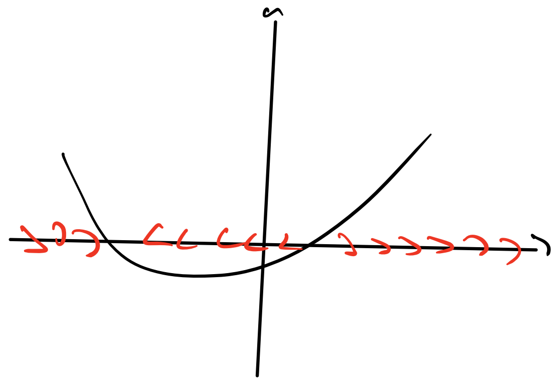
SISTEMI DINAMICI

Sistemi dinamici differenziali 1-dim.

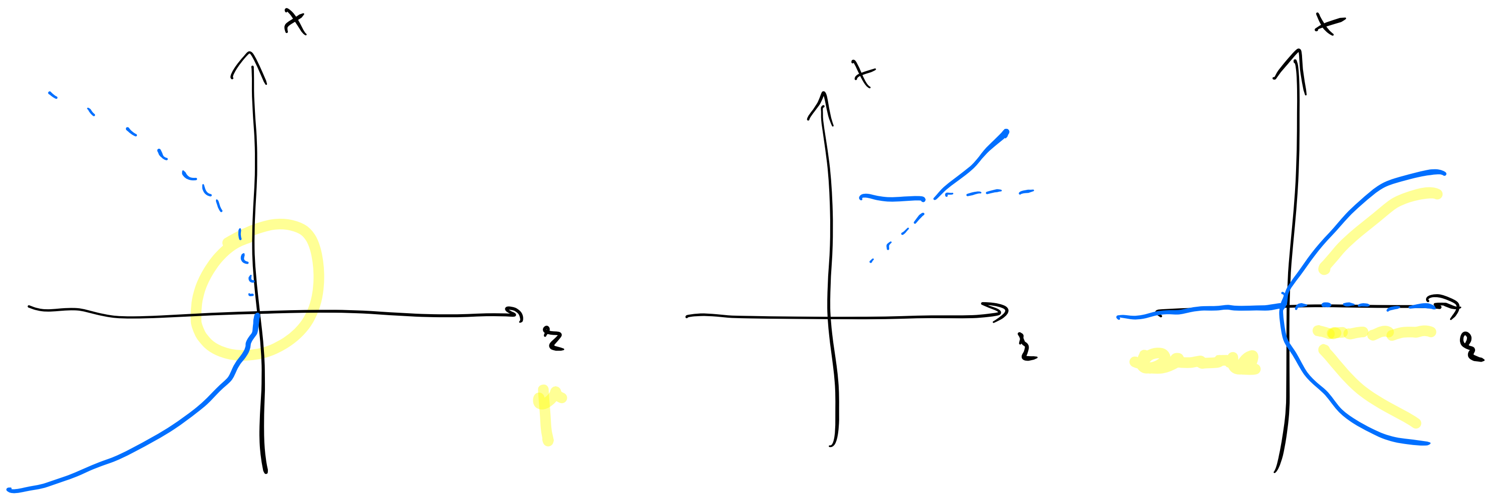
$$\dot{x} = f(x) \rightsquigarrow \dot{x} = f_r(x)$$



punti fissi iperbolici

$f_{r^*}(x^*) = 0$

$f'_{r^*}(x^*) \neq 0$



Due parametri: $\dot{x} = h + rx - x^3$

ESERCIZIO

$$\frac{d}{d\tau} x = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\dot N = RN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - p(N)$$

$$p(N) = \frac{B\,N^2}{A^2 + N^2}$$

Biforcazioni

$\dot x = f(x;\mu)$, pto critico $f(x^*;\mu^*)=0$

Stabilità → possiamo linearizzare $\dot\eta = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,\mu^*}\eta$

Se $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,\mu^*} \neq 0$ → Teorema della funzione implicita ⇒ $\exists\ x(\mu)$ tale che $f(x(\mu),\mu)=0$

per μ vicino a μ^* dove $x(\mu^*)=x^*$

→ $\frac{\partial f}{\partial x}(x(\mu),\mu) \neq 0$ ⇒ non cambia la stabilità

Biforcazione : cambio qualitativo del flusso

Biforcazione Tangente → curva di punti fissi $\mu = \mu(x)$

che passa per $\underset{\mu^*\ \ x^*}{(\mu, x)} = (0,0)$

- Tangente alla linea $\mu=0$ in $x=0$

$$\longrightarrow \quad \left.\frac{d\mu}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

- giace interamente da un lato di $\mu=0$ $\longrightarrow$ localmente

$$\left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_{x=0} \neq 0$$

Consideriamo una famiglia a un parametro

$$\dot{x} = f(x, \mu) \qquad x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}$$

$f(0,0)=0$ pto critico NON iperbolico, e quindi

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$$

Se abbiamo $\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0$, allora il Teorema della funzione implicita dice che $\exists!$ $\mu = \mu(x)$ tale che $\mu(0)=0$ e $f(x, \mu(x))=0$

Sotto quali condizioni abbiamo

$$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 = 0, \quad \left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_0 \neq 0 \quad \rightsquigarrow \text{ biforcazione tangente}$$

$f(x, \mu(x)) = 0$. Deriviamo

$$\frac{d}{dx} f(x, \mu(x)) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d\mu}{dx} = 0$$

in $(0,0)$ $\longrightarrow$ $$\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 = \frac{-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_0} = 0$$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 = 0$, $\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_0 \neq 0$

$\rightarrow$ la curva di punti fissi è tangente a $\mu = 0$ nel punto $x = 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x, \mu(x)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\frac{d\mu}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d^2\mu}{dx^2} = 0$$

andiamo in $(0,0)$, $\left.\frac{d\mu}{dx}\right|_0 = 0$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} + \left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_{(0,0)} = 0$$

$$\left.\frac{d^2\mu}{dx^2}\right|_{(0,0)} = \frac{-\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} \neq 0$$

dobbiamo imporre $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \neq 0$

Riassumiamo: per avere una biforcazione tangente richiediamo

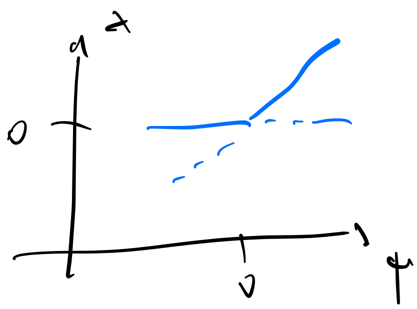
$$\left.\begin{aligned} &f(0,0)=0 \\ &\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0 \end{aligned}\right\} \text{ punto fisso non iperbolico}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)} \neq 0$$

→ le vediamo come una serie di condizioni sullo sviluppo in serie di $f(x,\mu)$

→ forma normale della biforcazione

$$f(x,\mu) \rightsquigarrow \alpha\mu + \beta x^2$$



Biforcazione Transcritica

1. due curve di pti fissi passano per (0,0)

$$\begin{cases} x=\mu \\ x=0 \end{cases}$$ ad esempio

2. entrambi le curve esistono da entrambi i lati di $\mu=0$

3. La stabilità cambia attraversando
$\mu = 0$

Solite condizioni $\dot{x} = f(x, \mu)$ con
$f(0,0) = 0$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$ NON IPERBOLICO

Prendiamo $\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} = 0$

Imponiamo di avere

$$\dot{x} = f(x, \mu) = x \; F(x, \mu)$$

↳ ramo di punti fissi $x = 0$

$$F(x, \mu) = \begin{cases} \frac{f(x, \mu)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{f(x, \mu)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\partial f}{\partial x}(0, \mu) \right)$$

Quindi $F(0, 0) = 0$

perché $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{(0,0)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}\Big|_{(0,0)}$$

Se vogliamo che $\mu(x)$ non coincida con $x=0$ e sia presente da entrambi i lati di $\mu=0$.

$$\frac{d\mu}{dx}\Big|_0 = \dots\dots$$

Assumiamo $\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)} \neq 0$

$\to$ per Teorema funzione implicita $\exists\ \mu(x)$ tale che $F(x, \mu(x)) = 0$. Come prima

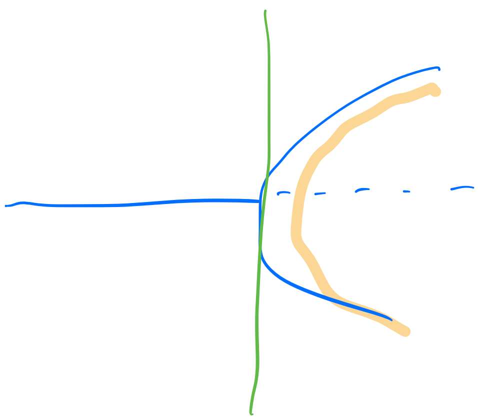
$$\frac{d\mu}{dx}\Big|_0 = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(0,0)}}{\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)}} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)}} \begin{matrix}\neq 0 \\ \neq \infty\end{matrix}$$

Riassumendo: per una biforcazione transcritica di un pto fisso non iperbolico devono valere

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)} \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} \neq 0$$

$$\alpha \mu x + \beta x^2$$

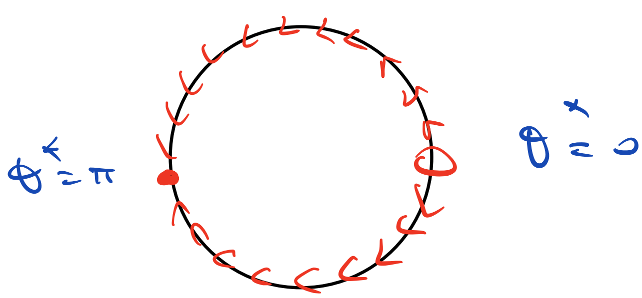
↳ forma normale



FLUSSI SUL CERCHIO

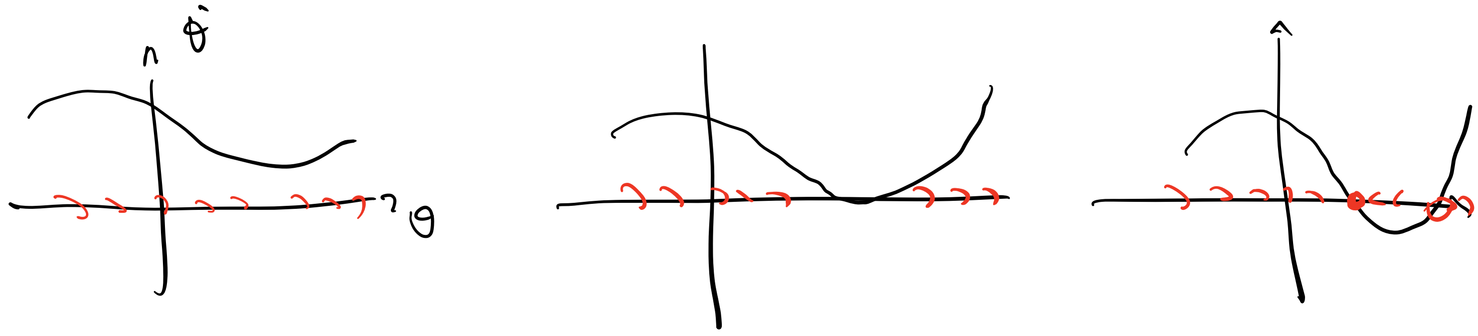
$\dot{x} = f(x)$ su $\mathbb{R}$ ⇝ $\dot{\theta} = f(\theta)$ su S^1 $\quad f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$

$\dot{\theta} = \sin\theta$

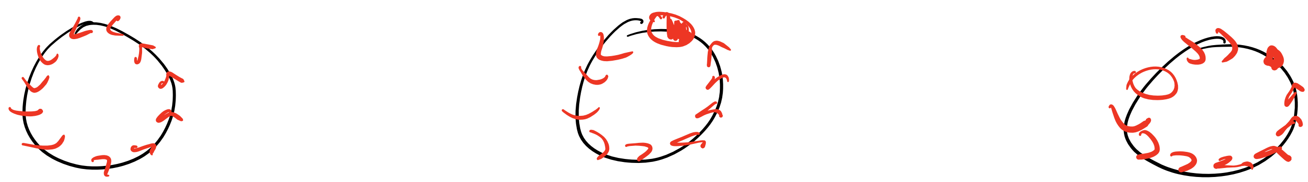


L'unica differenza è la separatrice

$\dot\theta = \omega - a \sin\theta \qquad \omega > 0 \, , \; a \geq 0$



$a < \omega \qquad\qquad a = \omega \qquad\qquad a > \omega$



→ esistono oscillazioni, di periodo

$$T = \int dT = \int_0^{2\pi} \frac{dT}{d\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}$$

↑ esercizio

$$\Big[\quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - \alpha \sin\theta} = \frac{1}{\omega} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz}$$

$$= \dots = \int \frac{1}{(z - z_-)(z - z_+)}\, dz$$

e prendete il residuo

SISTEMI DINAMICI DISCRETI 1-DIM

Consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞

denotiamo con f^n la sua iterazione $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ volte}}$

f prende uno stato iniziale x_0 e lo trasforma in un nuovo stato $x_1 = f(x_0)$

Denotiamo $x_n = f^n(x_0)$

$O^+ = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ orbita in avanti

$O = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ orbita completa $\left(\text{se } f \text{ è invertibile} \right)$

Esempio : $f(x) = x^2 + 1$

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$, $x_4 = 26$, ---

$\uparrow$ SEED o SEME

Punti fissi : x^* si dice fisso se $f(x^*) = x^*$

Può succedere il valore di un punto ritorni dopo n iterazioni $\longrightarrow$ punto periodico di periodo n , n-ciclo.

periodo minimo : n più piccolo tale che

$f^n(x_0) = x_0$ $\quad x_0$ ha periodo minimo n

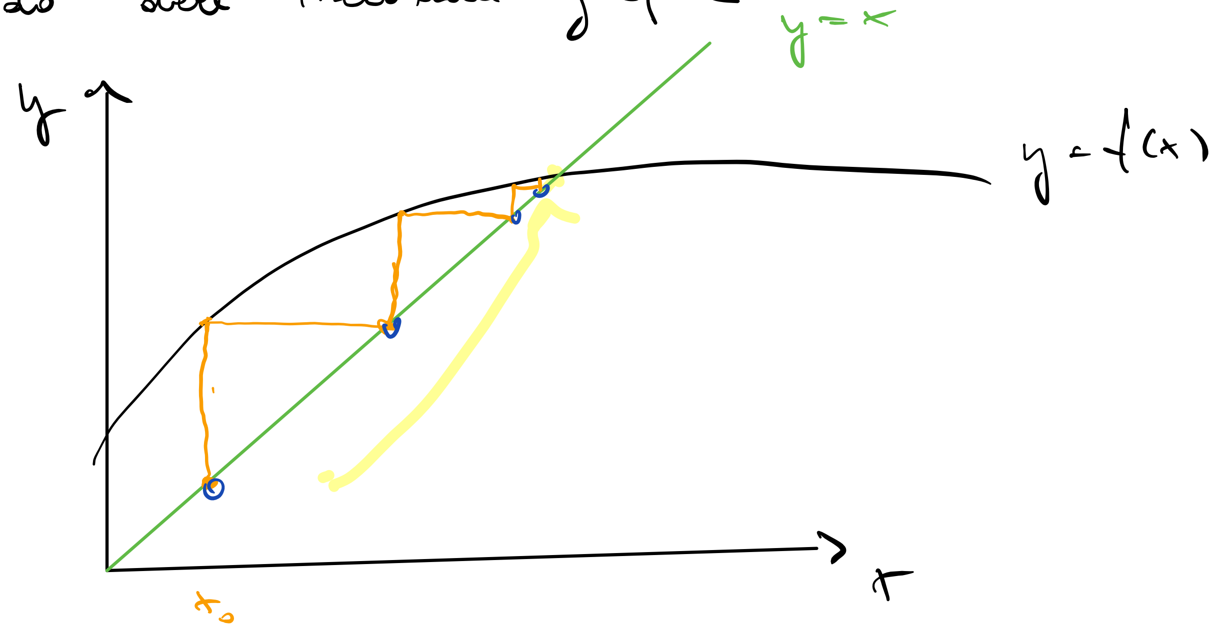
La sequenza $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ si ripete sotto l'azione di f ($\simeq$ orbita chiusa)

<u>Esempio</u> $f(x) = -x^3$

$f(0) = 0$

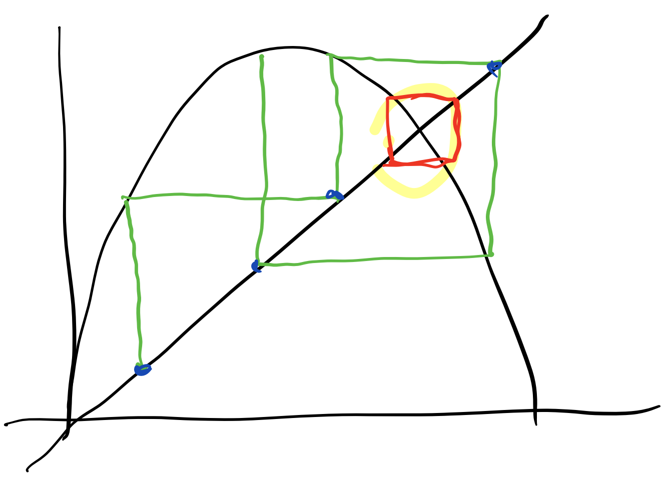
$f(\pm 1) = \mp 1$ punti periodici di periodo 2

Metodo dell'iterazione grafica



$(x_0, \underline{x_0}) \longrightarrow (x_0, f(x_0)) = (x_0, \underline{x_1}) \longrightarrow (x_1, x_1)$

$\longrightarrow (x_1, f(x_1)) = (x_1, \underline{x_2})$



Un punto x_0^* è detto pozzo (sink, attrattivo)

Se possiamo trovare un intorno $U \ni x_0^*$

t.c. se $y_0 \in U$ allora $f^n(y_0) \in U \ \forall n$

e $f^n(y_0) \longrightarrow x_0$
$n \longrightarrow \infty$

Viceversa per un punto fisso repulsivo (sorgente, source) le traiettorie (non di x_0^*) lasciano U dopo abbastanza iterazioni

<u>TEOREMA</u> Prendiamo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e assumiamo x_0 sia punto fisso. Allora

1. Se $|f'(x_0)| < 1$ $\quad x_0$ è attrattivo
2. Se $|f'(x_0)| > 1$ $\quad x_0$ è repulsivo
3. Se $|f'(x_0)| = 1$ $\quad$ non abbiamo abbastanza info.

<u>Dim</u> Dimostriamo 1. Allora $|f'(x_0)| = \nu < 1$

Scegliamo K tale che $\nu < K < 1$.

Siccome f' è continua, possiamo trovare un δ tale che $|f'(x)| < K \quad \forall x \in I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Allora per il Teorema del valor medio, preso $x \in I$

possiamo trovare un c tra x e x_0 t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0}$$ $f(x_0) = x_0$

Siccome $c \in I$, abbiamo che $|f'(c)| < K$

e quindi $|f(x) - x_0| < K |x - x_0|$

Inoltre, siccome $K < 1$, questo implica che $f(x) \in I$

Possiamo iterare l'argomento usando $f(x)$ al posto di x. Iterando n volte

$$|f^n(x) - x_0| < K^n |x - x_0|$$

e cioè $f^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ $\rightarrow$ punto fisso attrattivo

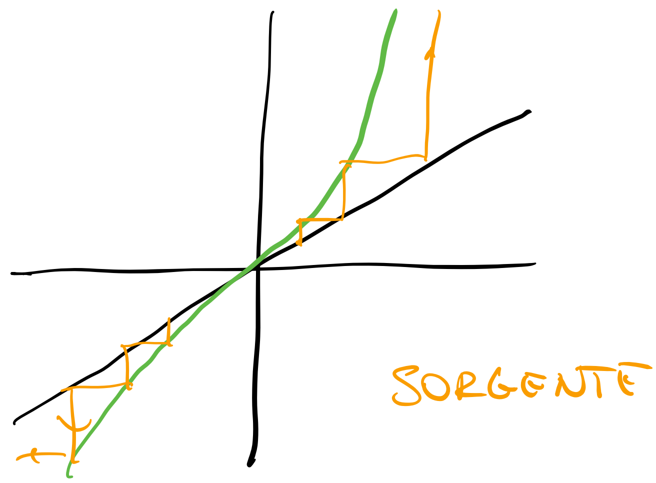
Il caso 2 si dimostra in modo simile

Caso 3

- $f(x) = x + x^3$

  $f(0) = 0$

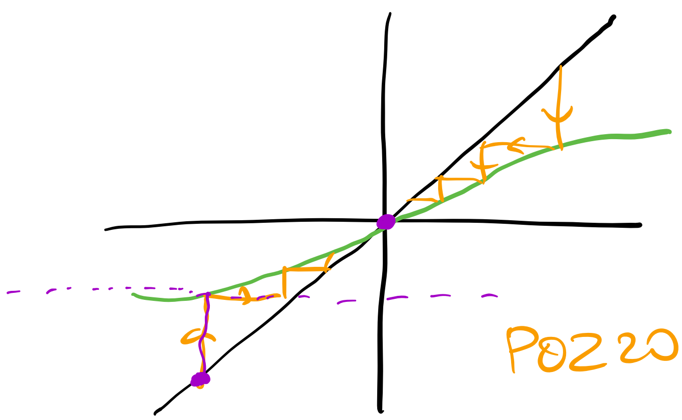
  $f'(0) = 1$



- $g(x) = x - x^3$

  $g(0) = 0$

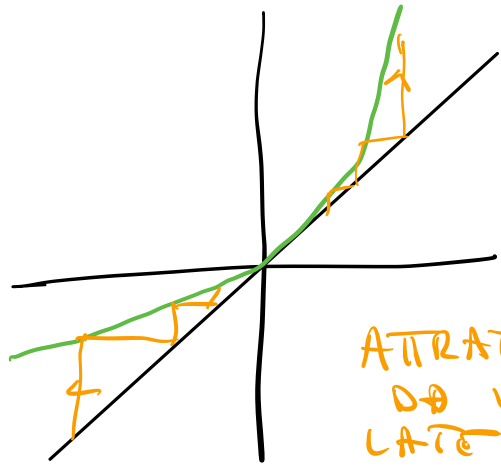
  $g'(0) = 1$



- $h(x) = x + x^2$

$h(0) = 0$

$h'(0) = 1$



Biforcazioni

$f_a(x) = a - x^2$

$\longrightarrow$ punti fissi $\quad a - x^2 = x \qquad x^2 + x - a$

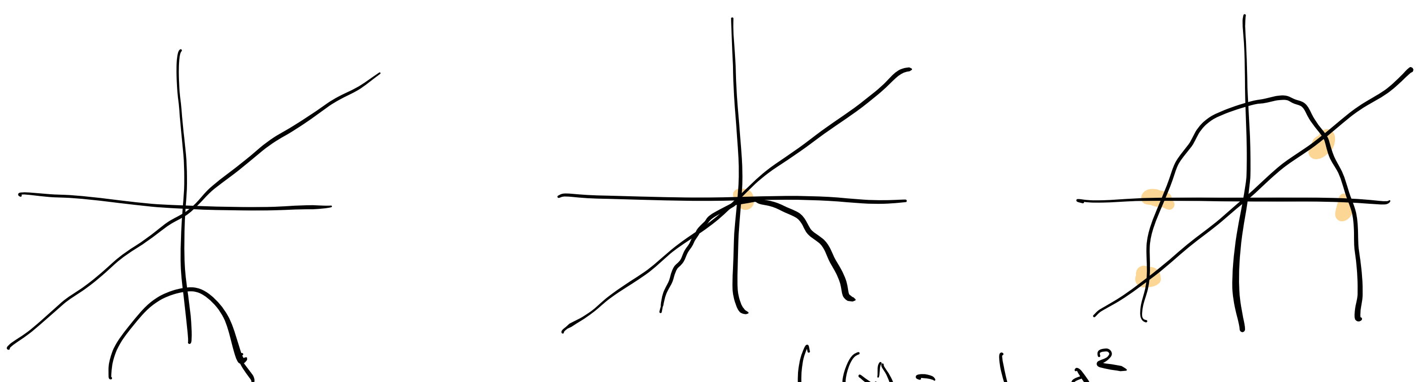
$$x^*_\pm = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{4a+1}\right)$$

$\frac{1}{2}$

Se $a < -\frac{1}{4}$ no pti fissi

Se $a = -\frac{1}{4}$ 1 pto fisso

Se $a > -\frac{1}{4}$ 2 pti fissi



$f(x) = -\frac{1}{4} - x^2$

$f_a(x) = a - x^2 \longrightarrow f_a'(x) = -2x$

0

ad esempio $a = \frac{1}{2}$ $\qquad x^*_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

$$f'_{\frac{1}{2}}(x^*_\pm) = -2\left(\frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}\right) = 1 \mp \sqrt{3} \quad \begin{cases} <1 \\ >1 \end{cases}$$

x^*_+ è attrattivo

x^*_- è repulsivo

In generale

$$f'_a(x^*_\pm) = -2\,\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{4a+1}\right)$$

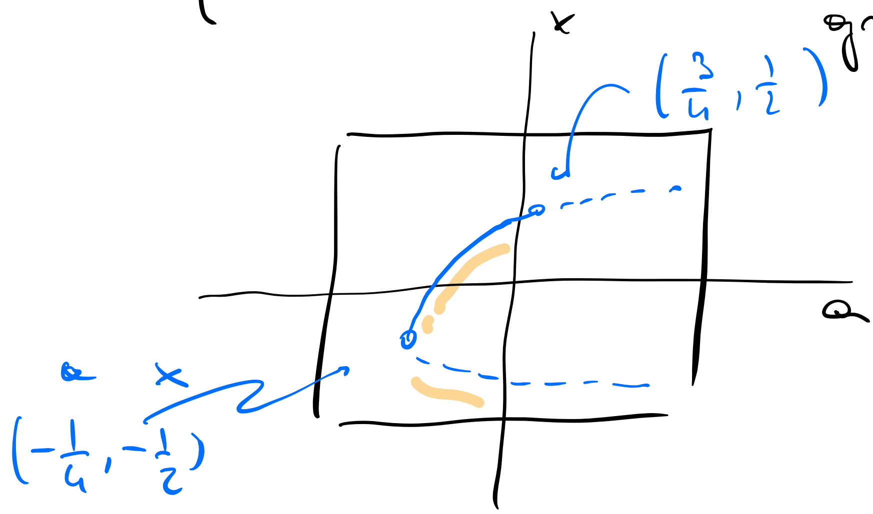
$$= 1 \mp \sqrt{4a+1}$$

x^*_- è sempre >1 $\longrightarrow$ sempre repellente

x^*_+ passa da <1 a >1 quando

$a = \frac{3}{4}$ $\qquad (\,|f'| < 1\,)$

$\left|1 - \sqrt{4a+1}\right|$ diventa >1 per a grande $a > \frac{3}{4}$



$x^*_+ = \frac{1}{2}$ per $a = \frac{3}{4}$

Ma le cose sono più complicate

Per $a < \frac{3}{4}$ abbiamo solo due punti fissi

Per $a > \frac{3}{4}$ $\left(a \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right] \right)$ appaiono due 2-cicli.

$f_a(x) = a - x^2$

Guardiamo f^2 $\quad f(f(x)) = x$

$$f_a(f_a(x)) = a - (a - x^2)^2 = a - a^2 + 2ax^2 - x^4$$

Punti fissi di f^2 ? $\quad a - a^2 + 2ax^2 - x^4 = x$

$$x^*_\pm = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{4a+1}\right) \leftarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4a-3}\right) \leftarrow$$ accettabile per $a > \frac{3}{4}$

$$f_a^2 = a - a^2 + 2ax^2 - x^4$$

$$\left.\frac{d f^2}{dx}\right|_{x_{1,2}} = \left. 4ax - 4x^3 \right|_{x_{1,2}} =$$

$$4a\left(\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4a-3}\right)\right) - 4\left(\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4a-3}\right)^3\right)$$

$$= 2a\left(1 \pm \sqrt{4a-3}\right) - \frac{1}{2}\left(1 \pm (4a-3)^{3/2} + 3(4a-3) \pm 3\sqrt{4a-3}\right)$$

$$= 2a \pm \cancel{2a\sqrt{4a-3}} - \frac{1}{2}\left[1 \pm \cancel{(4a-3)\sqrt{4a-3}} + 3(4a-3) \pm \cancel{3\sqrt{4a-3}}\right]$$

$$= 2a - \frac{1}{2}\left[1 + 3(4a-3)\right] = -4a + 4$$

per entrambi $\quad |4 - 4a| < 1 \quad a \in \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$

$\Rightarrow$ attrattivi