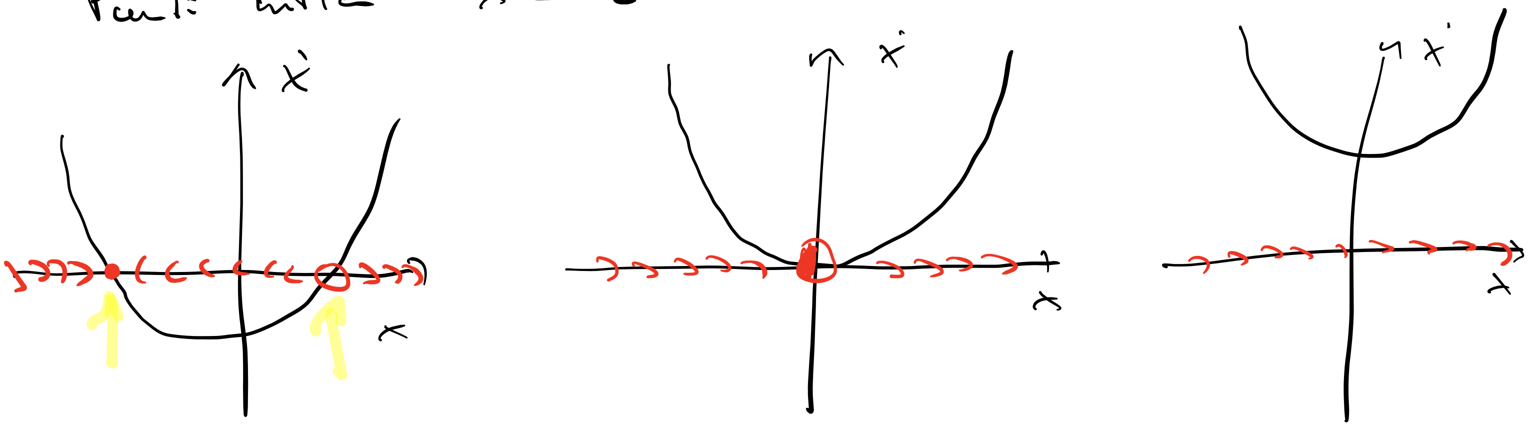
Cosa succede se $f_\mu = f'_\mu = 0$ simultaneamente

Esempi

Biforcazione Tangente : punti critici vengono creati o distrutti

$\dot{x} = r + x^2$

Punti critici $x^2 = -r$

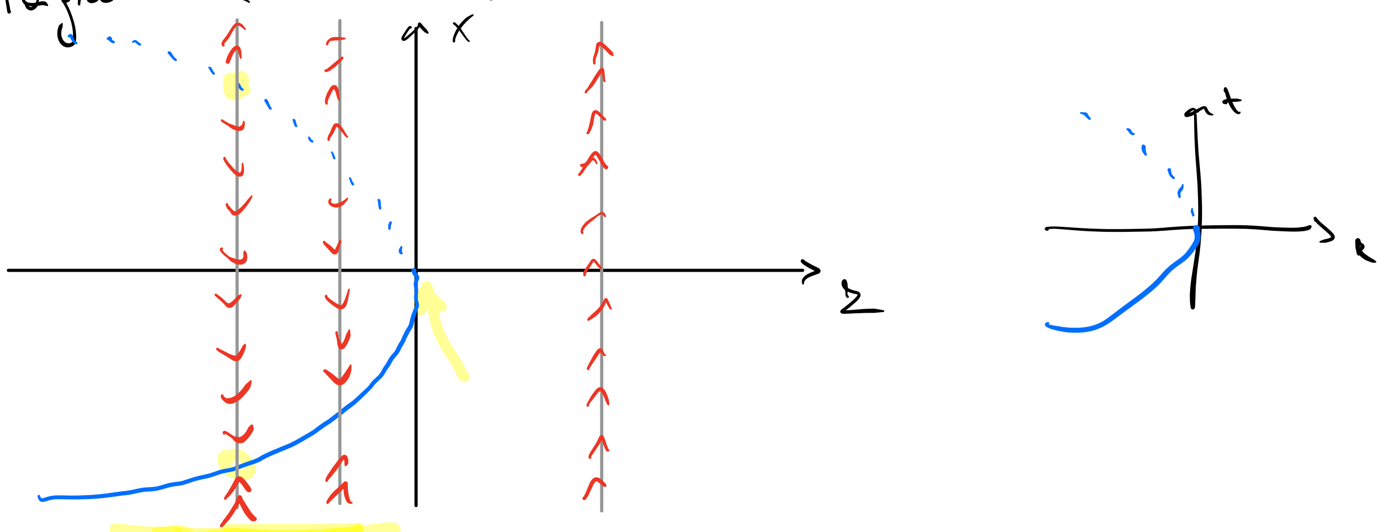


$r < 0$ $r = 0$ $r > 0$

Differenza tra $r < 0$ e $r > 0$

E' avvenuta una biforcazione per $r = 0$

Diagramma di biforcazione :

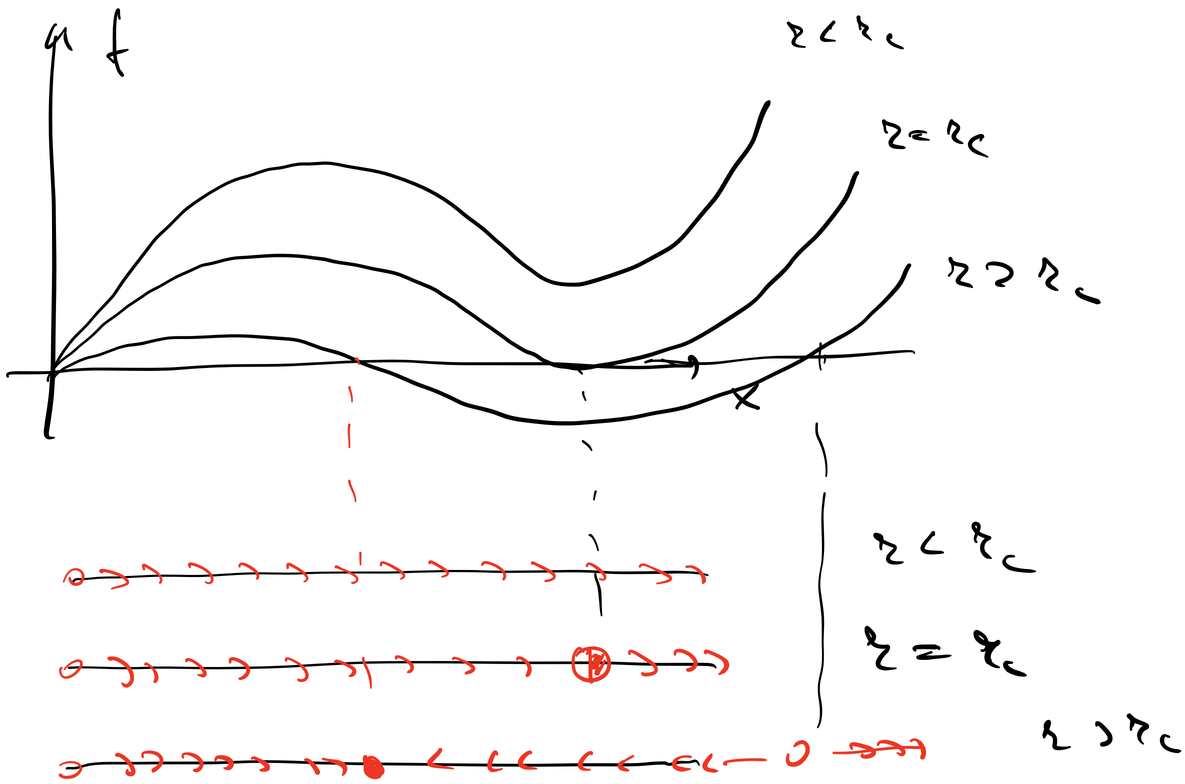


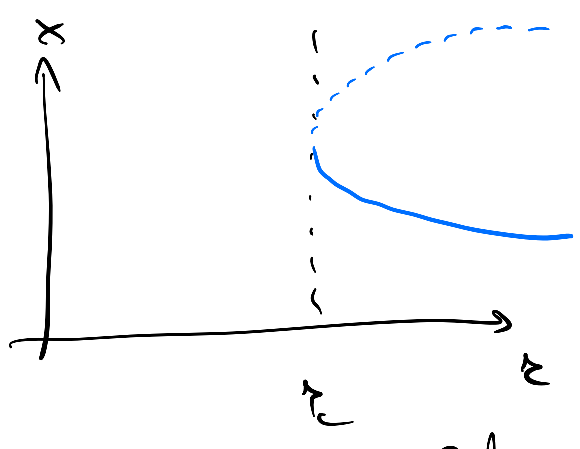
Prendiamo $\dot{x} = f(x; r)$

Si ha una biforcazione tangente quando

$f(x^*; r_c) = 0$ — condizione che x^* sia un pto critico

$f'(x^*; r_c) = 0$ — condizione di tangenza





$$\dot{x} = f(x, r) = f(x^*, r_c) + (x - x^*) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x^*, r}$$

$$+ (r - r_c) \frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{x^*, r} + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x^*, r_c} + \dots$$

$$\simeq \alpha (r - r_c) + \beta (x - x^*)^2 + \dots$$

per biforcazione Tangente $\alpha = \frac{\partial f}{\partial r}\Big|_{x^*, r_c}$

e $\beta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x^*, r_c}$ sono non nulli

$$\boxed{\dot{x} = r + x^2}$$ è "canonico"

struttura che appare al primo ordine una banale

"forma canonica" della biforcazione