SISTEMA DI N PUNTI MATERIALI VINCOLATI

Configurazioni date da

$$\bar{w} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_{3N}) = (\underbrace{x_1, y_1, z_1}_{\bar{r}_1}, \underbrace{x_2, y_2, z_2}_{\bar{r}_2}, \dots, \underbrace{x_N, y_N, z_N}_{\bar{r}_N})$$

$\hookrightarrow w_j \quad j=1,\dots,3N$

Vincoli dati da

$$f^{(s)}(\bar{w}, t) = 0 \qquad s=1,\dots,r \longrightarrow$$

I gradi di libertà sono $m = 3N - r$

La forma parametrica dei vincoli è descritta da

$$w_j = w_j(q_1, \dots, q_m; t) \qquad j=1,\dots,3N \qquad (\star)$$

I parametri $q_1, \dots, q_m$ sono chiamati coordinate libere.

Le funzioni soddisfano (per una buona parametrizzazione)

$$\mathrm{rk}\left(\frac{\partial w_j}{\partial q_k}\right) = m \quad \begin{matrix} j=1,\dots,3N \\ k=1,\dots,m \end{matrix} \longleftrightarrow \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \bar{w}}{\partial q_m} \text{ sono linearmente indipendenti}$$

$\downarrow$

$\dfrac{\partial \bar{w}(q_1, \dots, q_m, t)}{\partial q_\ell}$ $\quad \ell = 1,\dots,m$ formano una base per lo spazio tangente T_pQ con $p \in Q$ individuato dalle coordinate $(q_1, \dots, q_m)$ al tempo t.

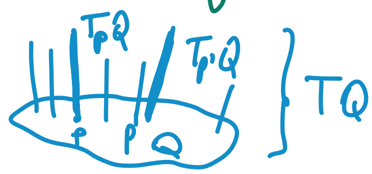
Un moto in Q è descritto dalle funzioni $q_h(t)$ $h=1,\dots,m$

$Q = \{$ spazio delle possibili configurazioni che il sistema può assumere $\}$

$T_pQ = \{$ spazio delle possibili velocità che una traiettoria può avere passando per p $\}$

T_pQ è uno SPAZIO VETTORIALE. Per qui $p \in Q$ abbiamo uno spazio vettoriale ad esso associato.

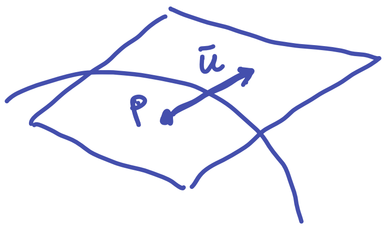
⤳ Possiamo costruire uno spazio TQ che ha la struttura di un FIBRATO VETTORIALE. TQ è detto FIBRATO TANGENTE. Quando Q è lo spazio delle configurazioni, TQ è lo spazio degli stati.



Vedi libro Arnold per def.

TQ è uno spazio 2n dimensionale → necessita di 2n coordinate per essere parametrizzato.

Vediamo quali: un pto in TQ è individuato quando



diciamo in quale $P \in Q$ siamo e quale vettore $\bar{u}$ scegliamo in T_pQ:

- P è individuato dalle coordinate $(q_1, \dots, q_n)$
- $\bar{u} \in T_pQ$, quindi possiamo esprimerlo nella base di T_pQ:

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_n)$$

dati questi n numeri, individuo univocamente il vettore $\bar{u} \in T_pQ$ ⇒ u_k sono coordinate.

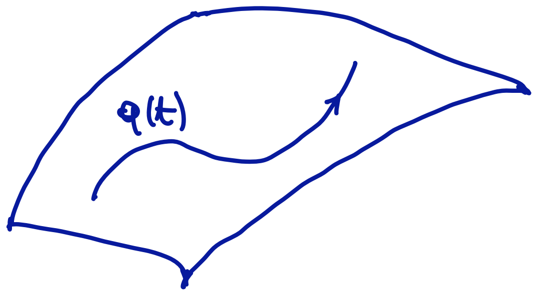
NOTAZIONE: decidiamo di usare il simbolo $\dot{q}_k$ invece di u_k per il secondo set di coordinate.
[Qui il • è un simbolo che distingue $\dot{q}$ da q]

Quindi le coord su TQ saranno ora

$$(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \qquad (*)$$

Qte n coord. determinano lo STATO del sistema; vediamo come fa un es.

Prendiamo ancora l'esempio di un pto materiale vincolato a giacere su una superficie, e prendiamo un moto.



Il moto su Q è descritto dalle funzioni $q_1(t), \dots, q_m(t)$, la cui immagine è una traiettoria su Q.

Siccome Q è immersa in $\mathbb{R}^3$, la traiettoria è anche una curva di $\mathbb{R}^3$; infatti è parametrizzata dalla funzioni $\bar{r}(t)$, che in qto caso sono date da

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(q_1(t), \dots, q_m(t))$$

funzione composta:

$$t \xrightarrow{\bar{r}(t)} \mathbb{R}^3$$

$$t \xrightarrow{q_1(t), \dots, q_m(t)} Q \xrightarrow{\bar{r}(q_1, \dots, q_m)} \mathbb{R}^3$$

- La velocità della particella è un vettore $\bar{v}$ di $\mathbb{R}^3$ (che per la particella vincolata su Q è tg a Q).
- Lo stato di una particella è determinato dalla sua posizione $\bar{r}$ e dalla sua velocità $\bar{v}$.
  - Un punto su TQ dovrebbe determinare univocamente posizione e velocità della particella $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ scelte le coordinate $(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n)$ su TQ, dovremmo essere in grado di esprimere $\bar r$ e $\bar v$ in funzione di esse.

- per la posizione, sappiamo già:

$$\bar r = \bar r(q_1, \dots, q_n)$$

- per la velocità?

Prendiamola larga: consideriamo un moto

$$\bar r(t) = \bar r(q_1(t), \dots, q_n(t))$$

La velocità al tempo t è data da

$$\bar v(t) = \frac{d}{dt} \bar r(t) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial \bar r}{\partial q_k}}_{\text{vett. base } T_PQ}(q_1(t), \dots, q_n(t))\, \dot q_k(t)$$

$\Rightarrow$ $\bar v(t)$ è un vettore in $T_P Q$ dove P è il punto toccato dal moto al tempo t.

I coefficienti di $v(t)$ rispetto alla base sono $\dot q_k(t)$

Vediamo quindi che

$$\bar v(\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{\substack{\text{coord.} \\ \text{lungo } Q}}, \underbrace{\dot q_1, \dots, \dot q_n}_{\substack{\text{coord.} \\ \text{lungo } T_PQ}}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar r}{\partial q_k}(q, \dot q)\, \dot q_k$$

$\rightarrow$ Lo stato della particella è dato da

$$(\bar r, \bar v) = \left(\bar r(q),\ \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar r}{\partial q_h}(q, \dot q)\, \dot q_k \right)$$

cioè è determin. da un pto $(q, \dot q) \in TQ$

Adesso capiamo perché era comodo chiamare $\dot q$ le coord. su T_PQ: il moto su T_PQ è dato da funz. $\mathbb{R}_t \longrightarrow T_PQ$ che chiamiamo $\dot q(t)$

Chiamarle $\dot q_k(t)$ ci ricorda che esse, QUANDO VALUTATE SU UN MOTO, sono le derivate di $q_k(t)$.

La generalizzazione a un sist. di N pti materiali vincolati è semplice.

Il cambiamento di stato all'avanzare del tempo è dato dalle funzioni

$$(q_1(t),\dots,q_m(t),\ \dot q_1(t),\dots,\dot q_m(t))$$

Le velocità delle singole particelle, lungo un moto, sono

$$\bar v_i(t)=\dot{\bar r}_i(t)=\frac{d}{dt}\,\bar r_i(q_1(t),\dots,q_m(t))=\sum_h \frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h}\,\dot q_h(t)$$

vincolo fisso

Cioè la funz. $\bar v_i(q_1,\dots,q_m,\dot q_1,\dots,\dot q_m)\equiv\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \bar r_i}{\partial q_k}(q_1,\dots,q_m)\,\dot q_k$ valutata sul moto.

Il vettore $\sum_h \frac{\partial \bar w}{\partial q_h}(q_1,\dots,q_m)\,\dot q_h=(\bar v_1,\dots,\bar v_N)$

→ Lo stato del sistema è dato da

$$(\bar r_1,\dots,\bar r_N,\bar v_1,\dots,\bar v_N)=\left(\bar w(q),\ \sum_{h=1}^{m}\frac{\partial \bar w}{\partial q_h}(q)\,\dot q_h\right)$$

cioè lo stato è determinato da un pto $(q,\dot q)\in TQ$

Se il vincolo è MOBILE, allora è dato in forma parametrica da

$$\bar w=\bar w(q_1,\dots,q_m,t)\quad\leftarrow \text{funz. di } m+1 \text{ variabili}$$

Le velocità sono ora lungo un moto

$$\bar v_i(t)=\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h}(q_1(t),\dots,q_m(t),t)\,\dot q_h(t)+\frac{\partial \bar r_i}{\partial t}(q_1(t),\dots,q_m(t),t)$$

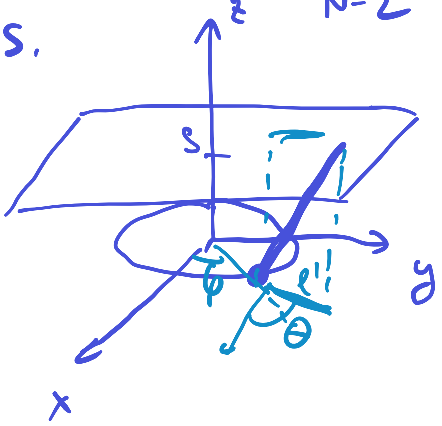
cioè è la funzione

$$\bar v_i(q,\dot q,t)\equiv\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial \bar r_i}{\partial q_h}(q_1,\dots,q_m,t)\,\dot q_h+\frac{\partial \bar r_i}{\partial t}(q_1,\dots,q_m,t)$$

valutata sul moto $q(t)$.

pezzo extra dovuto al moto del vincolo

ES. $N=2$



Relazioni vincolari: $\quad r=4$

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2-R^2=0 & f^{(1)} \\ z_1=0 & f^{(2)} \\ (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(\overbrace{z_1-z_2}^{s^2})^2=\ell^2 & \\ z_2=s & f^{(4)} \end{cases}$$

$$\longrightarrow (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-\ell'^2=0 \quad f$$

$$\ell'^2=\ell^2-s^2 \qquad \ell>s$$

$$m=3N-r=6-4=2$$

$$\nabla f^{(1)}=\begin{pmatrix}2x_1\\2y_1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \nabla f^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \nabla f^{(3)}=\begin{pmatrix}2(x_1-x_2)\\2(y_1-y_2)\\0\\2(x_2-x_1)\\2(y_2-y_1)\\0\end{pmatrix} \quad \nabla f^{(4)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

lin. indip.

Descriz. parametrica
$$\begin{cases} x_1=R\cos\varphi \\ y_1=R\,\text{sen}\,\varphi \\ z_1=0 \\ x_2=R\cos\varphi+\ell'\cos\theta \\ y_2=R\,\text{sen}\,\varphi+\ell'\,\text{sen}\,\theta \\ z_2=s \end{cases} \qquad \leftarrow \bar{w}=\bar{w}(\varphi,\theta)$$

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial\varphi}=\begin{pmatrix}-R\,\text{sen}\,\varphi\\R\cos\varphi\\0\\-R\,\text{sen}\,\varphi\\R\cos\varphi\\0\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\bar{w}}{\partial\theta}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-\ell'\,\text{sen}\,\theta\\\ell'\cos\theta\\0\end{pmatrix} \qquad \longleftarrow \text{indip.}$$

Vincoli ideali (dinamico)

Vincoli sono realizzati da FORZE (reazioni vincolari)

$$m\bar{a}_i = \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i \qquad i = 1, \dots, N$$

Il nostro scopo è ottenere n equazioni (indip. delle reaz. vincolari)

nelle n incognite $q_h(t)$ $h = 1, \dots, n$ (funzioni)

Def. Si dice che un sist. olonomo di N pti materiali è soggetto a VINCOLI IDEALI se l'insieme delle reaz. vincolari $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_N$ è caratterizzato dalla cond.:

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \delta\bar{r}_i = 0 \qquad \forall\, \delta\bar{r}_i$$

← reaz. vincolari devono compiere lavoro (virtuale) nullo

Siccome $\delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h$, la condiz. diventa

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} \delta q_h \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \right) = 0 \qquad \forall\, \delta q_h$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \qquad h = 1, \dots, n \qquad (*)$$

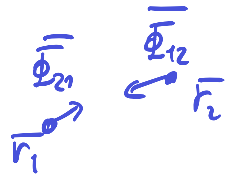
$\longrightarrow$ n eq. indipendenti

[$a\alpha + b\beta = 0$ $\forall$ scelta di a e b

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$.]

Esempio tipico di vincoli ideali: punti vincolati a una superficie liscia $\rightarrow$ qui la condizione $(*)$ è banalm. soddisfatta perché $\bar{\Phi}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = 0 \quad \forall i$

ES.) Vincolo di rigidità: realizzato da forze interne che soddisfano la 3ª legge di Newton



$N=2 \qquad \|\bar{r}_1 - \bar{r}_2\|^2 = \text{cost.} \quad (\bullet)$

reaz. vinc.: $\bar{\Phi}_{12}\,,\ \bar{\Phi}_{21}$ t.c. $\bar{\Phi}_{12} = -\bar{\Phi}_{21}$

Deriviamo $(\bullet)$ rispetto a $\frac{\partial}{\partial q_h}$

$$\frac{\partial}{\partial q_h}\Big((\bar{r}_1-\bar{r}_2)\cdot(\bar{r}_1-\bar{r}_2)\Big) = 0$$

$$2(\bar{r}_1-\bar{r}_2)\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h}-\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right)=0$$

Verifichiamo che il vincolo è ideale:

$$\bar{\Phi}_{21}\cdot\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h}+\bar{\Phi}_{12}\cdot\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h} = \bar{\Phi}_{21}\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h}-\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) \propto$$

$$\propto (\bar{r}_1-\bar{r}_2)\cdot\left(\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial q_h}-\frac{\partial \bar{r}_2}{\partial q_h}\right) = 0 \;//$$

ENERGIA CINETICA

Stato del sistema : $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ $\quad \dot{\bar{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$

Le VARIABILI DINAMICHE sono grandezze fisiche che sono funzioni dello STATO del sistema $\longrightarrow$ a livello matematico esse sono funzioni $I : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m; t) \longmapsto I(q, \dot{q}, t)$$

Un esempio di tali grandezze è l'ENERGIA CINECA del sistema:

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{m}{2} \|\bar{v}_i\|^2 \qquad (A)$$

La dipendenza delle velocità dallo stato del sistema è data da

$$\bar{v}_i(q, \dot{q}, t) = \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q}, t)) \cdot \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q}, t) \qquad i = 1, \dots, N \qquad (*)$$

Se inseriamo $(*)$ in (A) otteniamo $T(q, \dot{q}, t)$:

<u>Prop.</u> Dato un sist. olonomo di N pti materiali a n gradi di lib. e sia l'en. cinetica data da

$$T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \|\bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\|^2 \qquad T : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$$

Allora si ha che

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \quad , \text{dove}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{m} a_{hk}(\bar{q}, t)\, \dot{q}_h \dot{q}_k \qquad a_{hk}(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}$$

$$T_1 = \sum_{h=1}^{m} b_h(\bar{q}, t)\, \dot{q}_h \qquad b_h(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} c(\bar{q}, t) \qquad c(\bar{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}$$

dove $a = (a_{hk})$ è una matrice SIMMETRICA

e strettam. DEFINITA POSIVA

Dim. $T(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \, \| \bar{v}_i(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)\|^2$ $\qquad \bar{v}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}(\bar{q},t)\cdot \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}(\bar{q},t)$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_h\dot{q}_k + 2\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t}\right]$$

$$a_{hk}(\bar{q},t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\cdot\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \quad \leftarrow$$ manifestamente simmetrica, cioè $a_{kh} = a_{hk}$

Una matrice a è strettam. def. positiva se $\forall$ vettore $\bar{u} \neq 0$ vale

$$(a\bar{u})\cdot\bar{u} > 0 \xrightarrow[\text{in componenti}]{} \sum_{m}\left(\sum_{\ell} a_{m\ell}u_\ell\right)u_m = \sum_{m\ell} a_{m\ell}u_m u_\ell > 0$$

Verifichiamolo per la nostra a:

$$\sum_{m\ell=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_m}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_\ell}\right)u_m u_\ell \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \|\bar{\mu}_i\|^2 > 0 .$$

def. $\bar{\mu}_i := \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}u_h$ $\qquad \begin{pmatrix}\bar{\mu}_1\\ \vdots \\ \bar{\mu}_N\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$ se $\bar{u}\neq 0$. //

La matrice a è detta MATRICE CINETICA

- Siccome a è strettamente def. positiva $\rightsquigarrow$ $\det a > 0$

$\Rightarrow$ a è INVERTIBILE

- Se $\bar{r}_i$ è una funz. delle sole q_h (INDIP. da t) $\forall i$ allora $T_1 = 0$ e $T_0 = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ T è una FORMA QUADRATICA OMOGENEA (def. pos.) nelle $\dot{q}_h$.

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(\bar{q},t)\, \dot{q}_h \dot{q}_k$$

ES) Pto materiale in coord. cilindriche

$$F(\bar{q}): \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = \zeta \end{cases} \qquad q_1\ q_2\ q_3 \leftrightarrow r\ \varphi\ \zeta$$

$$\bar{v}(\bar{q},\dot{\bar{q}}): \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} = \dot{\zeta} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2} m \Big[\left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)^2 +$$
$$+ \left(\dot{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \dot{\zeta}^2 \Big] =$$

$\cos^2\varphi + \mathrm{sen}^2\varphi = 1$

$$= \frac{1}{2} m \Big[\dot{r}^2 \underline{\cos^2\varphi} + r^2\dot{\varphi}^2 \underline{\underline{\mathrm{sen}^2\varphi}} - \cancel{2 r\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi}$$
$$+ \dot{r}^2 \underline{\mathrm{sen}^2\varphi} + r^2\dot{\varphi}^2 \underline{\underline{\cos^2\varphi}} + \cancel{2 r\dot{r}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi} + \dot{\zeta}^2 \Big]$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{r} & \dot{\varphi} & \dot{\zeta} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} m & & \\ & m r^2 & \\ & & m \end{pmatrix}}_{a(\bar{q},t)} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}$$

ES) coordinate POLARI.

FORZE GENERALIZZATE

Prop. Sia $\bar{F}_i$ la forza (attiva) sull'i-esimo pto materiale.
Allora il "lavoro virtuale" dato da $\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i$, corrispondente agli spostam. virtuali $\delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} \delta q_h$, è espresso in termini di coord libere come

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \delta\bar{r}_i = \sum_{h=1}^{n} Q_h \, \delta q_h \quad \text{con} \quad Q_h = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}$$

$$h = 1, \dots, n$$

$Q_1, \dots, Q_n$ sono dette FORZE GENERALIZZATE

In particolare, per forze $\bar{F}_i$ puramente posizionali ~~conserv~~ in cui $\exists \hat{V} = \hat{V}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, t)$ t.c. $\bar{F}_i = -\bar{\nabla}_i \hat{V}$ si ha

$$Q_h(\bar{q}, t) = -\frac{\partial V(\bar{q}, t)}{\partial q_h} \qquad h = 1, \dots, n \qquad (\#)$$

dove $V(\bar{q}, t) \equiv \hat{V}(\bar{r}_1(\bar{q}, t), \dots, \bar{r}_N(\bar{q}, t), t)$

Dim (#) : $Q_h = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = -\sum_{i=1}^{N} \bar{\nabla}_i \hat{V} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} =$

$$\bar{\nabla}_i \hat{V} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \hat{V}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_h} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_h} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_h}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial q_h} V(\bar{q}, t) \quad //$$