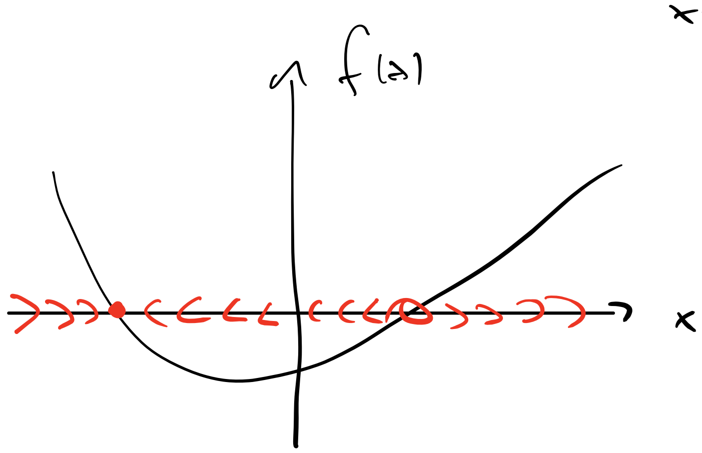
SISTEMI DINAMICI

Stiamo studiando

$$\dot{x} = f(x) \qquad f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$x = x(t)$



$f(x^*) = 0 \qquad x^*$ punto di equilibrio

Linearizzando : $\quad x(t) = x^* + \eta(t)$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x) \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \eta(t) = f'(x^*)\, \eta(t)$$

Proviamo a vedere

$$\frac{d}{dt} x(t) = f_2(x) = f(x; 2)$$

BIFORCAZIONI

Se siamo nella situazione $f_{r^*}(x^*) = 0$

$f'_{r^*}(x^*) \neq 0$ (pto iperbolico)

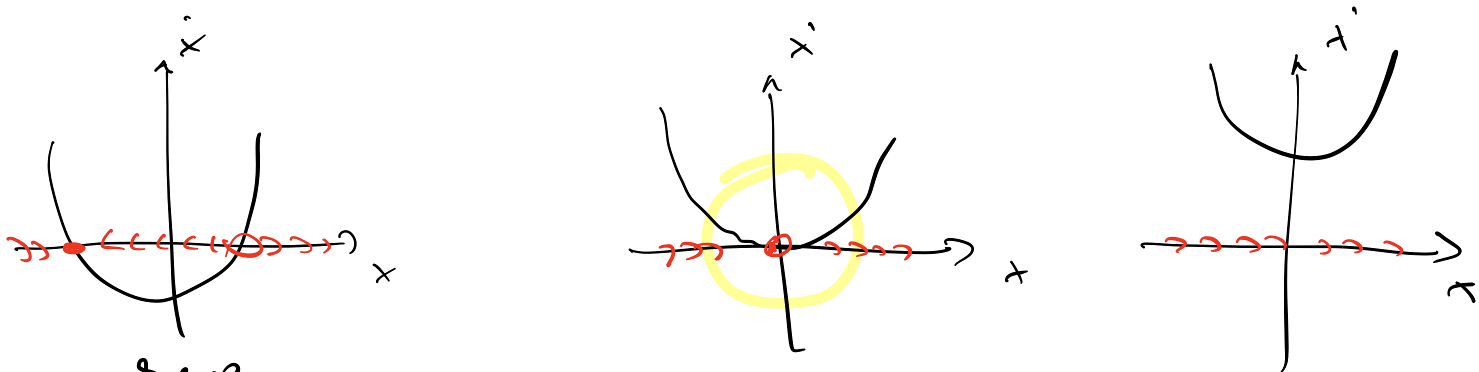
$f_r(x(r)) = 0 \rightarrow$ funzione implicita

Cosa succede se x^* non è iperbolico?

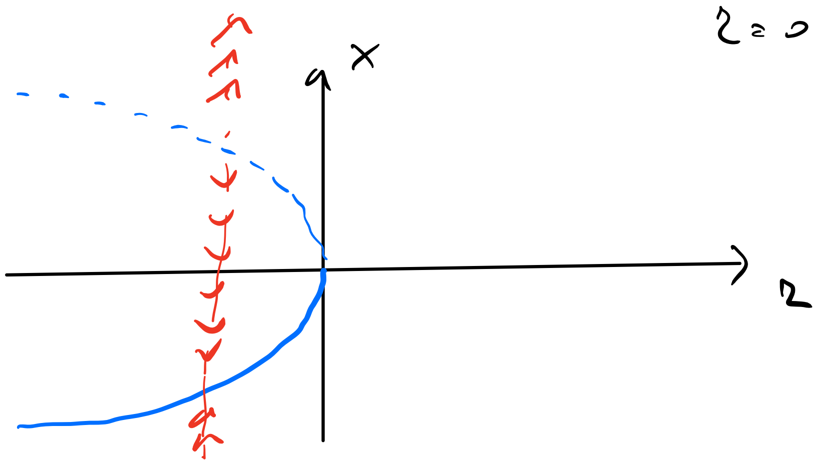
$\rightarrow$ CAMBIO QUALITATIVO DELLA DINAMICA

Biforcazione Tangente

$\dot{x} = r + x^2$ FORMA NORMALE



$r < 0$ $r = 0$ $r > 0$



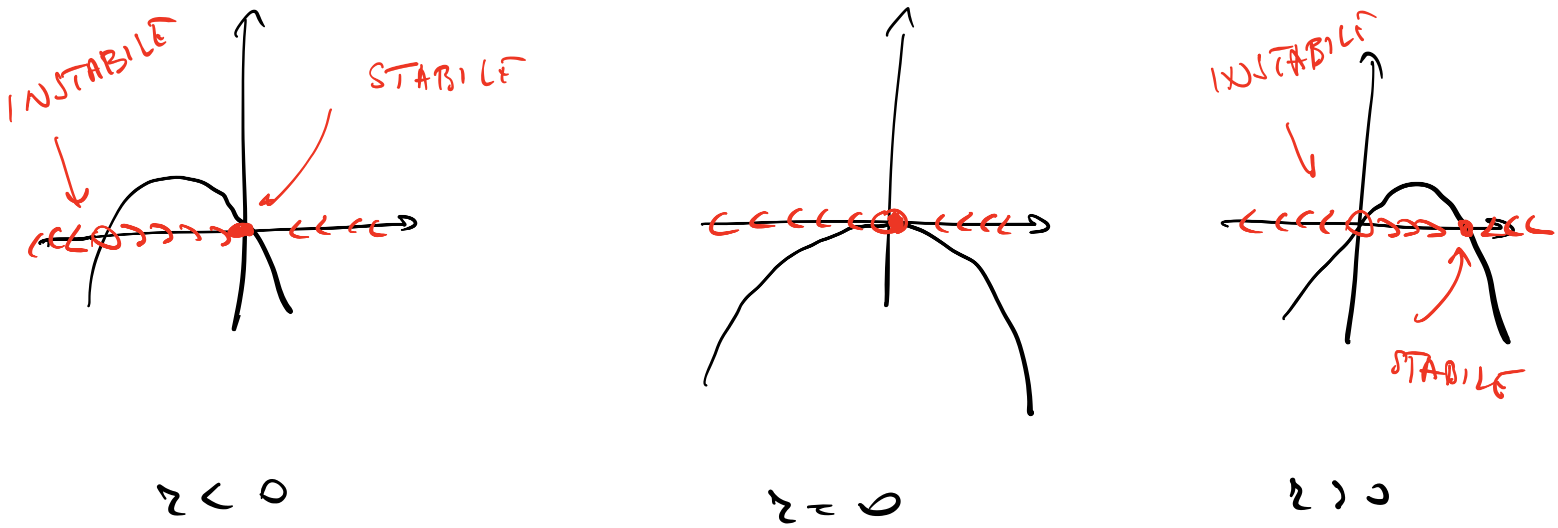
Biforcazione Transcritica

$$\dot{x} = rx - x^2$$

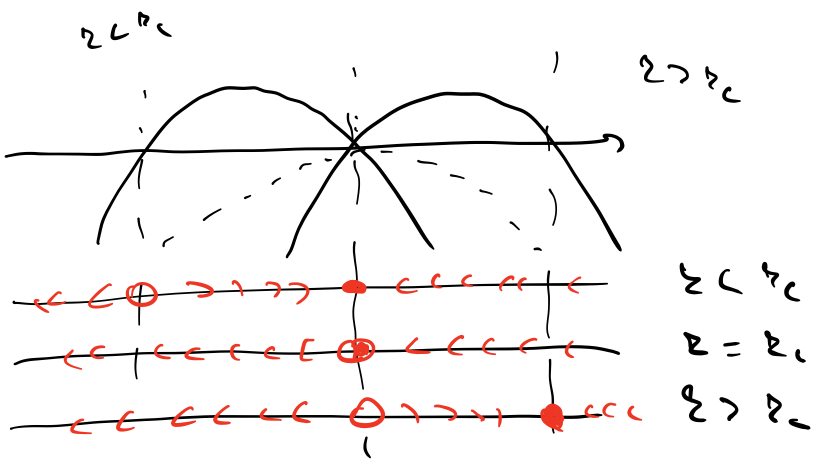
In primo luogo: punti critici

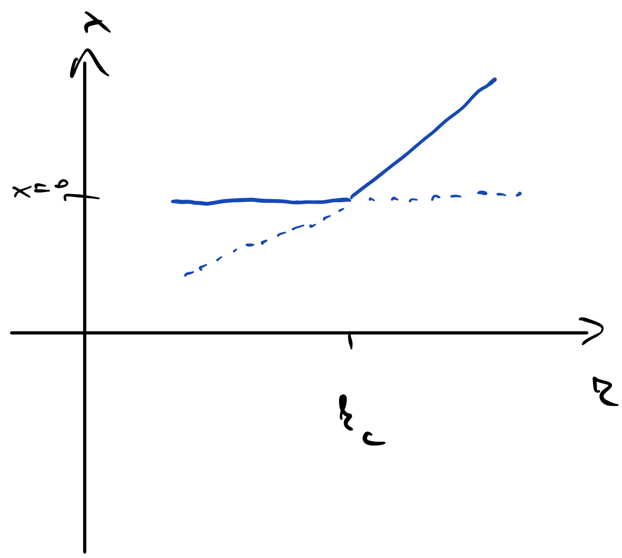
$x^* = 0$ è un punto critico

$x^* = r$



Passando $r = 0$ la stabilità dei due punti critici si scambia.





<u>Esempio</u> $\dot{x} = x(1-x^2) - a(1-e^{-bx})$

pto critico $x=0$

Localmente, vicino a $x=0$

$$\dot{x} \simeq x - a\left(bx - \frac{1}{2}b^2x^2\right) + O(x^3)$$

$$= (1-ab)x + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x^2 + O(x^3)$$

$$\dot{x} = rx - x^2$$

L'altro punto critico è per

$$(1-ab) + \left(\frac{1}{2}ab^2\right)x \simeq 0$$

$$x^* = \frac{2(ab-1)}{ab^2}$$

Prima: $x^*=0$, $x^*=r$

adesso $x^*=0$ $\quad x^* = \dfrac{2(ab-1)}{ab^2}$

la biforcazione avviene per $r_c = 0 \rightarrow$

$$\boxed{ab = 1}$$

CURVA DI BIFORCAZIONE

<u>Biforcazione PITCHFORK</u> (a forchetta)

Può essere super-critica o sub-critica

Super-critico $\longrightarrow$ $\dot{x} = rx - x^3$

Notiamo : il sistema è invariante $x \longrightarrow -x$

Punti critici

$$rx - x^3 = x(r - x^2) \longrightarrow \begin{matrix} x^* = 0 \\ x^* = \sqrt{r} \\ x^* = -\sqrt{r} \end{matrix} \qquad (x^*)^2 = r$$

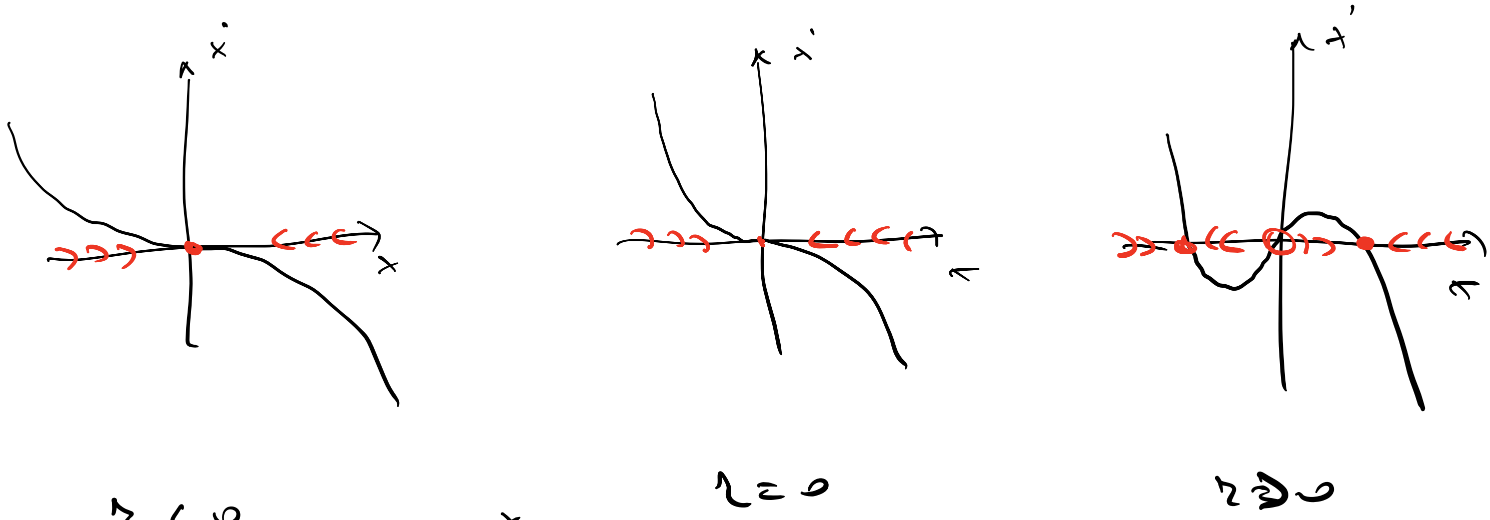
Se $r < 0$ $\rightarrow$ 1 Pto critico $x^* = 0$

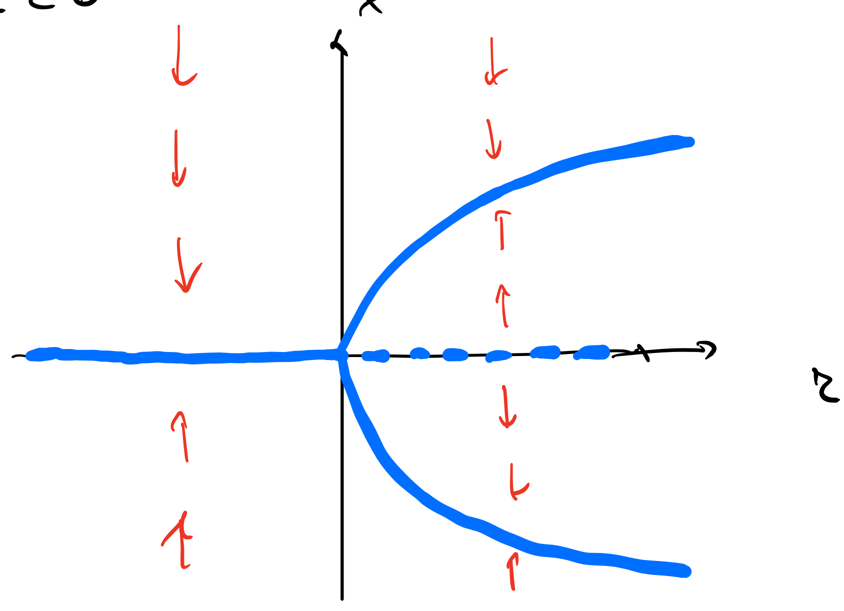
$\rightarrow$ STABILE

Lo stesso per $r = 0$

Per $r > 0$

Sono apparsi $x^* = \pm\sqrt{r}$ entrambi stabili

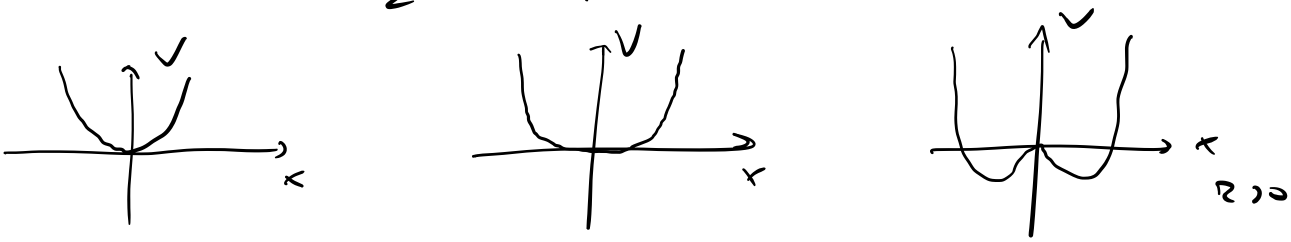




COMMENTO

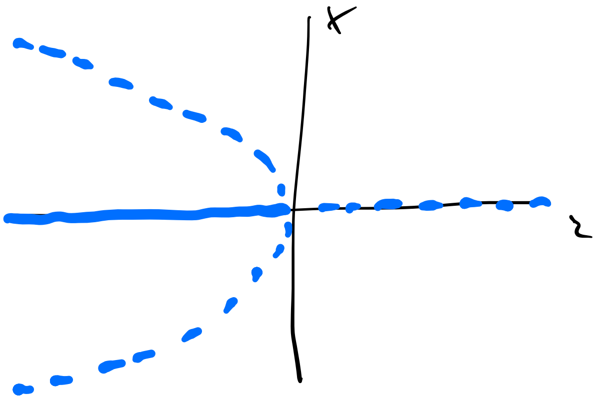
$$\dot{x} = rx - x^3 = f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$V = -\frac{1}{2} r x^2 + \frac{1}{4} x^4$$



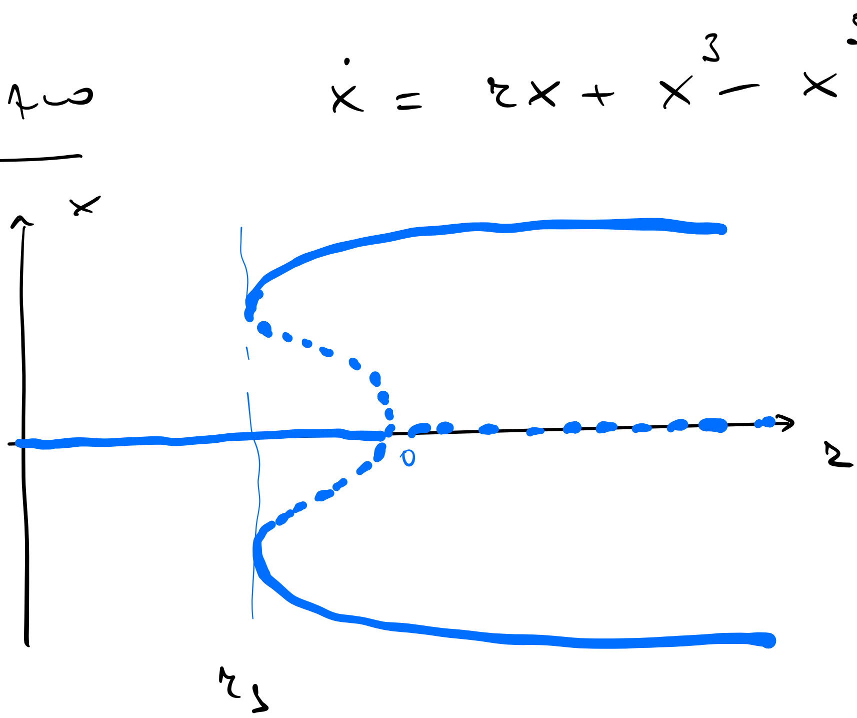
Esercizio

$$\dot{x} = rx + x^3$$



Esercizio

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5$$



↑ valore del parametro per cui nascono punti fissi ≠ 0

BIFORCAZIONE IMPERFETTA

$$\frac{d}{dt} u = h + \varepsilon u - u^3$$

H

Transizioni di fase : parametro d'ordine

energia libera $\rightarrow$ può essere espansa

in questo parametro

$F = E - TS \rightsquigarrow$ vogliamo minimizzare

$$f(m) = f_0 + \frac{1}{2} a m^2 + \frac{1}{4} b m^4 \qquad b > 0$$

funzioni della temperatura

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0 \longrightarrow m = 0 \quad , \quad m = \pm \sqrt{\frac{-a}{b}} \in \mathbb{R} \quad a < 0$$

Se immaginiamo che $a = a(T)$ e che sia monotona

$T < T_c$ $\qquad$ $T > T_c$

m può essere non banale

T_c $\qquad$ $m = 0$

$$f(m) = -Hm + \frac{1}{2} a m^2 + \frac{1}{4} b m^4$$

campo magnetico esterno

Empiricamente $\quad \dfrac{d}{dt} m(t) = -\Gamma \dfrac{\partial f}{\partial m} \qquad \Gamma > 0$

L'energia libera diminuisce col tempo

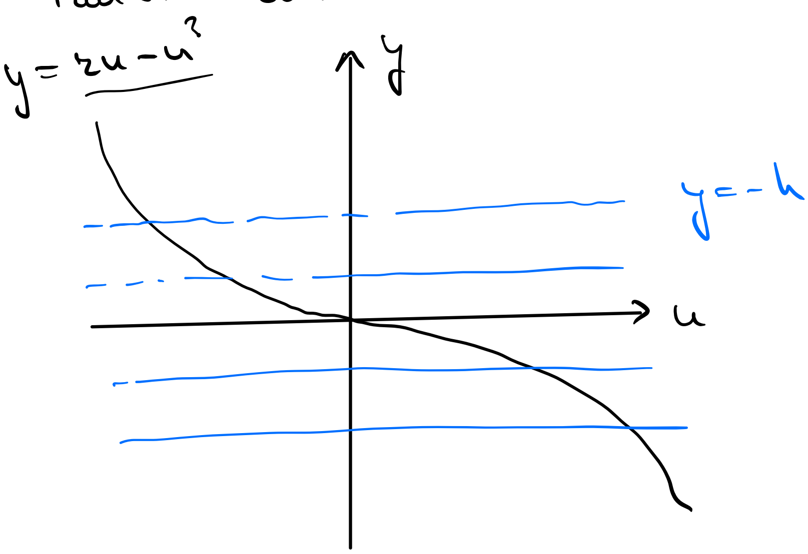
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial m}\frac{dm}{dt} = -\Gamma \left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)^2$$

Poniamo $\quad m = u\,(b\Gamma)^{-\frac{1}{2}}, \quad r = -a\Gamma, \quad h = (\Gamma^3 b)^{\frac{1}{2}} H$

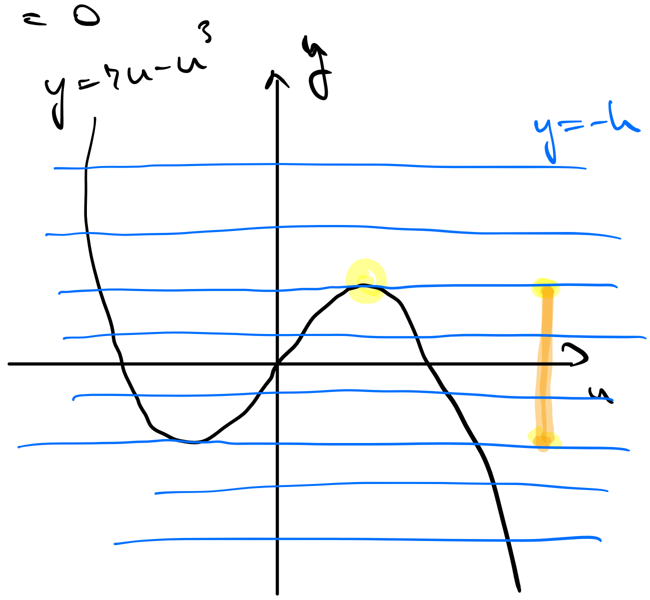
$$\boxed{\frac{du}{dt} = h + ru - u^3} = -\frac{\partial f}{\partial u}$$

$$f = -\frac{1}{2} r u^2 + \frac{1}{4} u^4 - hu$$

Punti critici : $\quad u^3 - ru - h = 0$



$r < 0$



$r > 0$

Sempre una soluzione

nella regione $h \in [-h_c(r), h_c(r)]$ ci sono 3 soluzioni

Per $r > 0$ → c'è una biforcazione tangente (si creano due pti critici)

Troviamo h_c: valore per cui c'è la biforcazione

$$\frac{d}{du}(ru - u^3) = 0 = r - 3u^2 \qquad u_{max} = \sqrt{\frac{r}{3}}$$

Usiamolo per eliminare u da

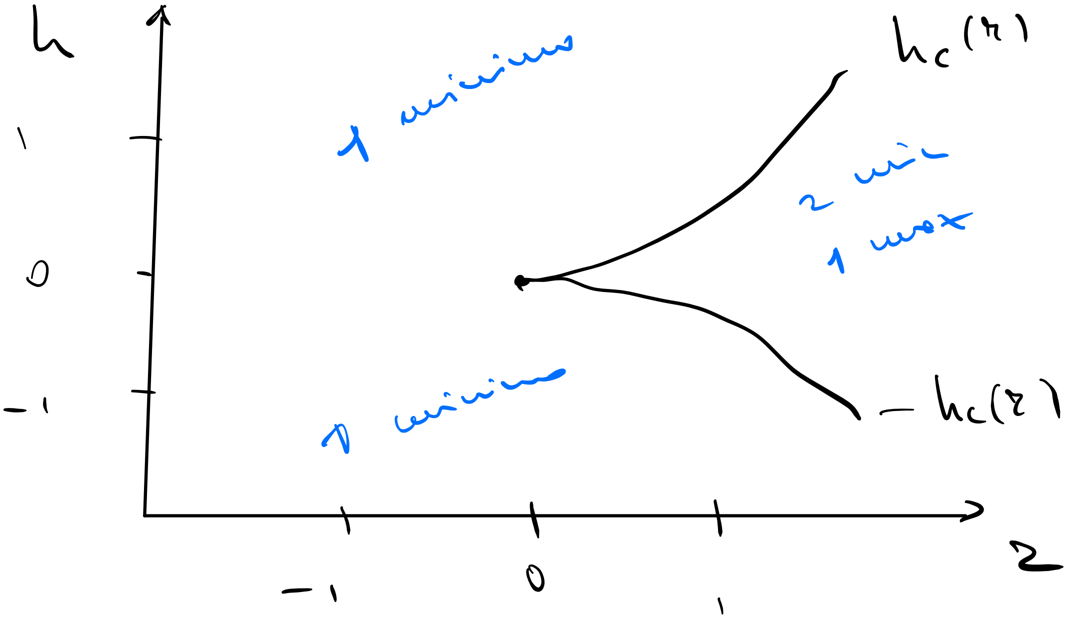
$$r u_{max} - (u_{max})^3 = h_c(r) = \frac{2}{3\sqrt{3}} r^{3/2}$$

$$\dot{u} = h + ru - u^3 = 0$$

Abbiamo una biforcazione tangente per

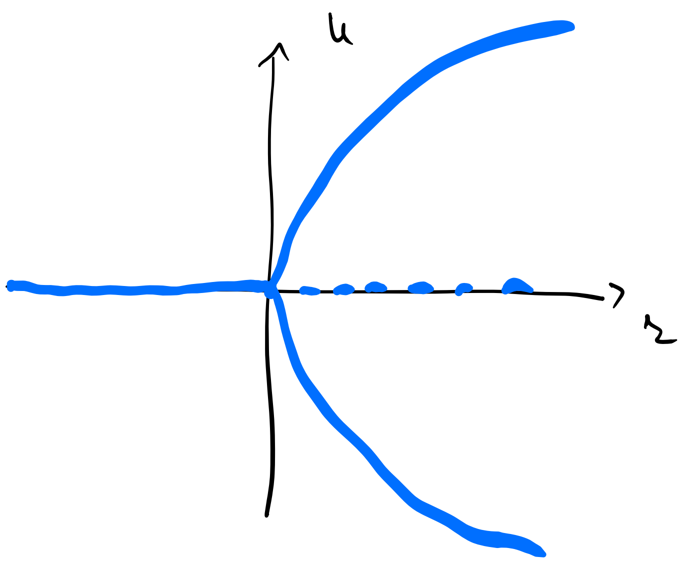
$$h = \pm h_c(r), \quad h_c(r) = \frac{2}{3\sqrt{3}} r^{3/2}$$

- 3 pti critici per $|h| < h_c(r)$
- 1 pto critico per $|h| > h_c(r)$

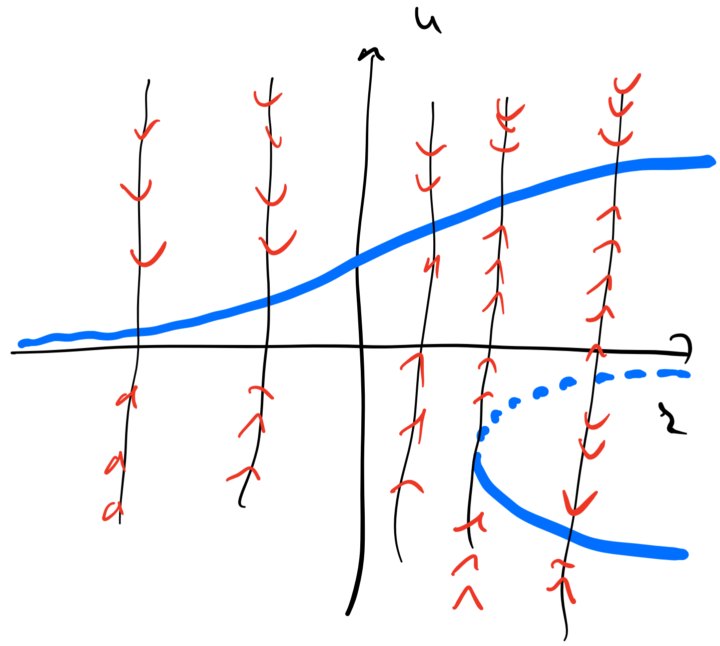


Le due curve $\pm h_c(r)$ si incontrano tangenzialmente in $(r, h) = (0, 0)$

h fissato



$h = 0$

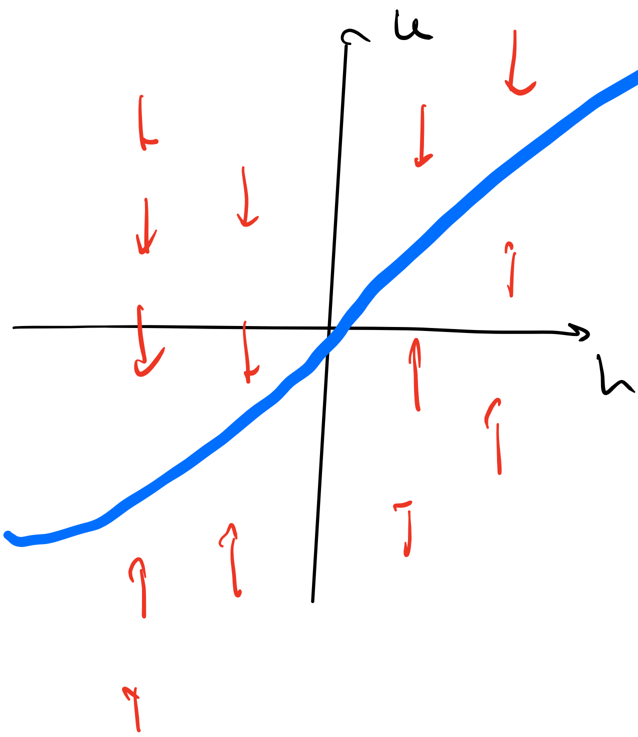


$h > 0$

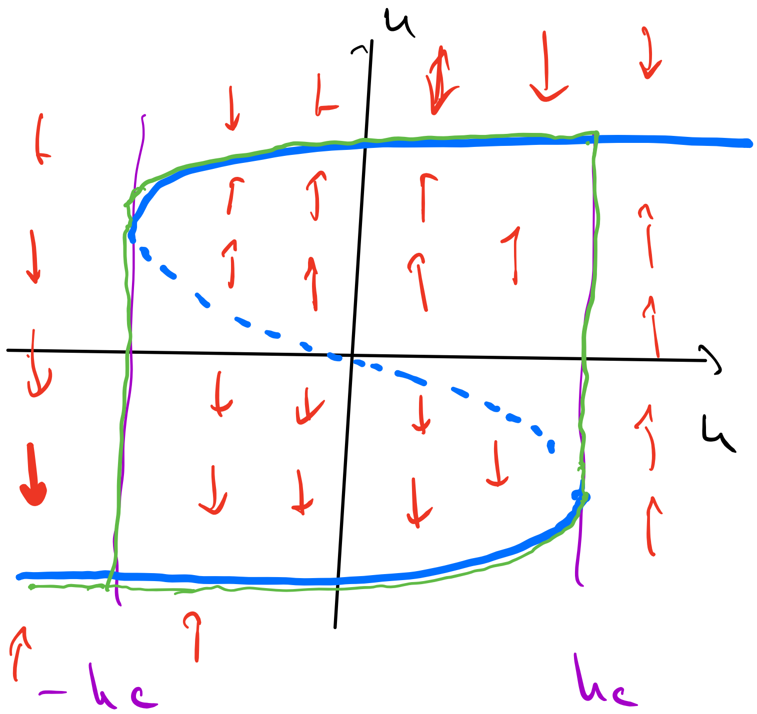
biforcazione imperfetta

r fissato

CURVA DI ISTERESI



$r < 0$



$r > 0$

3 pt critici per $|h| < h_c(r)$