Fisica Generale 1 – 018IN
Cinematica

Prof. Pierre Thibault
pthibault@units.it

Cinematica

Lo studio del moto

dinamica: la causa del moto

statica: equilibrio meccanico
(la causa dell'immobilità)

meno densa

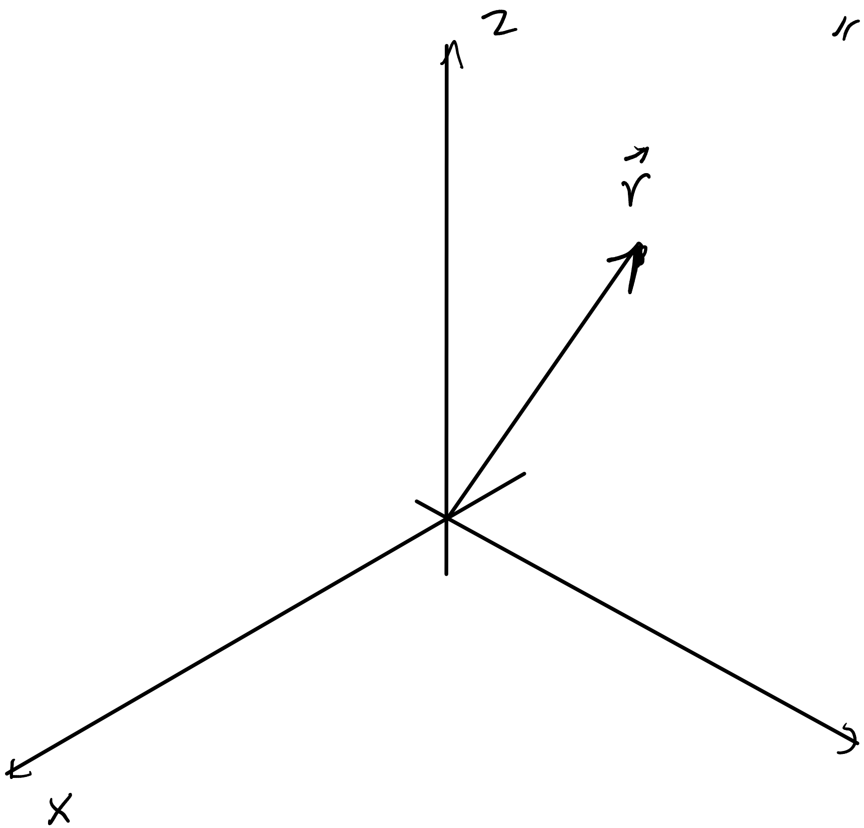
più densa

appossimazione:

un punto

(punto materiale)

Posizione e spostamento



"vettore" posizione

$|\vec{r}|$ non ha tanto significato:

dipende della posizione dell'origine

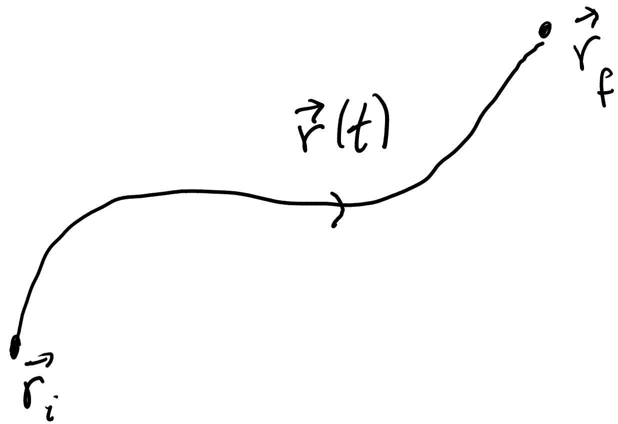
(sistema di riferimento)

spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

modulo: $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

e.g. componente lungo un asse: $\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j} + \Delta z\,\hat{k}$

Posizione funzione del tempo

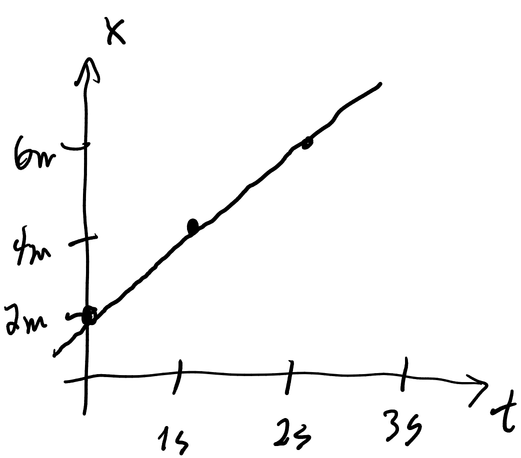


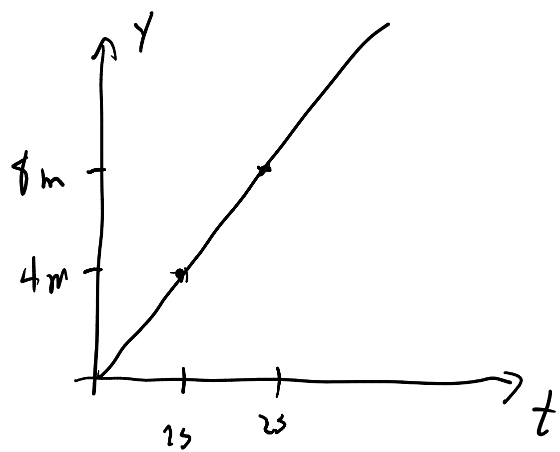
Esempio:

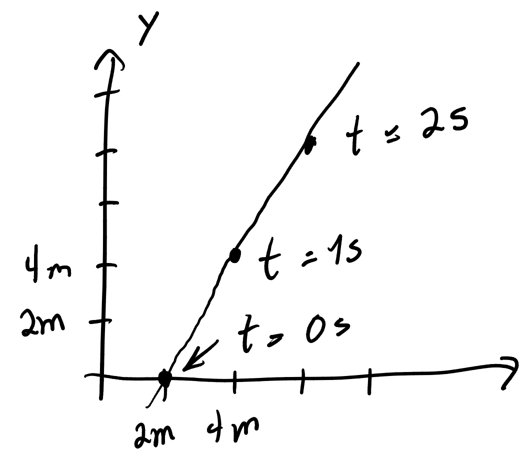
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

$$x(t) = 2m + 2\,m/s \cdot t$$

$$y(t) = 0m + 4\,m/s \cdot t$$



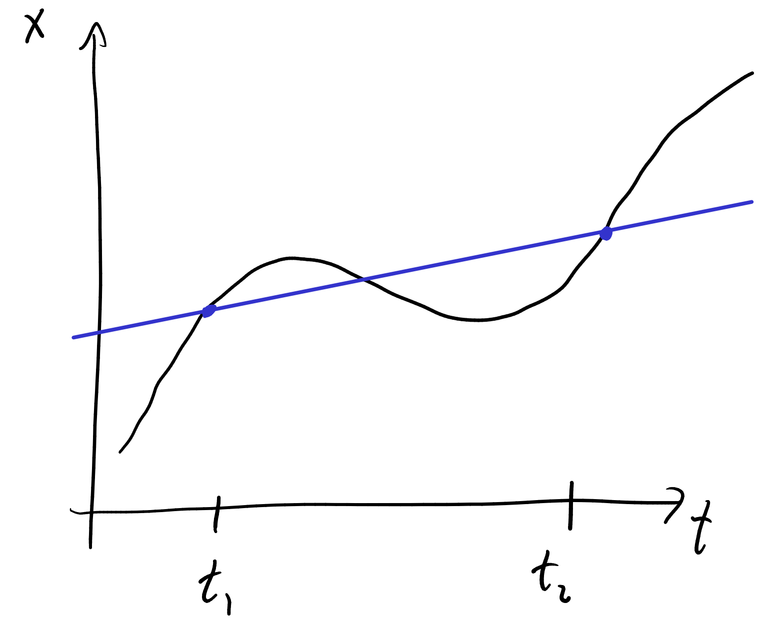




Velocità

Velocità media

$$\langle v \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



Velocità istantanea

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

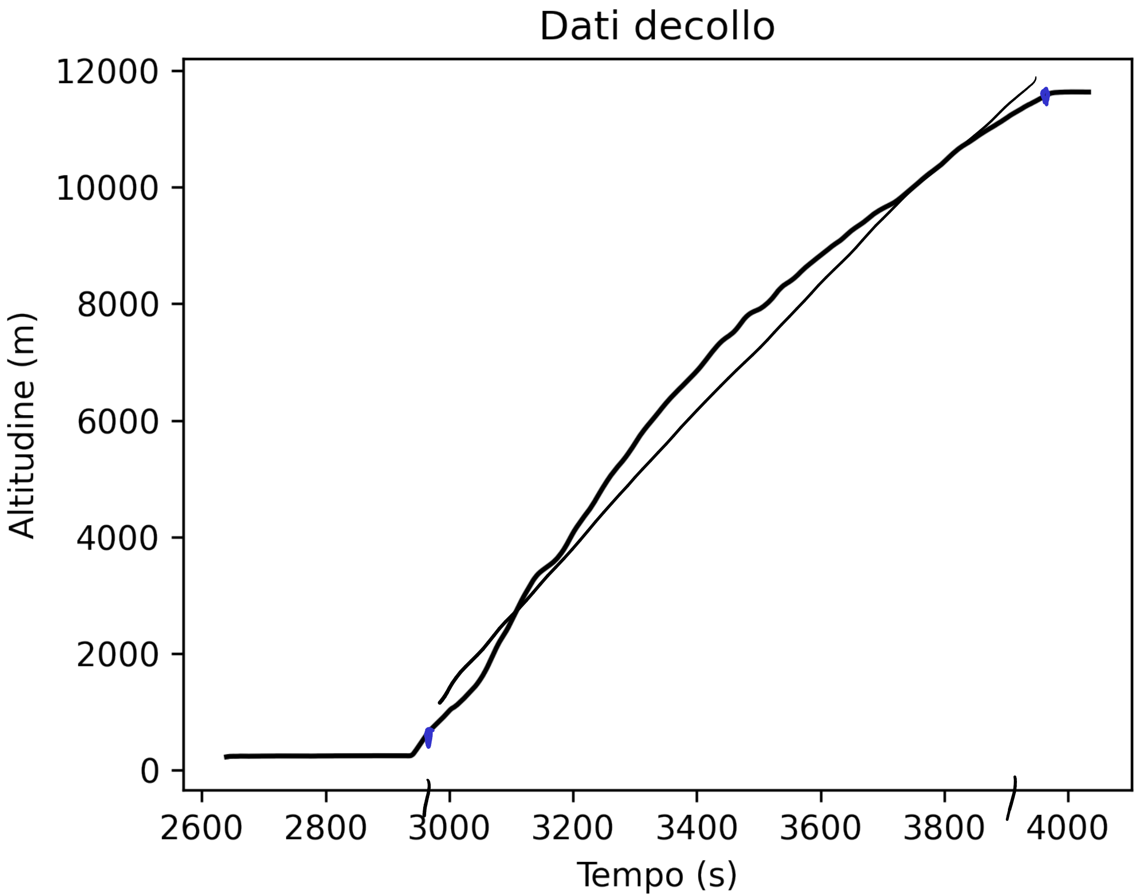
$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

supposizione:

$\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$

non sono funzioni del tempo!

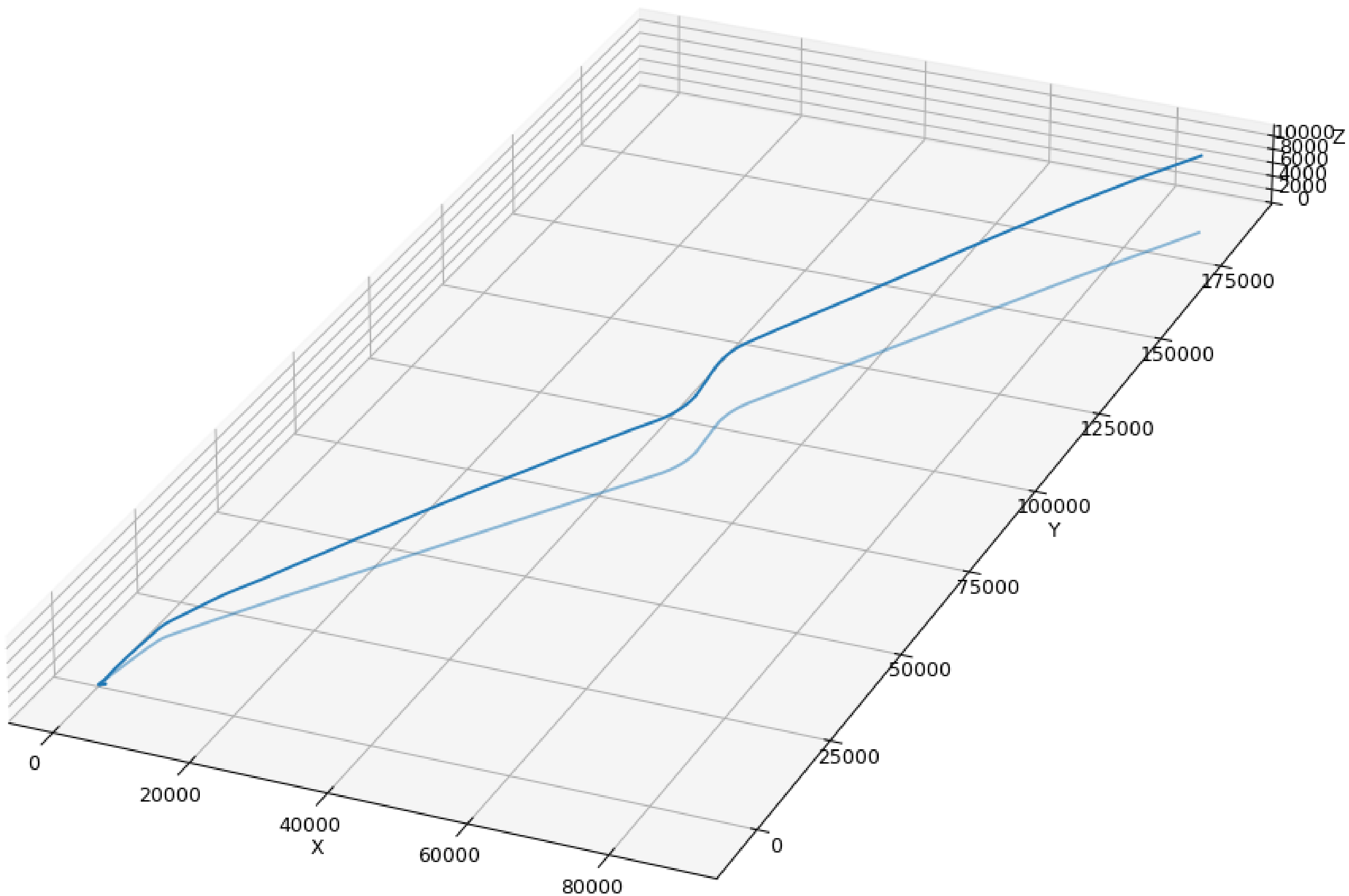
Velocità



$$v_2 = \frac{11000\ m}{1000\ s} \simeq 11\ m/s$$

$$= 40\ km/h$$

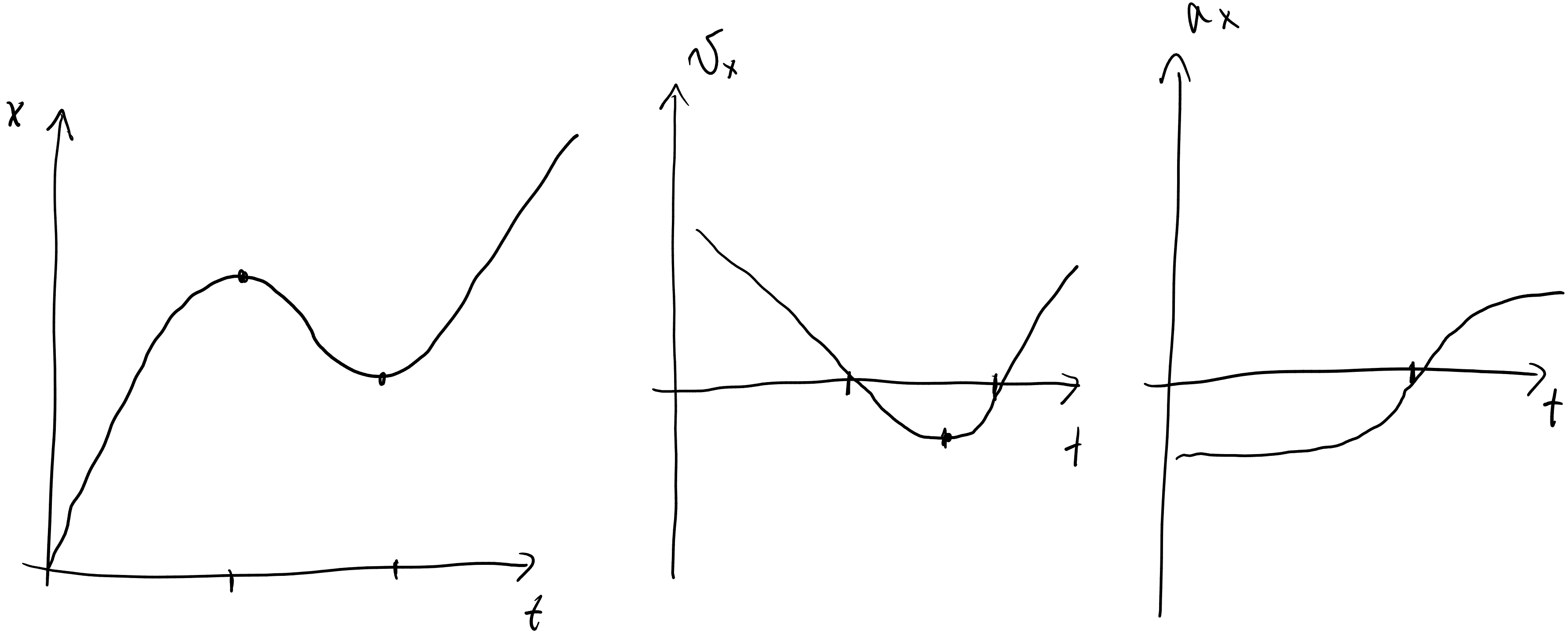
Velocità



10000
8000
6000
4000
2000
0
Z
175000
150000
125000
100000
Y
75000
50000
25000
0
0
20000
40000
X
60000
80000

Accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



Accelerazione

esempio:

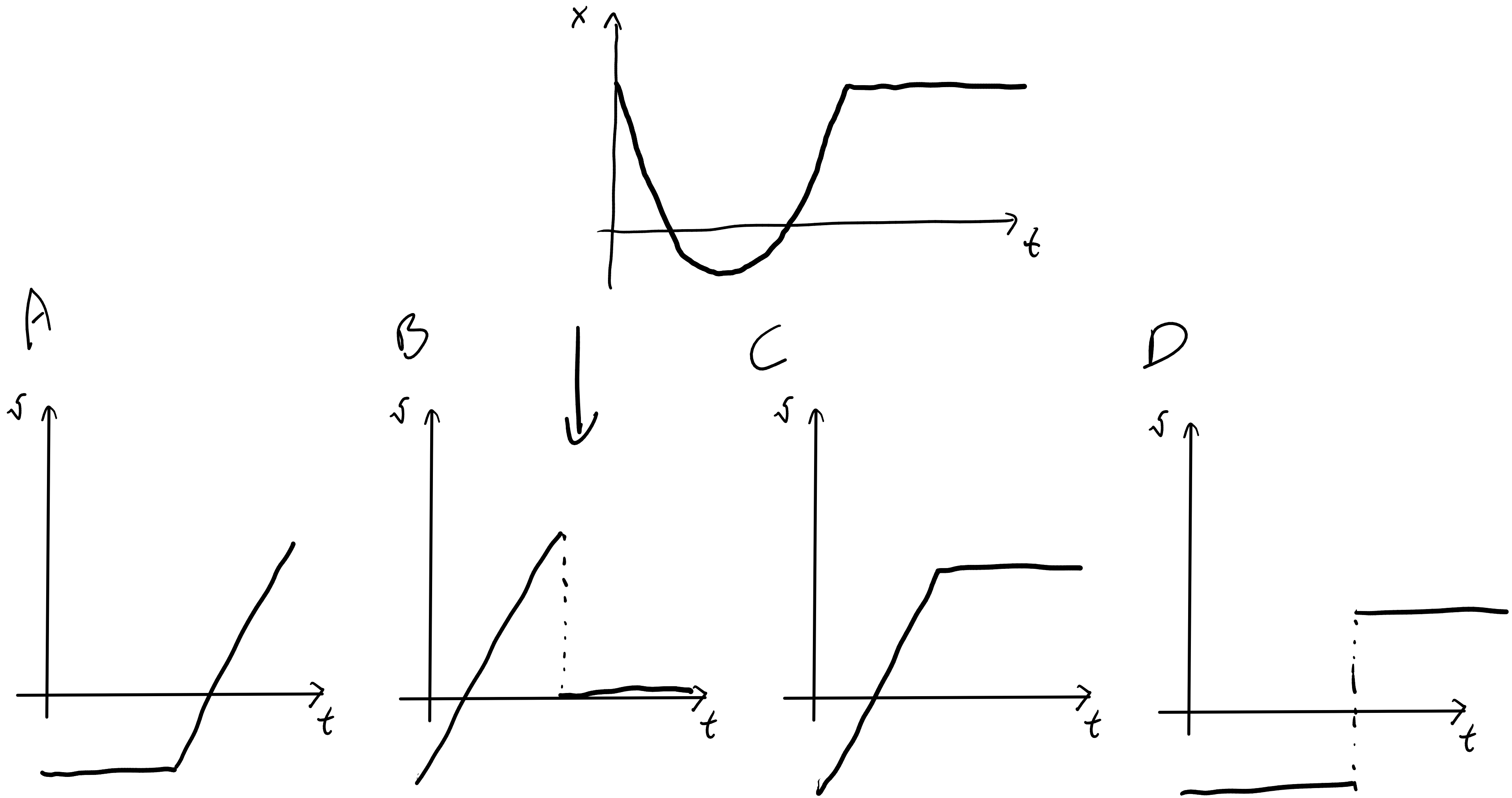
$$x(t) = A\cos(\omega t) \leftarrow [A] = m$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t) \qquad [v] = m/s = [A\omega]$$

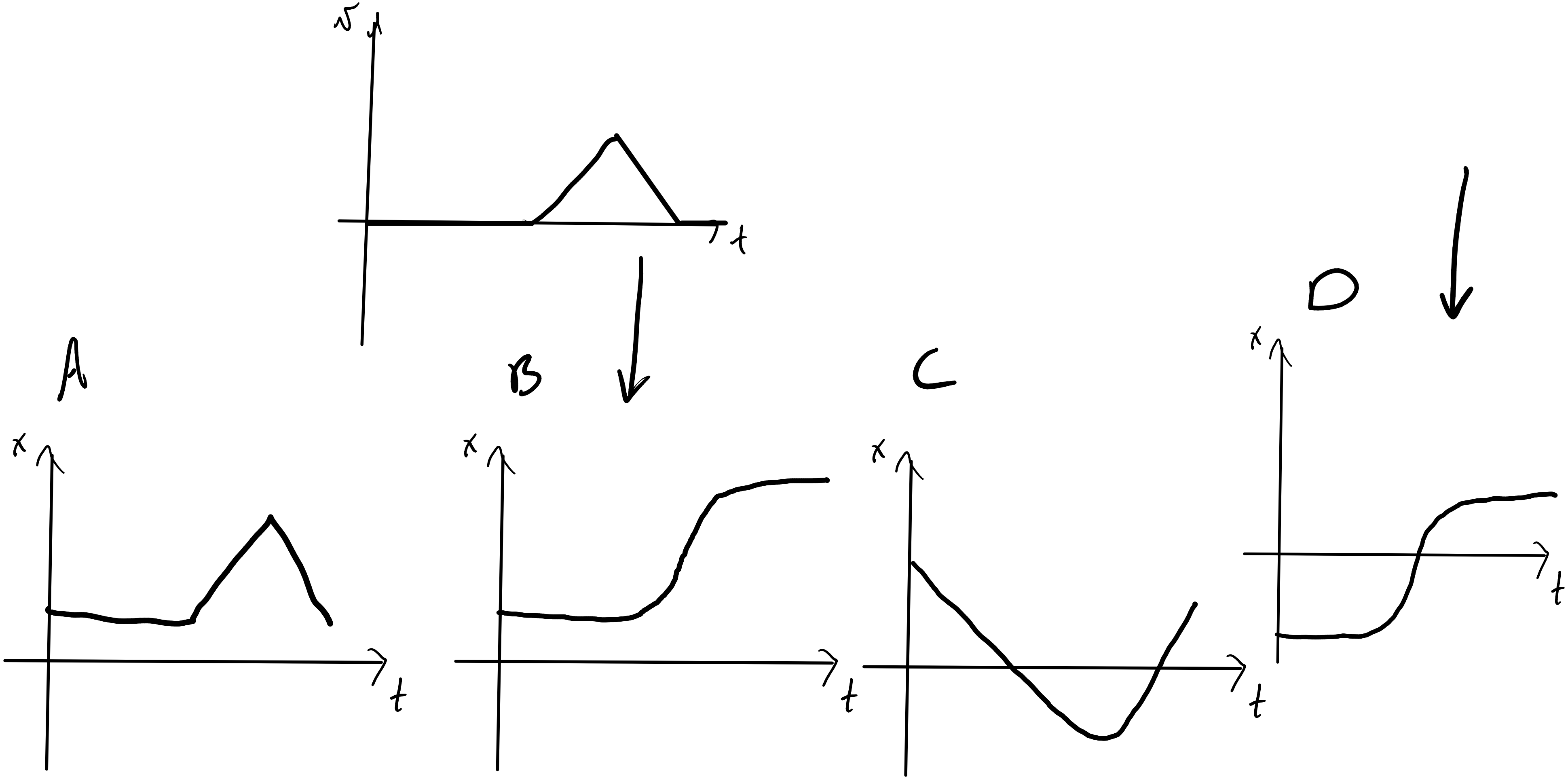
$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)$$

$$= -\omega^2 x(t)$$

Derivata e integrazione



Derivata e integrazione



Moto con accelerazione costante

a: costante

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \rightarrow \quad dv = a\,dt$$

$$v = \int dv = \int a\,dt = at + C$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt = v - v_0 = a(t-t_0)$$

$$v = v_0 + a(t-t_0) \qquad t_0 = 0$$

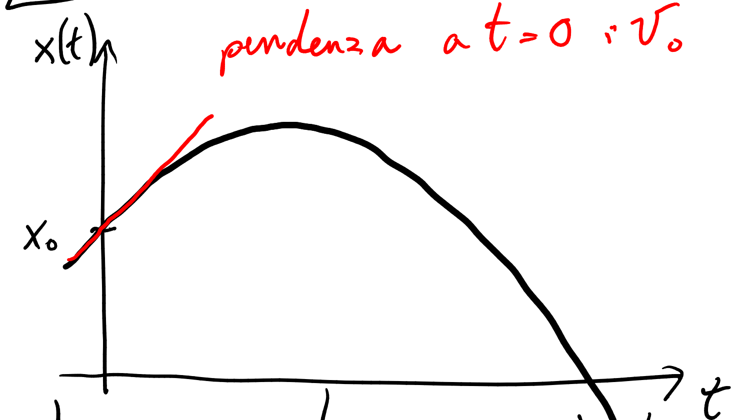
$$\boxed{v(t) = v_0 + at}$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = v_0 + at$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)\,dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$



legge oraria per il moto con accelerazione costante

Moto con accelerazione costante

$$* \quad v(t) = at + v_0$$

$$** \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Proviamo ad eliminare t

$$(*) \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$(**) \quad x = \frac{1}{2}a\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2 + v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right) + x_0$$

$$x = \frac{1}{2a}\left(v^2 + v_0^2 - \cancel{2vv_0}\right) + \cancel{\frac{v_0 v}{a}} - \frac{v_0^2}{a} + x_0$$

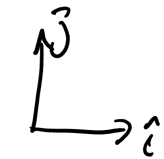
$$\rightarrow x = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a} + x_0$$

$$\boxed{v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)}$$

valido solo per il moto uniformemente accelato!

Caduta libera

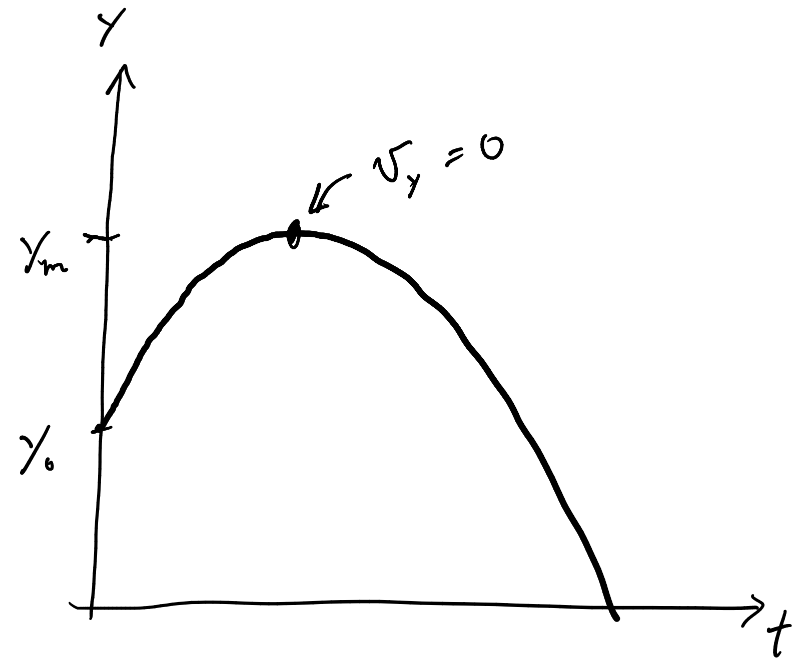
La caduta libera succede con la stessa accelerazione per tutti i corpi



$$\vec{a} = -g\hat{j} \qquad g = 9.8\ m/s^2$$

$$v_y = -gt + v_{0y}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$



$$\boxed{\underset{v_y^2 = 0}{v^2} - \underset{v_{0y}^2}{v_0^2} = 2\underset{-g}{a}(\underset{y_m}{x} - \underset{y_0}{x_0})}$$

$\Rightarrow$

$$-v_{0y}^2 = -2g(y_m - y_0)$$

$$\boxed{y_m = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}}$$

Il moto dei proiettili

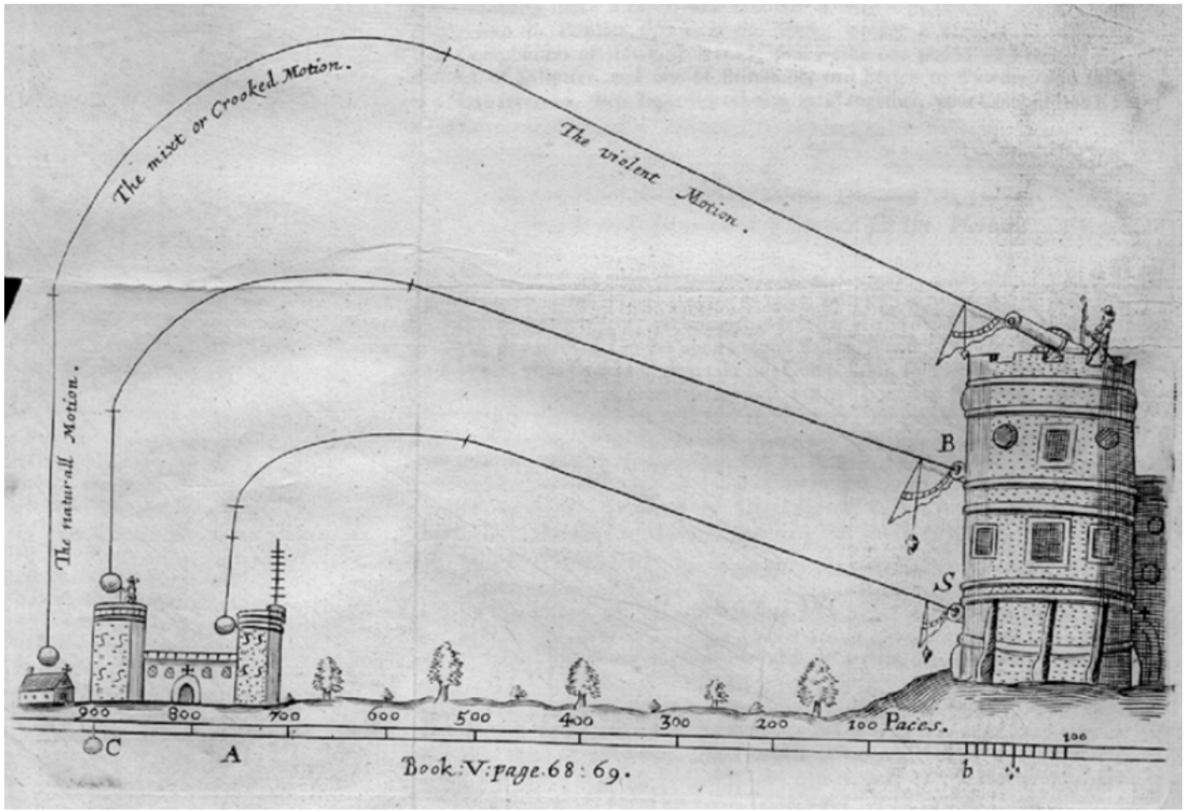


Figure 5. Diagram of projectile motion in Samuel Sturmy's 'The Mariners Magazine. 5: Mathematical and Practical Arts' published in 1669.

Importanza storica

- Aristotele (340 AEC)
  ↳ moto "naturale è forzato"
  ↳ proiettili: forzato da cosa?
- Filipono (490-570 EC)
  ↳ "impeto"
- Galileo (1564-1642 EC)

si impiega ad osservare e misurare invece di spiegare

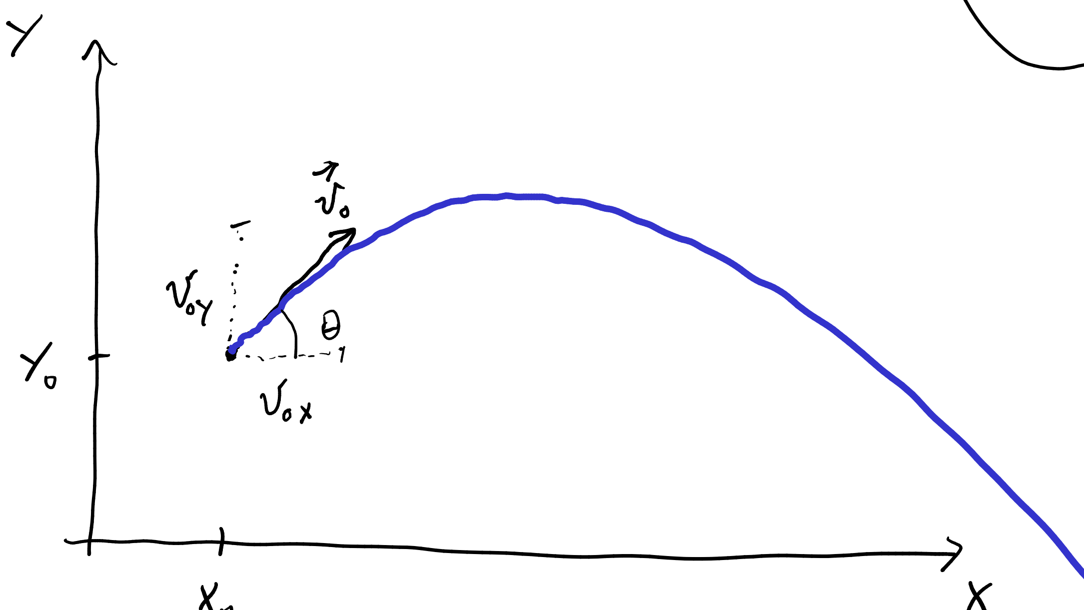
Il moto dei proiettili

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = 0\hat{i} - g\hat{j} + \cancel{0\hat{k}}$$

$$\vec{v}(t) = v_{0x}\hat{i} + (-gt + v_{0y})\hat{j} + \cancel{v_{0z}\hat{k}}$$

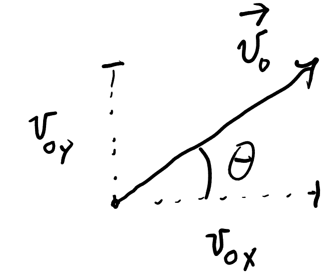
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = (v_{0x}t + x_0)\hat{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0\right)\hat{j}$$

"legge oraria" $\vec{r}(t)$



Il moto dei proiettili

Spesso v_0, θ invece di v_{0x} e v_{0y}



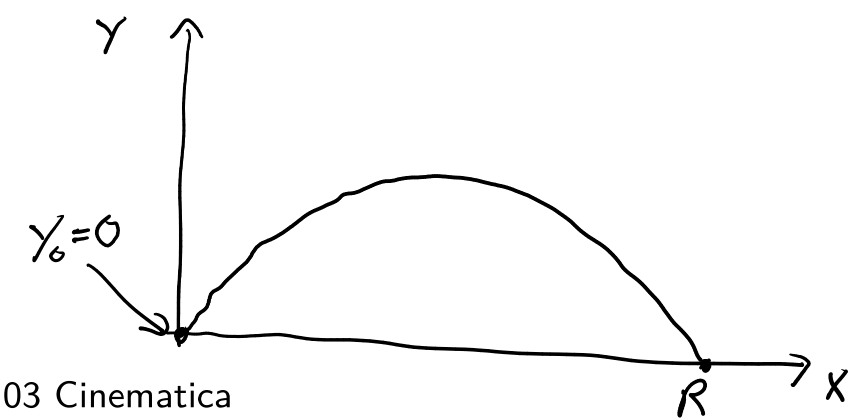
$v_{0x} = v_0 \cos\theta$, $v_{0y} = v_0 \sin\theta$

* Altezza massima: come per la caduta libera

$$y_m = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

* Gittata: distanza orizontale percorsa da un corpo lanciato in aria

R "range" = "gittata"



$R = v_{0x}\, t_R$ ← durata del volo

$y(t_R) = 0$ *

Gitatta

$$y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$(*) : v_{0y} t_R - \frac{1}{2} g t_R^2 = 0$$

$t_R =$

$t_R = 0$
(no interessante)

$$\boxed{t_R = \frac{2 v_{0y}}{g}}$$

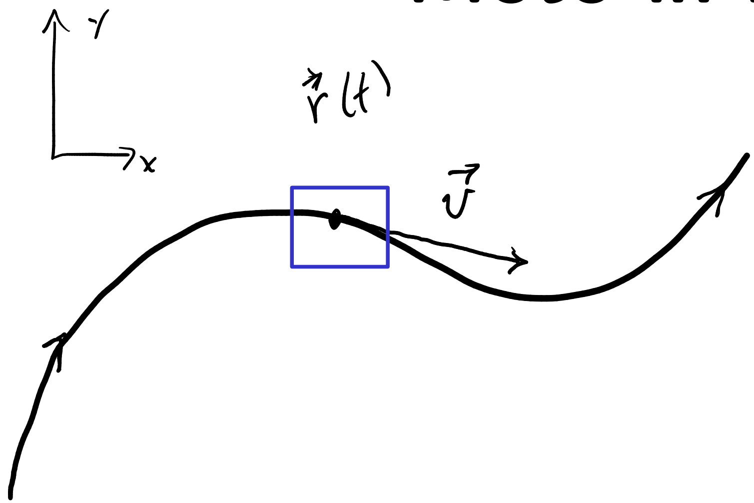
$$R = v_{0x} t_R = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

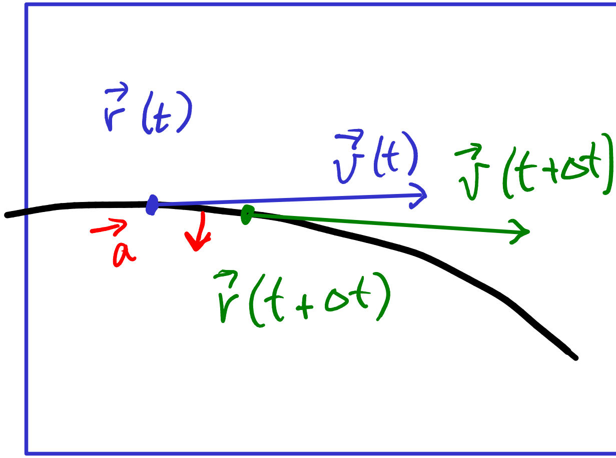
$$\boxed{R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$

Gittata per un percorso orizzontale

R massimo per $\theta = 45°$, in questo caso: $R = v_0^2/g$

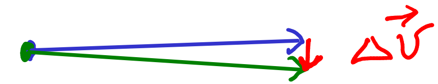
Moto in 2 e 3D





$\vec{v}$: sempre parallele alla tangente della curva $\vec{r}(t)$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

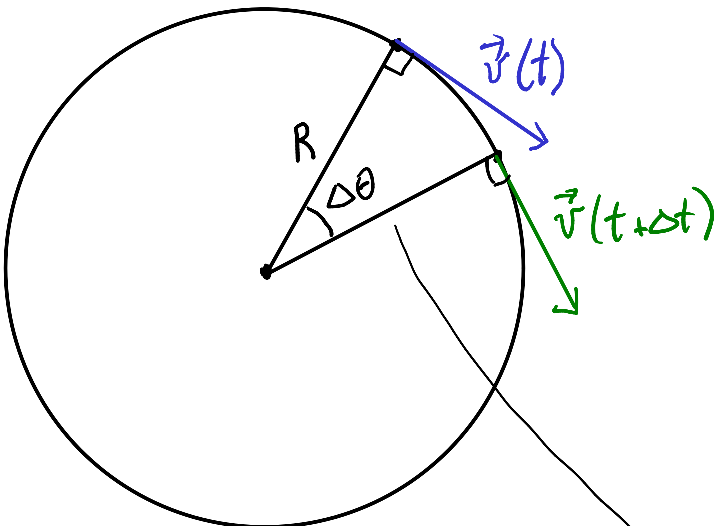


$\vec{a}$: può sempre esser scomposta tra:

- componente parallele a $\vec{v}$ $(\vec{a}_{\parallel}) \longrightarrow$ cambia il modulo di $\vec{v}$
- componente perpendicolare a $\vec{v}$ $(\vec{a}_{\perp}) \longrightarrow$ cambia la direzion di $\vec{v}$

Moto circolare uniforme

$|\vec{v}| = v$: costante



$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

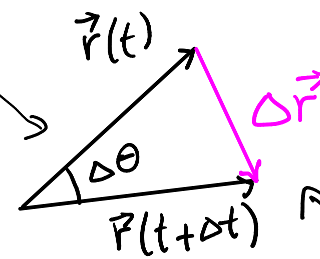
cerchiamo il modulo

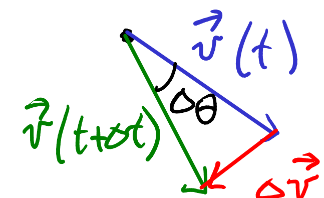
Circonferenza : $2\pi R$

Periodo: T

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$$

velocità angolare





triangoli simili

$$\Longrightarrow \frac{|\Delta r|}{R} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v} \qquad *$$

Moto circolare uniforme

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$(*) : |\Delta\vec{v}| = \frac{v|\Delta\vec{r}|}{R}$$

$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v\,\overbrace{|\Delta\vec{r}|}^{v}}{R\,\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}}$$

accelerazione centripeta

$$\boxed{a = \omega^2 R}$$

R costante , $\theta(t) = \omega t$

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\hat{i} + R\sin(\omega t)\,\hat{j}$$

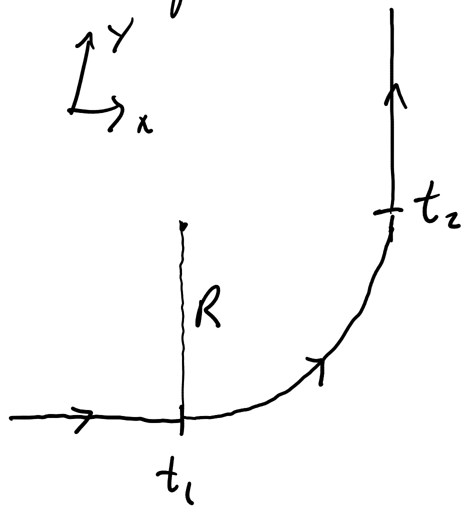
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -R\omega\sin(\omega t)\,\hat{i} + R\omega\cos(\omega t)\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\cos(\omega t)\,\hat{i} - R\omega^2\sin(\omega t)\,\hat{j}$$
$$= -\omega^2\vec{r}(t)$$

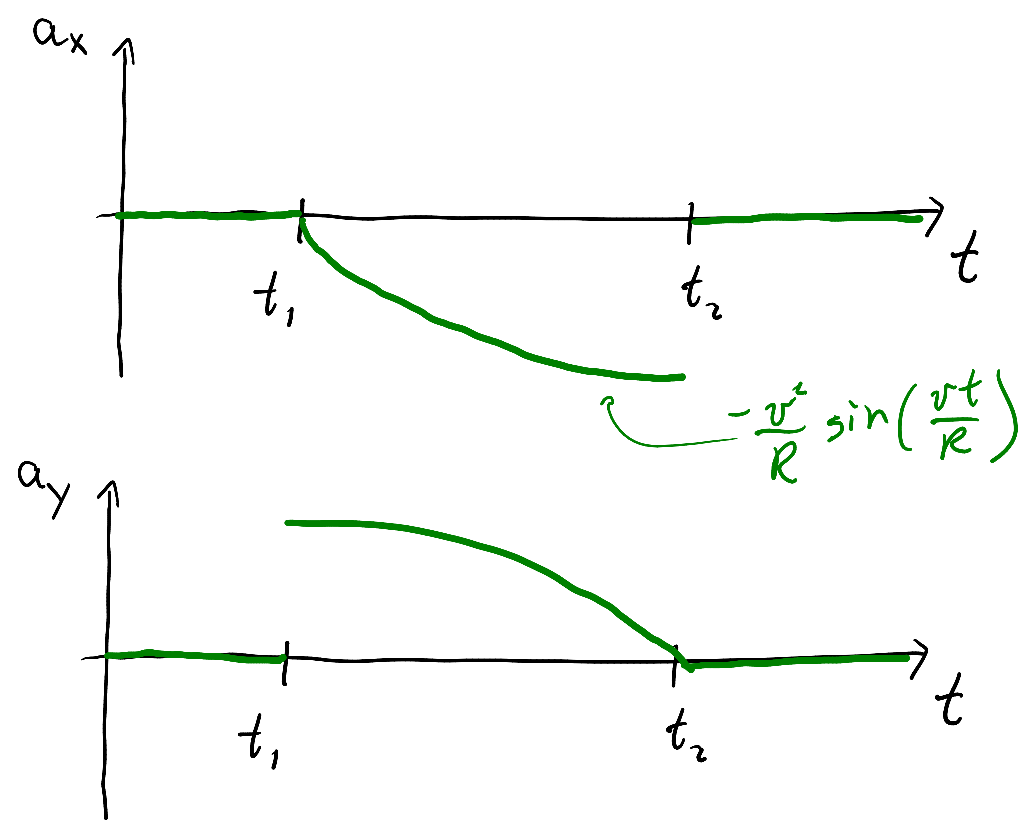
$$\Rightarrow a = \omega^2 R$$ in verso opposto a $\vec{r}$

Moto circolare uniforme

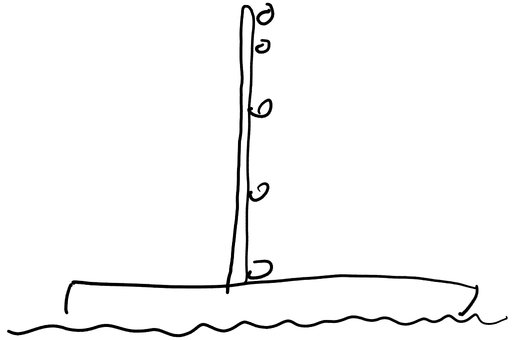
Esempio: veicolo su una strada a velocità costante v

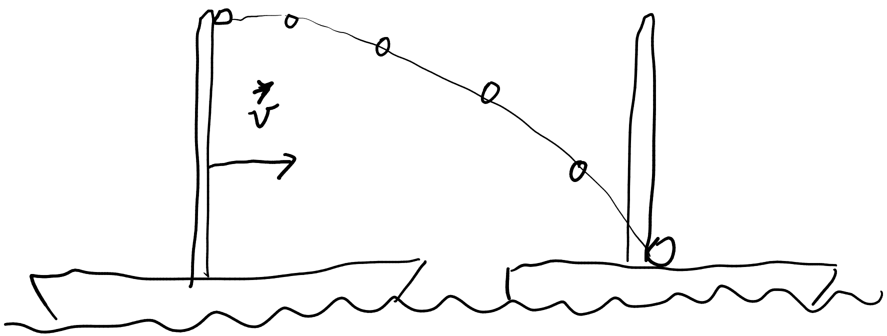


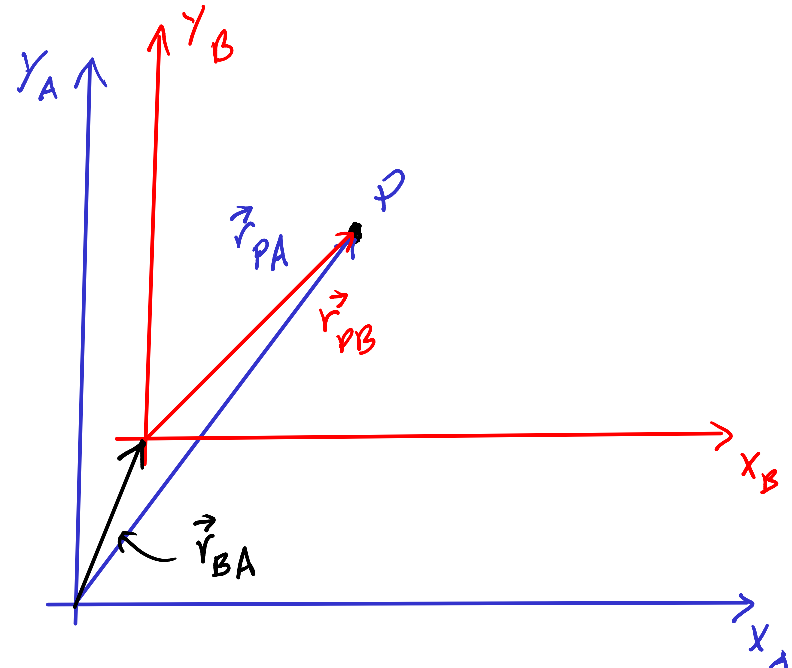
accelerazione in x e y funzione del tempo?



Moti relativi







$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

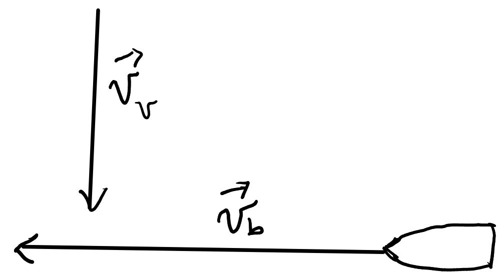
$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA}$$

"P secondo A = P secondo B + B secondo A"

"P secondo A = P second B − A secondo B"

Moti relativi

Un velista sta navigando a 10 nodi in direzione est in un punto dove il vento soffia a ~~5~~ 5,0 nodi in direzione ~~nord~~ sud. Qual è la velocità e la direzione dell'apparente vento rispetto alla barca?



$$\vec{v}_b = (-10\,kn)\,\hat{i}$$

$$\vec{v}_v = (-5\,kn)\,\hat{j}$$

$\vec{v}_v$: velocità del vento secondo un osservatore fermo

$\vec{v}_v = \vec{v}_{vA}$ "velocità del vento nel sistema di riferimento A"

$\vec{v}_b = \vec{v}_{BA}$ "velocità di B (barca) secondo A"

$$\vec{v}_{vB} = \vec{v}_{vA} + \vec{v}_{AB} = \vec{v}_{vA} - \vec{v}_{BA} = \vec{v}_v - \vec{v}_b = 10\hat{i} - 5\hat{j}\ kn$$

$$|\vec{v}_{vB}| = \sqrt{10^2 + 5^2}\ kn = 11\ kn$$

Riassunto

* posizione, velocità, accelerazione sono vettori (!)

* $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$

* Caso speciale #1: accelerazione costante

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

← "x" è la componente di $\vec{r}$ parallele a $\vec{a}$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

* Caso speciale #2: moto circolare uniforme

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$$

velocità angolare ($\omega = 2\pi/T$ ← periodo)

modulo: $a = \omega^2 R = \dfrac{v^2}{R}$

* Moti relativi "P secondo A = P secondo B + B secondo A"