INTEGRALI IMPROPRI

1. Integrali impropri su intervalli limitati

Data una funzione $f(x)$ continua in $[a, b)$, poniamo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\ dx}$$

quando il limite esiste. Se tale limite esiste finito, l'integrale improprio si dice *convergente* e la funzione $f(x)$ si dice *integrabile in senso improprio su* $[a, b)$. Se tale limite esiste ma non è finito, l'integrale improprio si dice *divergente*.
Analogamente, data una funzione $f(x)$ continua in $(a, b]$, poniamo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\ dx}$$

quando il limite esiste. Se tale limite esiste finito, l'integrale improprio si dice *convergente* e la funzione $f(x)$ si dice *integrabile in senso improprio su* $(a, b]$. Se tale limite esiste ma non è finito, l'integrale improprio si dice *divergente*.
Infine, una funzione $f(x)$ continua in (a, b) si dice *integrabile in senso improprio su* (a, b) se risulta integrabile in senso improprio $(a, c]$ e su $[c, b)$ per qualche $c \in (a, b)$. In tal caso poniamo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx}$$

In particolare l'integrale improprio sarà *convergente* se convergono entrambi gli integrali in cui è stato decomposto.

Vediamo un esempio. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{\frac{2}{3}}} dx$.
Osserviamo che la funzione integranda $f(x) = \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{\frac{2}{3}}}$ è continua in $(0, \frac{\pi}{2}]$ e che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Per calcolare l'integrale applichiamo la definizione:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{\frac{2}{3}}} dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^{\frac{2}{3}}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[3(1-\cos x)^{\frac{1}{3}}\right]_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 3 - 3(1-\cos\varepsilon)^{\frac{1}{3}} = 3\end{aligned}$$

Quindi $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Vediamo ora dei criteri che ci permetteranno di stabilire la convergenza di un integrale improprio anche nei casi in cui non è possibile determinare una primitiva esplicita delle funzione integranda. Nei seguenti risultati si considerano funzioni continue nell' intervallo $[a, b)$ ma analoghi risultati valgono per funzioni continue nell' intervallo $(a, b]$.

Teorema (Criterio del Confronto)
Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue nell'intervallo $[a, b)$ tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in [a, b).$$

Se $\int_a^b g(x)\, dx$ è convergente allora $\int_a^b f(x)\, dx$ è convergente.
Se $\int_a^b f(x)\, dx$ è divergente allora $\int_a^b g(x)\, dx$ è divergente.

Dim. Le funzioni integrali $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ e $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ risultano definite e continue in $[a, b)$. Inoltre, essendo $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b)$, $F(x)$ e $G(x)$ risultano monotone crescenti in $[a, b)$ con $0 \leq F(x) \leq G(x)$ per ogni $x \in [a, b)$. Dal teorema sul limite delle funzioni monotone, risulta allora che esistono i limiti $\lim_{x \to a^+} F(x) = \sup_{x \in (a,b]} F(x)$ e $\lim_{x \to a^+} G(x) = \sup_{x \in (a,b]} G(x)$ ed inoltre

$$0 \leq \lim_{x \to a^+} F(x) \leq \lim_{x \to a^+} G(x)$$

La tesi segue osservando che se $\int_a^b g(x)\, dx$ converge, allora $\lim_{x \to a^+} G(x) \in \mathbb{R}$. Dunque $\lim_{x \to a^+} F(x) \in \mathbb{R}$ e quindi $\int_a^b f(x)\, dx$ converge.
D'altra parte, se $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge, allora $\lim_{x \to a^+} F(x) = +\infty$ e quindi $\lim_{x \to a^+} G(x) = +\infty$, da cui segue che $\int_a^b g(x)\, dx$ diverge. $\square$

Si osservi che se $f(x)$ è funzione continua e di segno costante in $[a, b)$, allora la funzione integrale $F(x) = \int_a^b f(t)\, dt$ è funzione monotona e quindi esiste $\lim_{x \to b^-} F(x)$, ovvero l'integrale improprio $\int_a^b f(x)\, dx$ risulta convergente o divergente.
Se invece $f(x)$ è funzione continua in $[a, b)$ ma non ha segno costante, potremo usare il seguente risultato.

Corollario
Sia $f(x)$ funzione continua in $[a, b)$. Se $\int_a^b |f(x)|\, dx$ è convergente allora $\int_a^b f(x)\, dx$ è convergente.

Dim. Per ogni $x \in [a, b)$, consideriamo le funzioni $f_+(x) = \max\{f(x); 0\}$ e $f_-(x) = \max\{-f(x); 0\}$. Osserviamo che tali funzioni risultano non negative e che $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ per ogni $x \in [a, b)$, quindi

$$0 \leq f_-(x) \leq |f(x)| \quad \text{e} \quad 0 \leq f_+(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b)$$

Essendo $\int_a^b |f(x)|\, dx$ convergente, dal criterio del confronto si ottiene che $\int_a^b f_+(x)\, dx$ e $\int_a^b f_-(x)\, dx$ sono convergenti. Allora, essendo $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ per ogni $x \in [a, b)$, dalla definizione si ottiene che anche $\int_a^b f(x)\, dx$ converge. $\square$

Se l'integrale $\int_a^b |f(x)|\ dx$ converge, l'integrale $\int_a^b f(x)\ dx$ si dice *assolutamente convergente*. Il precedente corollario afferma che la convergenza assoluta implica la convergenza, ma non vale in generale il viceversa.

Si osservi che dal precedente corollario segue che se $f(x)$ è funzione continua e limitata in $[a, b)$, in particolare se $\lim_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$, allora $\int_a^b f(x)\ dx$ è convergente.

In genere l'integrale di confronto usato per stabilire se un dato integrale improprio converge o meno è l'integrale delle potenze $\frac{1}{x^p}$ con $p > 0$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x^p}$ nell'intervallo $(0, 1]$. Allora

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1-\varepsilon^{1-p}}{1-p} & \text{se } p \neq 1 \\ \\ -\log \varepsilon & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{se } p < 1 \\ \\ +\infty & \text{se } p \geq 1. \end{cases}$$

Dunque l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ è convergente se $p < 1$ ed è divergente se $p \geq 1$. In particolare, la funzione $f(x) = \frac{1}{x^p}$ è integrabile in senso improprio su $(0, 1]$ se e solo se $p < 1$.

Mediante una semplice sostituzione, dal precedente esempio si deduce che gli integrali $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ e $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ convergono se e solo se $p < 1$.

Qualche esempio

- $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\log x)^{\frac{2}{3}}}{x(x-1)} dx$. La funzione $f(x) = \frac{(\log x)^{\frac{2}{3}}}{x(x-1)}$ è funzione continua e positiva in $(1, 2]$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. Osservato che $\log x \leq (x-1)$ per ogni $x > 0$, per $x > 1$ otteniamo

$$f(x) = \frac{(\log x)^{\frac{2}{3}}}{x(x-1)} \leq \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)^{\frac{1}{3}}} < \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} \quad \forall x \in (1, 2].$$

  Essendo $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx$ convergente, dal criterio del confronto si deduce che anche l'integrale dato è convergente.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan x}{x^3} dx$. La funzione $f(x) = \frac{\tan x}{x^3}$ è continua in $(0,1]$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Ricordando che $\tan x > x$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, otteniamo

$$f(x) = \frac{\tan x}{x^3} > \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in (0,1]$$

ed essendo $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ divergente, dal criterio del confronto si deduce che anche l'integrale dato diverge.

Dal criterio del confronto e dalla definizione di limite si ottiene

Corollario (Criterio del confronto asintotico)
Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue e di segno costante in $[a,b)$.
Se $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e se $\int_a^b g(x)\ dx$ è convergente allora $\int_a^b f(x)\ dx$ è convergente.
Se $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ e se $\int_a^b g(x)\ dx$ è divergente allora $\int_a^b f(x)\ dx$ è divergente.
Se $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (in particolare, se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a_+$) allora $\int_a^b f(x)\ dx$ e $\int_a^b g(x)\ dx$ hanno il medesimo carattere.

Dal precedente criterio abbiamo che se $f(x)$ è funzione continua in $[a,b)$ e se

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{\frac{1}{(b-x)^p}} = \begin{cases} 0 & \text{con } p<1, \text{ allora } \int_a^b f(x)\ dx \text{ converge} \\ \infty & \text{con } p \geq 1, \text{ allora } \int_a^b f(x)\ dx \text{ diverge} \\ \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, & \text{allora } \int_a^b f(x)\ dx \text{ converge se e solo se } p<1 \end{cases}$$

Utilizzando il concetto di ordine di infinito per $x \to b^-$, possiamo affermare che

se $Ord(f(x)) \leq p < 1$ allora $\int_a^b f(x)\ dx$ converge;

se $Ord(f(x)) \geq p \geq 1$ allora $\int_a^b f(x)\ dx$ diverge.

Analoghi criteri valgono nel caso di integrali di funzioni continue in intervalli del tipo $(a,b]$.

Qualche Esempio

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$. La funzione $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ è continua in $(0,1]$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Ricordando che $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0$ per ogni $\alpha > 0$, otteniamo che se $p > \frac{1}{2}$ allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0^+} x^{p-\frac{1}{2}} \log x = 0.$$

Quindi, se $\frac{1}{2} < p < 1$, il criterio del confronto asintotico ci permette di concludere che l'integrale dato è convergente.

Si osservi che dal precedente confronto abbiamo che $Ord(f(x)) < \frac{1}{2}$.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$. La funzione $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ è continua in $(0, 1]$ con $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Dal limite notevole $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^\alpha} = +\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ottiene che per ogni $p > 0$ risulta

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^{p-2}}} = +\infty.$$

Scegliendo $p \geq 1$, il criterio del confronto asintotico ci permette di concludere che l'integrale dato diverge.

Si osservi che dal precedente confronto otteniamo che $Ord(f(x)) > p$ per ogni $p > 0$ ed in particolare che $Ord(f(x)) > 1$.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan \sqrt[3]{x}}{\sin x + \sqrt{x}} dx$. La funzione $f(x) = \frac{\arctan \sqrt[3]{x}}{\sin x + \sqrt{x}}$ è continua in $(0, 1]$. Per $x \to 0^+$ abbiamo $\arctan x = x + o(x)$ e $\sin x = x + o(x)$, quindi $\sin x + \sqrt{x} = x + \sqrt{x} + o(x) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ e $\arctan(\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x})$. Allora per $x \to 0^+$ otteniamo

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + o(\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

Ne segue che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e che $Ord(f(x)) = \frac{1}{6}$. Dal criterio del confronto asintotico ne deduciamo che l'integrale dato converge.

- Determinare per quali valori di $\alpha > 0$ converge l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - \log(x+1)}{\sin(x^\alpha)} dx$. La funzione $f(x) = \frac{x - \log(x+1)}{\sin(x^\alpha)}$ è continua in $(0, 1]$. Ricordando che $\log(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + o(x)$ e $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$, otteniamo che $x - \log(x+1) \sim \frac{x^2}{2}$ e che $\sin(x^\alpha) \sim x^\alpha$ per $x \to 0$. Allora

$$f(x) \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\alpha-2}} \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Ne segue che $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ se $\alpha > 2$ e che in tal caso $Ord(f(x)) = \alpha - 2$. Dal criterio del confronto asintotico deduciamo inoltre che l'integrale risulta convergente se e solo se $\alpha - 2 < 1$ ovvero se $\alpha < 3$.

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali impropri:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ [$\log 4$]

2. $\displaystyle\int_0^1 \log x \; dx$ [-1]

3. $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x-\sqrt{x}}}$ [$\sqrt{\frac{13}{2}} - \frac{\pi}{3}$]

4. $\displaystyle\int_0^1 x\log(1+\tfrac{1}{x}) \; dx$ [Integrare per parti. $\frac{1}{2}$]

Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{4}{3}}} dx$ [Converge]

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x-1}}{(x+1)x^{\frac{2}{3}}} dx$ [Converge]

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x^{\sqrt{2}}} dx$ [Diverge]

4. $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x(x+2)}}$ [Converge]

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} \; dx$ [Diverge]

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\sqrt{x}}{x} \; dx$ [Converge]

7. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^0 \frac{2}{\tan^3 x} \; dx$ [Diverge]

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(\cos x)}{x} \; dx$ [Converge]

9. $\displaystyle\int_1^{\pi/2} \frac{2\sin x}{x-1}$ [Diverge]

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\log(1+\sqrt{x})}$ [Converge]

Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risultano convergenti i seguenti integrali.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x^\alpha)}{\sin x+\sqrt{x}} dx$ [Converge per ogni α]

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{x^\alpha} dx$ [Converge se e solo se $\alpha < 1$]

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^\alpha} dx$ [Converge se e solo se $\alpha < 1$]

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha \log x}$ [Converge se e solo se $\alpha < 1$]

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{(x(1-x))^{2\alpha+1}} dx$ [Converge se e solo se $\alpha < 0$]

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{|\tan \pi x|}}{(1-x)^\alpha} \; dx$ [Converge se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$]

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}}}{(x+\sqrt[3]{x})^\alpha} dx$ [Converge se e solo se $\alpha < 6$]

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{3\sqrt[3]{1+x^2} - 3\sqrt[3]{1+x}+x} dx$ [Converge se e solo se $\alpha > 0$]

2. Integrali impropri su intervalli illimitati

Data una funzione continua $f\colon [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, poniamo

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\ dx}$$

quando il limite esiste. Se tale limite esiste finito, l'integrale improprio si dice *convergente* e la funzione $f(x)$ si dice *integrabile in senso improprio su* $[a, +\infty)$. Se tale limite esiste ma non è finito, l'integrale improprio si dice *divergente*. Analogamente, data una funzione continua $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, poniamo

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\ dx}$$

quando il limite esiste. Se tale limite esiste finito, l'integrale improprio si dice *convergente* e la funzione f si dice *integrabile in senso improprio su* $(-\infty, b]$. Se tale limite esiste ma non è finito, l'integrale improprio si dice *divergente*.

Infine, una funzione continua $f\colon (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ si dice *integrabile in senso improprio su* $(a, +\infty)$ se lo è su $(a, b]$ e su $[b, +\infty)$ per qualche $b > a$. In tal caso poniamo

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^{+\infty} f(x)\ dx}$$

Analoghe definizioni nei casi in cui l'intervallo di integrazione è della forma $(-\infty, b)$. Infine, una funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$ si dice *integrabile in senso improprio su* $\mathbb{R}$ se risulta integrabile in senso improprio su $(-\infty, c]$ e su $[c, +\infty)$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. In tal caso poniamo

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_c^{+\infty} f(x)\ dx}$$

In particolare l'integrale improprio sarà *convergente* se convergono entrambi gli integrali in cui è stato decomposto.

Vediamo un esempio. Calcolare $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ dx$.

La funzione $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ è continua in $[1, +\infty)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Dalla definizione abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ dx = -\lim_{b\to+\infty} \left[e^{\frac{1}{x}}\right]_1^b = -\lim_{b\to+\infty} e^{\frac{1}{b}} - e = e - 1$$

Quindi $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$.

Come nel caso di integrali impropri su intervalli limitati si possono provare i seguenti risultati.

Teorema (Criterio del Confronto)
Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue nell'intervallo $[a, +\infty)$ tali che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in [a, +\infty).$$

Se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ è convergente allora lo è anche $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.
Se $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ è divergente allora lo è anche $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$.

Corollario (Condizione necessaria alla convergenza)
Sia $f(x)$ funzione continua in $[a, +\infty)$. Se l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge ed esiste il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, allora tale limite è nullo.

Corollario
Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ è convergente allora lo è anche $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Se l'integrale $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ converge, l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ si dice *assolutamente convergente*. Il precedente corollario afferma che la convergenza assoluta implica la convergenza.

Come nel caso di integrali impropri su intervalli limitati, l'integrale di confronto è in genere l'integrale delle potenze $\frac{1}{x^p}$ con $p > 0$.
Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x^p}$ nell'intervallo $[1, +\infty)$. Allora

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{b^{1-p} - 1}{1-p} & \text{se } p \neq 1 \\ \\ -\log b & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{se } p > 1 \\ \\ +\infty & \text{se } p \leq 1. \end{cases}$$

Dunque l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ è convergente se $p > 1$ ed è divergente se $p \leq 1$.
In particolare, la funzione $f(x) = \frac{1}{x^p}$ è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$ se e solo se $p > 1$. Mediante semplice sostituzione si ottiene che per ogni $a > 0$, l'integrale $\displaystyle\int_{a+1}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^p}$ converge se e solo se $p > 1$.
Si osservi che per quanto provato, per ogni $p > 0$ la funzione $f(x) = \frac{1}{x^p}$ non è integrabile in senso improprio in $(0, +\infty)$.

Qualche esempio

- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4} dx$. Si osservi innanzitutto che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^4} = 0$ essendo $\cos x$ funzione limitata, quindi la condizione necessaria alla convergenza è soddisfatta. Abbiamo poi che
$$|\frac{\cos x}{x^4}| \leq \frac{1}{x^4} \quad \forall x \geq \frac{\pi}{2}.$$
Essendo $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ convergente, dal criterio del confronto segue che $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |\frac{\cos x}{x^4}| dx$ risulta convergente e dunque, dal Teorema sulla convergenza assoluta, che anche l'integrale proposto converge.

- $\int_2^{+\infty} \frac{(\log x)^{\frac{2}{3}}}{x(x-1)} dx$. Osserviamo che, essendo $\log x$ funzione concava in $(0,+\infty)$, risulta $\log x \leq x-1$ per ogni $x > 0$ essendo $y = x-1$ l'equazione della retta tangente al grafico di $\log x$ in $x_0 = 0$. Ne segue che
$$\frac{(\log x)^{\frac{2}{3}}}{x(x-1)} \leq \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x(x-1)} = \frac{1}{x(x-1)^{\frac{1}{3}}} < \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} \quad \forall x \geq 2$$
essendo $x > x-1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poichè $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} dx$ converge, dal criterio del confronto deduciamo che anche l'integrale proposto converge.

- $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}$. La funzione $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ è funzione continua su $([1,+\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Abbiamo inoltre che per ogni $x > e$ risulta
$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$$
ed essendo $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ divergente, dal criterio del confronto si ottiene che $\int_e^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx$ diverge e quindi anche l'integrale proposto essendo
$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx + \int_e^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx$$

Come ultimo esempio, consideriamo l'integrale $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$. Per ogni $b > 2\pi$, integrando per parti otteniamo
$$\int_{2\pi}^{b} \frac{\sin x}{x}\, dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_{2\pi}^{b} - \int_{2\pi}^{b} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

Allora

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{2\pi}^{b}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{2\pi}+\frac{\cos b}{b}-\int_{2\pi}^{b}\frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{2\pi}-\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

e l'integrale dato risulta convergente essendo tale $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$. Infatti risulta

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad \forall x \ge 2\pi$$

con $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ convergente. Quindi dal criterio del confronto $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge assolutamente.
D'altra parte, proviamo che $\displaystyle\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverge. Infatti, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{2(k+1)\pi}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}|\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

Ricordando che $\frac{1}{n} < \log(1+\frac{1}{n})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, otteniamo

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{2}{\pi}\log(1+\frac{1}{k+1}) = \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{k+2}{k+1}\right)$$

Allora

$$\int_{2\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \frac{2}{\pi}(\log(n+1)-\log 2)$$

Consideriamo ora la funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_{2\pi}^{x}\frac{|\sin t|}{t}\,dt$. Tale funzione è monotona crescente e quindi

$$\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx = \lim_{x\to+\infty}F(x) = \sup_{x\in[2\pi,+\infty)}F(x) \ge \sup_{n\in\mathbb{N}}F(2n\pi)$$

Per quanto provato sopra $F(2n\pi) = \int_{2\pi}^{2n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \ge \frac{2}{\pi}(\log(n+1)-\log 2)$ e quindi $F(2n\pi)\to+\infty$ per $n\to+\infty$. Ne segue che $\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverge.
Il precedente esempio prova che un integrale improprio può convergere ma non convergere assolutamente.

Dal criterio del confronto abbiamo

Corollario (Criterio del confronto asintotico)
Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue e di segno costante in $[a, +\infty)$.
Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ e se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ è convergente allora lo è anche $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.
Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ e se $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ è divergente allora lo è anche $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.
Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (in particolare, se $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$) allora $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ hanno il medesimo carattere.

Dal precedente criterio si ottiene in particolare che se $f(x)$ è funzione continua in $[a, +\infty)$ e se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = \begin{cases} 0 & \text{con } p > 1, \text{ allora } \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge} \\ \infty & \text{con } p \leq 1, \text{ allora } \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ diverge} \\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{allora } \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge se e solo se } p > 1 \end{cases}$$

Utilizzando il concetto di ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$, possiamo affermare che

se $ord(f(x)) \geq p > 1$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge;

se $ord(f(x)) \leq p \leq 1$ allora $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge.

Analoghi criteri valgono nel caso di un intervallo del tipo $(-\infty, b]$.

Qualche Esempio

- $\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$. La funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$ è funzione continua in $[1, +\infty)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Dal medesimo limite notevole deduciamo che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p+2}}{e^x} = 0$$
per ogni $p \in \mathbb{R}$ e quindi in particolare per $p > 1$. Dal criterio del confronto asintotico deduciamo allora che l'integrale dato converge.

  Si osservi che dal precedente confronto abbiamo $ord(f(x)) > p$ per ogni $p > 0$ e quindi che $ord(f(x)) > 1$.

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \log x}$ con $\alpha > 0$. La funzione $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha \log x}$ è continua in $[2, +\infty)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p-\alpha}}{\log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p > \alpha \\ 0 & \text{se } p \leq \alpha \end{cases}$$

Se $\alpha < 1$, scegliendo $\alpha < p \leq 1$ nel primo limite, otteniamo dal criterio del confronto asintotico che l'integrale diverge. Se $\alpha > 1$, scegliendo $1 < p \leq \alpha$ nel secondo limite otteniamo dal criterio del confronto asintotico che l'integrale converge. Se $\alpha = 1$ i confronti sopra non ci permettono di concludere ma in tal caso l'integrale si può calcolare mediante la definizione

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log x} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \log x} = \lim_{b\to+\infty} [\log\log x]_2^b = \lim_{b\to+\infty} \log\log b - \log\log 2 = +\infty$$

Segue allora che l'integrale dato converge se e solo se $\alpha > 1$.

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^2} dx$. La funzione $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ è continua in $[2, +\infty)$. Inoltre essendo

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{x^2 \log(1-\frac{1}{x})}$$

dallo sviluppo $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ per $y \to 0$ ponendo $y = -\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$ otteniamo

$$x^2 \log(1 - \frac{1}{x}) = x^2(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = -x - \frac{1}{2} + o(1)$$

da cui

$$f(x) = e^{-x-\frac{1}{2}+o(1)} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{e}} e^{o(1)} \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{e}} \quad \text{per} \quad x \to +\infty$$

L'integrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-x} dx$ risulta convergente (lo si può calcolare utilizzando la definizione), quindi dal criterio del confronto asintotico anche l'integrale dato risulta convergente.

Osserviamo che dal confronto precedente otteniamo che $ord(f(x)) = ord(e^{-x}) < p$ per ogni $p > 0$.

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali impropri:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ $[\frac{\pi}{2}]$
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^3 x}$ $[\frac{1}{2\log^2 2}]$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log(1+\frac{1}{x})\ dx$ [Integrare per parti. 2π]
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \arctan\frac{1}{x}\ dx$ $[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2]$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx$ [1]

Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ [Diverge]
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+2)}\ dx$ [Converge]
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{x}{(x-3)(x^2+4)}\ dx$ [Converge]
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{3} \frac{x}{(x-3)(x^2+4)}\ dx$ [Diverge]
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\ dx$ [Converge]
6. $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}\ dx$ [Converge]
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{2x}}{x-2}\ dx$ [Converge]
8. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{e^x \sin\frac{1}{x}}$ [Converge]
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\log(1+\sqrt{x})}$ [Diverge]
10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\ dx$ [Diverge]
11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\ dx$ [Integrare per parti. Converge]
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x-1-\sin x}{e^{\pi x}-1-\sin(\pi x)}\ dx$ [Converge]
13. $\displaystyle\int_2^{+\infty} x\tan\frac{x^2+1}{x^4+\cos^2 x}\ dx$ [Diverge]

Stabilire se i seguenti integrali impropri sono convergenti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^\alpha x}$ [Converge se e solo se $\alpha > 1$]
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(x^2-1)^3}\ dx,\ n \in \mathbb{N}$ [Converge se e solo se $n \leq 2$]
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^2}\ dx$ [Converge se e solo se $\alpha > 1$]