L'integrale di Riemann

Prof.ssa Garagnani Elisa

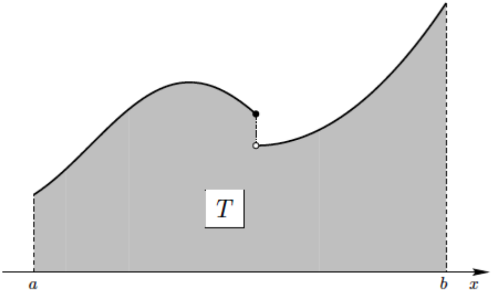
(Bernhard Riemann 1826-1866)

Integrali

- Fra i problemi storici che portarono all'introduzione del concetto di integrale il più classico è il *problema delle aree*.
- Fin dall'antichità è stato affronatto il calcolo delle aree di figure piane delimitate da archi di curva: già Archimede nel III secolo a.C. riuscì a determinare l'area di un segmento parabolico.

- Fra i problemi storici che portarono all'introduzione del concetto di integrale il più classico è il *problema delle aree*.
- Fin dall'antichità è stato affronatto il calcolo delle aree di figure piane delimitate da archi di curva: già Archimede nel III secolo a.C. riuscì a determinare l'area di un segmento parabolico.

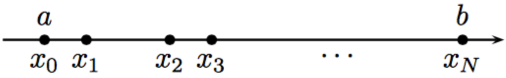
Una classe di figure abbastanza generale è quella dei sottografici di funzioni reali di variabile reale, detti *trapezoidi*:



Sia f una funzione definita nell'intervallo $[a; b]$, limitata (cioè esiste una costante $M \geq 0$ tale che per ogni $x \in [a; b]$ si abbia $-M \leq f(x) \leq M$), non necessariamente continua.
Per ogni numero naturale n costruiamo:

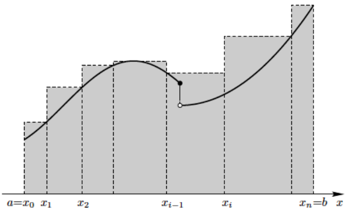
- $(n+1)$ punti $a = x_0; x_2; \cdots ; x_n = b$ che suddividono $[a, b]$ in n parti.

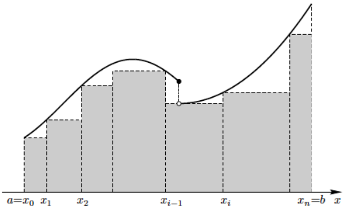
$$a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b$$



- I valori massimi $M_1, \cdots, M_n$ che la f assume in ciascuno degli n subintervalli ottenuti al punto precedente. (o eventualmente gli estermi superiori...)
- I valori minimi $m_1, \cdots, m_n$ che la f assume in ciascuno degli n subintervalli ottenuti al primo punto. (o eventualmente gli estermi inferiori...)
- La somma superiore e la somma inferiore:

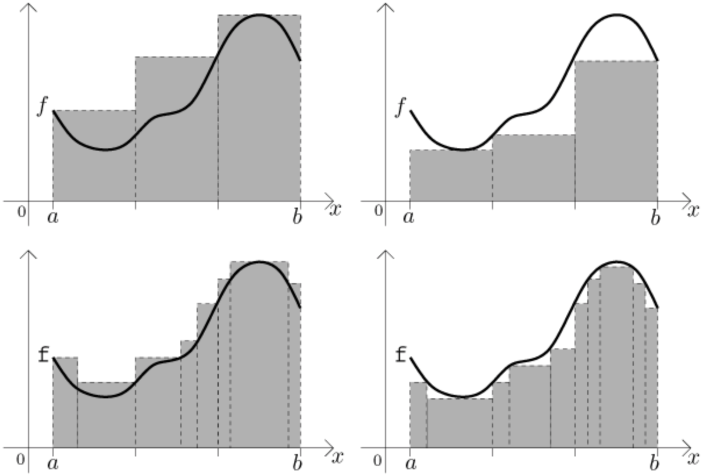
$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} M_k \left(x_k - x_{k-1} \right) \qquad s(n) = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k - x_{k-1} \right)$$





Raffinando la suddivisione di $[a, b]$ con n via via crescente, si ha che la somma inferiore cresce, mentre quella superiore decresce.
Abbiamo in questo modo costruito due successioni:

$S(n)$ che decresce al crescere di n; $\quad$ $s(n)$ che cresce al crescere di n



Definizione (Integrale secondo Riemann)

Per definizione, la funzione f nell'intervallo $[a; b]$ è integrabile secondo Riemann se le due successioni (somma inferiore e somma superiore) convergono allo stesso numero reale.

$$\lim_{n\to+\infty} s(n) = \lim_{n\to+\infty} S(n)$$

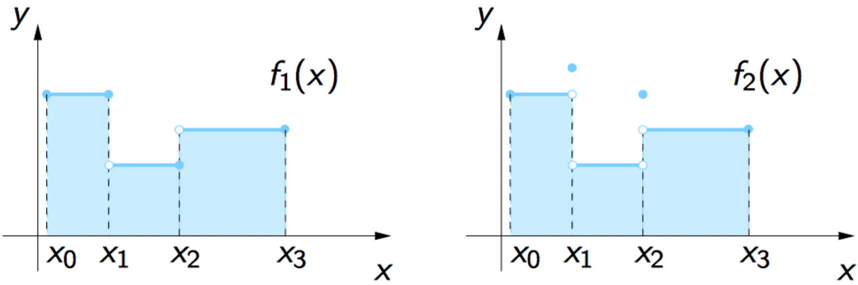
Tale limite viene detto integrale di f da a a b e si indica col simbolo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema

Ogni funzione continua nell'intervallo $[a;b]$ *è integrabile in tale intervallo.*

Esempi:



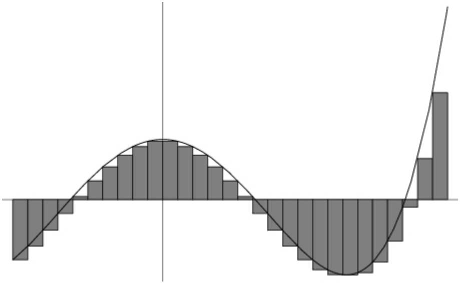
Queste due funzioni hanno lo stesso integrale.
L'integrale non dipende dal valore che f assume in un numero finito di punti.

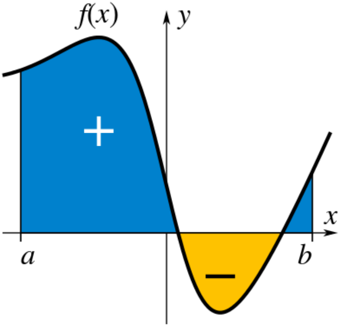
Abbiamo visto che ad ogni f limitata possiamo, con un po' di lavoro, associare due numeri: s (limite delle somme inferiori) e S (limite delle somme superiori), nel modo descritto. Per tali due numeri avremo sempre $s \leq S$, ma non sappiamo (senza saperne di più su f) se avremo $s < S$ oppure $s = S$.
Colloquialmente: se la f è una funzione decente, cioè se NON è una delle famose schifezze che i matematici sono così bravi ad inventarsi, avremo $s = S$. Ma i matematici, con la loro immaginazione, sanno trovare anche delle f per cui risulta $s < S$. Ad esempio per la **funzione di Dirichlet** $D : [0; 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

risulta $S = 1$ e $s = 0$, e quindi non è integrabile!
(Domanda: *perché?*).

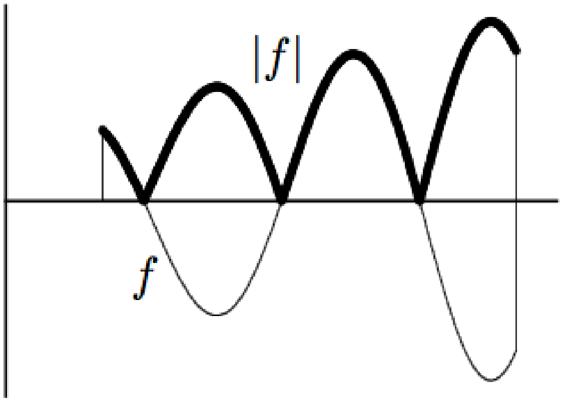
In realtà siamo partiti dall'area, ma non è corretto identificare l'integrale con l'area del sottografico di una funzione. Infatti quando la funzione è negativa...





L'area della regione di piano compresa tra il grafico di f, l'asse x e le rette $x = a$ e $x = b$ è

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

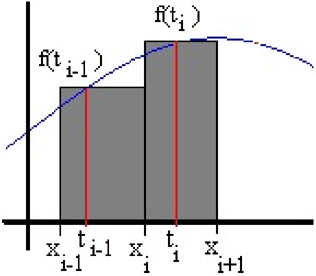


Oltre alle già considerate somme integrali inferiori e superiori, molto significative sono le cosiddette somme di Cauchy.
Sia f una funzione definita nell'intervallo $[a; b]$, limitata. Dividiamo l'intervallo in n sottointervalli e scegliamo in ogni intervallo un elemento $t_k \in [x_{k-1}; x_k]$, per ogni $k = 1, \ldots, n$.

Ogni somma del tipo

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

è detta somma integrale di Cauchy.



Teorema

Se f è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[a; b]$ allora ogni somma di Cauchy tende all'integrale di f nell'intervallo $[a; b]$

Le somme di Cauchy sono più flessibili nel calcolo di un integrale mediante la definizione. Anche volendo utilizzare una somma integrale per approssimare il valore di un integrale, risulta in generale arduo il calcolo di una somma inferiore o superiore, mentre più praticabile è il calcolo di una somma di Cauchy (che comporta solo la valutazione della funzione in n punti).

Teorema (della media integrale)

Siano a e b due numeri reali, con $a < b$.
Sia f una funzione continua su $[a; b]$.
Allora esiste $c \in [a; b]$ tale che

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b - a}$$

Prima della dimostrazione, facciamo qualche commento. Innanzi tutto, introduciamo la quantità

$$Q = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b - a}$$

che viene anche chiamata media di f su $[a; b]$. Si tratta di una quantità che interviene in moltissime applicazioni, e per questo merita una piccola discussione sul suo "significato fisico".
Notiamo anche esplicitamente che, nelle applicazioni, la dimensione fisica di Q è la stessa della f.

Teorema (della media integrale)

Siano a e b due numeri reali, con $a < b$.
Sia f una funzione continua su $[a; b]$.
Allora esiste $c \in [a; b]$ tale che

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

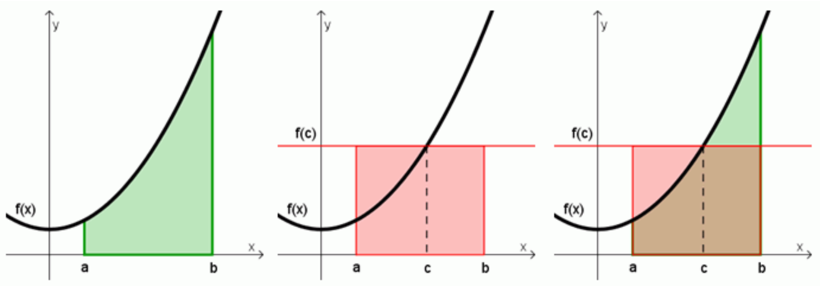
Prima della dimostrazione, facciamo qualche commento. Innanzi tutto, introduciamo la quantità

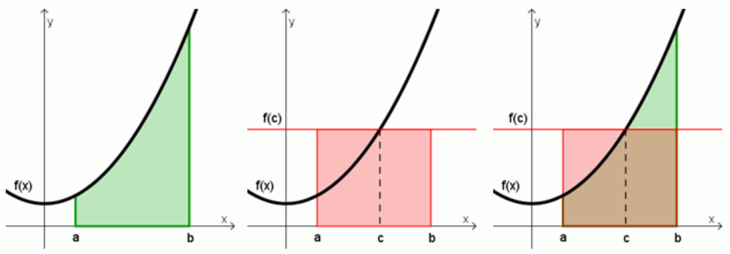
$$Q = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

che viene anche chiamata media di f su $[a; b]$. Si tratta di una quantità che interviene in moltissime applicazioni, e per questo merita una piccola discussione sul suo "significato fisico".
Notiamo anche esplicitamente che, nelle applicazioni, la dimensione fisica di Q è la stessa della f.

Se la funzione f è positiva, esiste un rettangolo di base $(b-a)$ e altezza $f(c)$, con $c \in [a; b]$, che ha la stessa area del trapezoide:

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

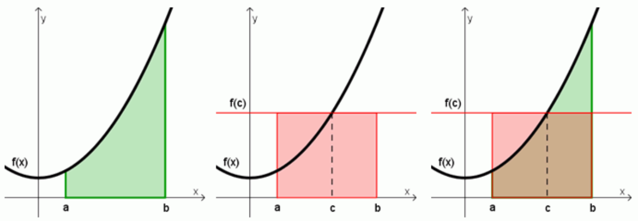




Nella parte destra della figura, la quota $Q = f(c)$ è tale che le aree delle due regioni (verde e rosa) siano uguali tra loro.
Se la regione verde fosse fatta di ghiaccio, e la sciogliessimo (impedendole di uscire lateralmente dalle "pareti" $x = a$ e $x = b$, e dimenticando il cabiamento di volume dell'acqua tra lo stato solido e quello liquido...), l'acqua ottenuta riempirebbe proprio il rettangolo di base $[a; b]$ e altezza Q.

Significato fisico

Immaginiamo di modificare la parte sinistra della Figura, mantenendo intatta la "quantità di materia" verde, ma rendendo costante la funzione. Come succede in una zuccheriera quando, picchiettando sul bordo, facciamo assestare lo zucchero in modo che sia tutto alla stessa altezza (come farebbe un liquido).



Dunque la media, in questo contesto, indica il valore della funzione che, se considerato costante, ne lascerebbe immutato l'integrale.
(Ad esempio, in riferimento al video, quale velocità costante avrebbe percorso lo stesso spostamento nello stesso intervallo di tempo?)

Dimostrazione del teorema della media integrale.