

**Università di Trieste**  
**Dipartimento di Ingegneria e Architettura**

**Corso di**  
**Tecnica delle Costruzioni**

**AZIONE ASSIALE**  
**Elementi compressi e elementi tesi**

**Prof. Ing. Natalino Gattesco**  
**Dott. Ing. Boem Ingrid**

## **BIBLIOGRAFIA**

**Toniolo G., Di Prisco M., “Cemento Armato – Calcolo agli stati limite”, Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.**

**Park R., Paulay T., “Reinforced Concrete Structures”, John Wiley & Sons, New York, 1975.**

**Mac Gregor J., “Reinforced Concrete – Mechanics and Design”, Prentice Hall, New Jersey, 1988.**

**Santarella L., “Prontuario del Cemento Armato”, XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.**

## ELEMENTI SOGGETTI A COMPRESSIONE

I pilastri sono elementi soggetti prevalentemente ad azione assiale di compressione normalmente accompagnata da sollecitazioni di flessione e taglio.

Gli aspetti legati alla presenza combinata di altre caratteristiche della sollecitazione (momento flettente e taglio), se queste sono di entità rilevante, vanno adeguatamente tenuti in considerazione.

Anche gli effetti del second'ordine, che si sviluppano in elementi snelli, vanno adeguatamente tenuti in considerazione.

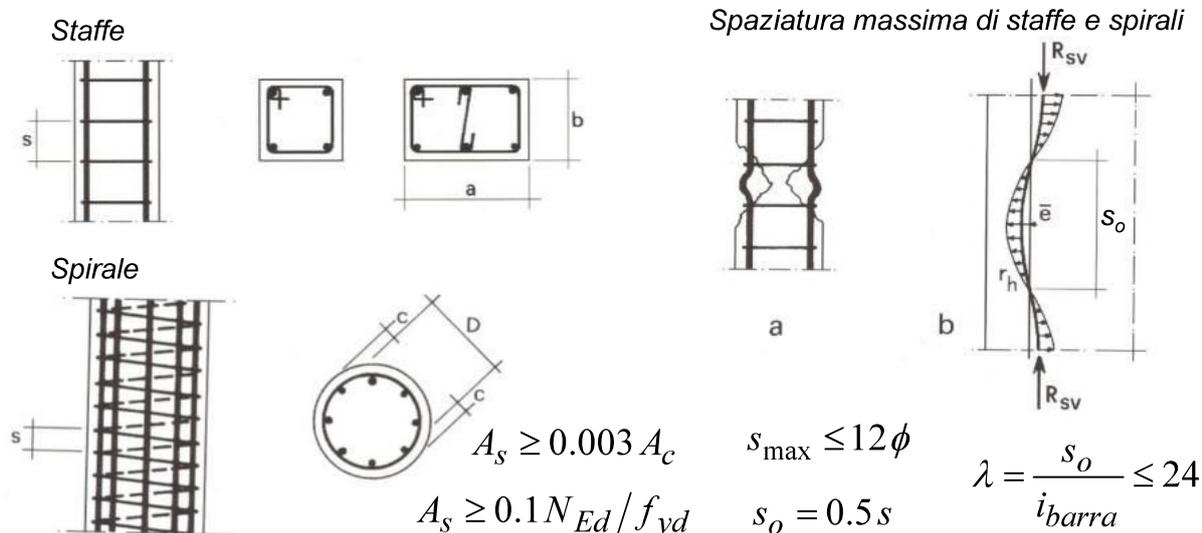
I pilastri degli edifici, comunque, sono frequentemente progettati facendo riferimento alla sola azione assiale quando le altre componenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di entità molto modesta.

## ELEMENTI SOGGETTI A COMPRESSIONE

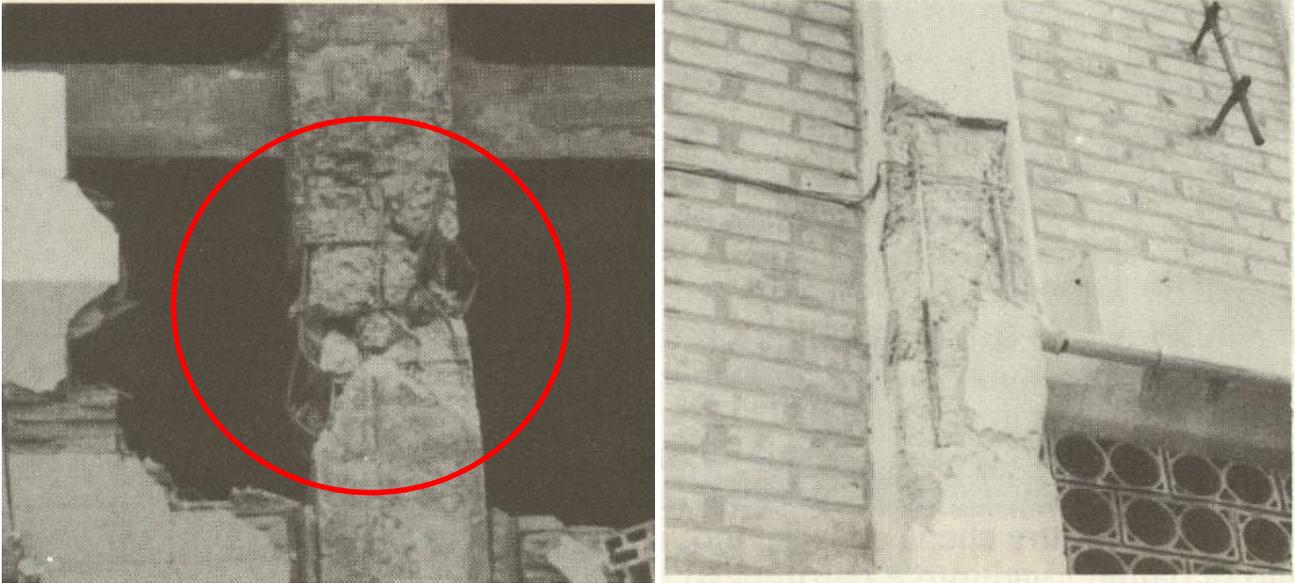
I pilastri di strutture in calcestruzzo armato sono soggetti prevalentemente ad azione assiale di compressione.

Essi sono provvisti di due ordini di armature:

- Longitudinali
- Trasversali costituite da staffe o spirali

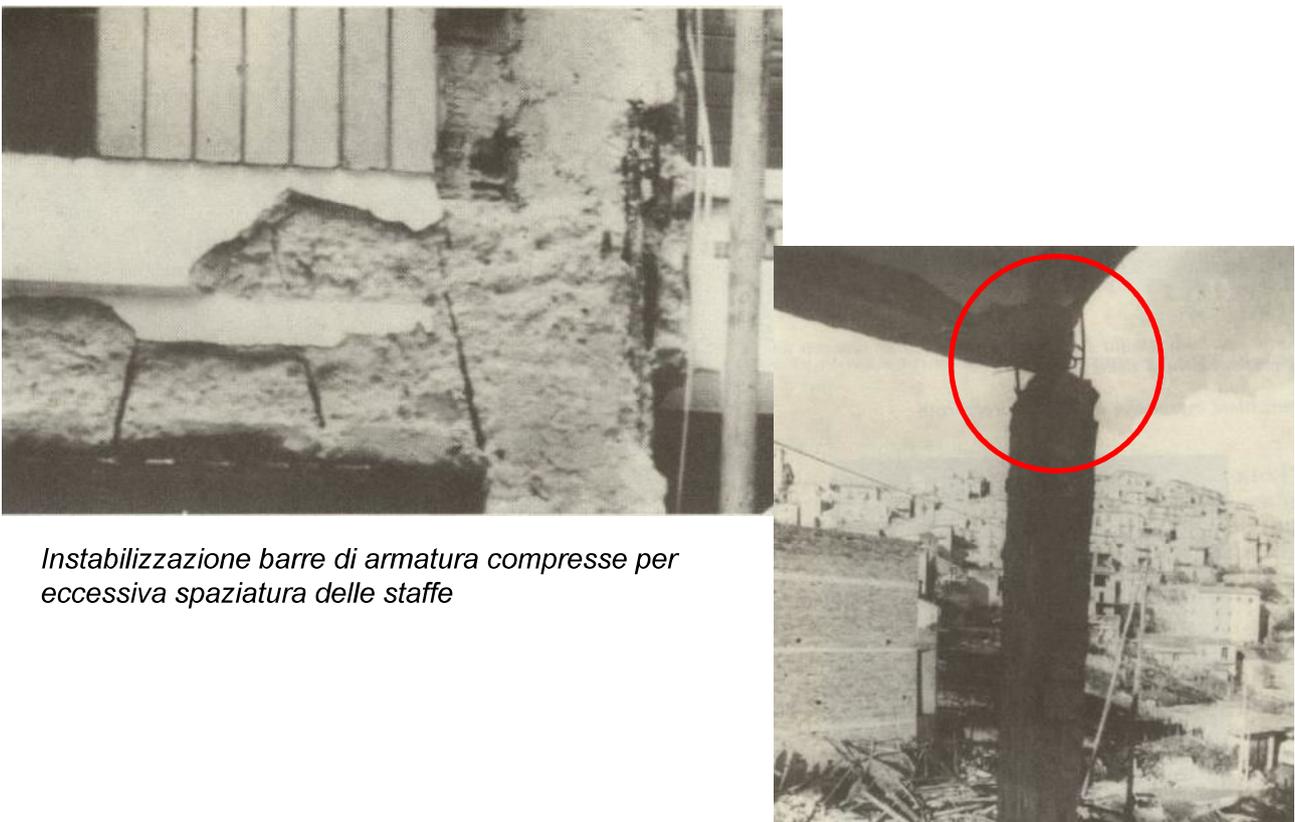


## ELEMENTI SOGGETTI A COMPRESSIONE

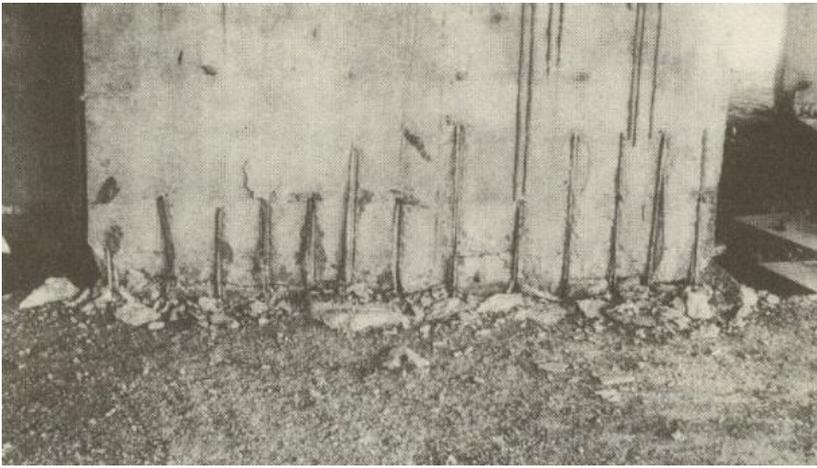


*Instabilizzazione barre di armatura compresse per eccessiva spaziatura delle staffe*

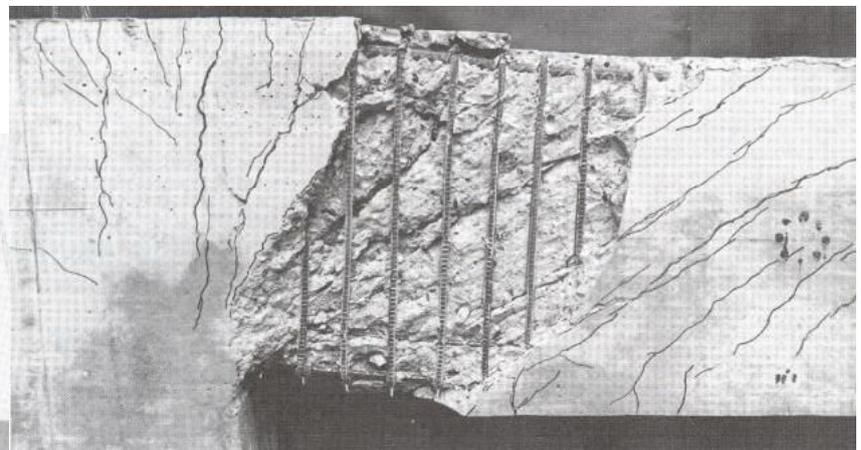
## ELEMENTI SOGGETTI A COMPRESSIONE



*Instabilizzazione barre di armatura compresse per eccessiva spaziatura delle staffe*



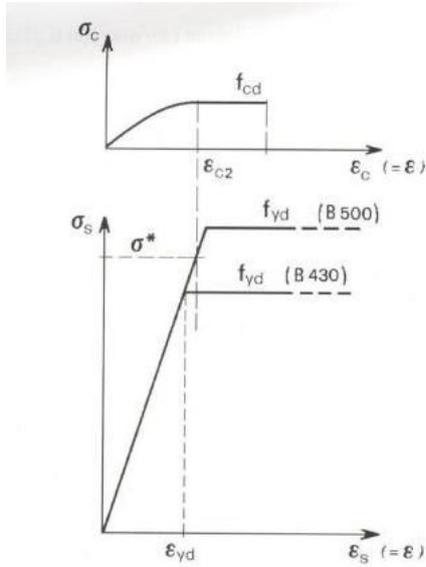
*Instabilizzazione barre di armatura compresse per eccessiva spaziatura delle staffe*



*Instabilizzazione barre di armatura compresse per eccessiva spaziatura delle staffe*

# ELEMENTI SOGGETTI A COMPRESSIONE

La capacità portante in termini di azione assiale diventa:



$$N_{Rd} = f_{cd} A_c + \sigma^* A_s$$

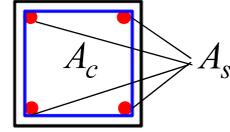
$$\sigma^* = E_s \varepsilon_{c2} \quad \text{se} \quad \varepsilon_{yd} > \varepsilon_{c2}$$

$$\sigma^* = f_{yd} \quad \text{se} \quad \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_{c2}$$

In quest'ultimo caso si può scrivere per  $N_{Rd}$

$$N_{Rd} = f_{cd} \left( A_c + \frac{f_{yd}}{f_{cd}} A_s \right) = f_{cd} A_c (1 + \omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{f_{yd} A_s}{f_{cd} A_c} \quad \text{Rapporto meccanico di armatura}$$

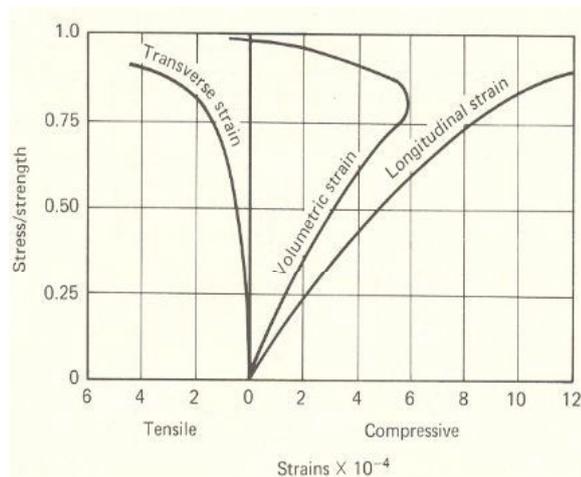
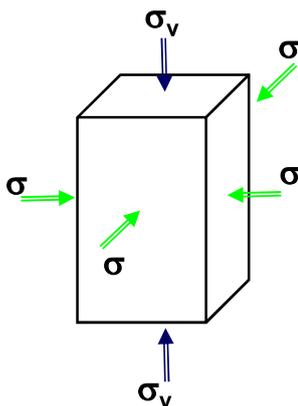


La presenza di staffe o spirali contiene il calcestruzzo incrementando la resistenza a compressione (confinamento)

## CONFINAMENTO CLS COMPRESSO

La resistenza e la duttilità del calcestruzzo compresso aumentano sensibilmente in stati di sforzo triassiali.

L'azione di una pressione trasversale “confina” il calcestruzzo e contrasta l'evoluzione dello stato fessurativo interno e l'incremento di volume che precede la rottura

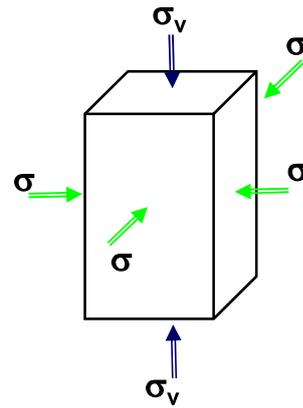
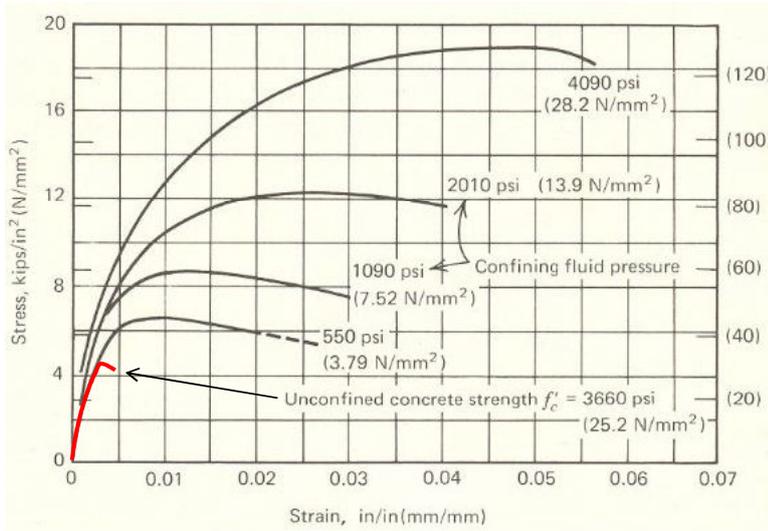


# CONFINAMENTO CLS COMPRESSO

Se si applicasse una pressione trasversale  $\sigma$  su tutte le facce si otterrebbe un notevole aumento in resistenza e in duttilità

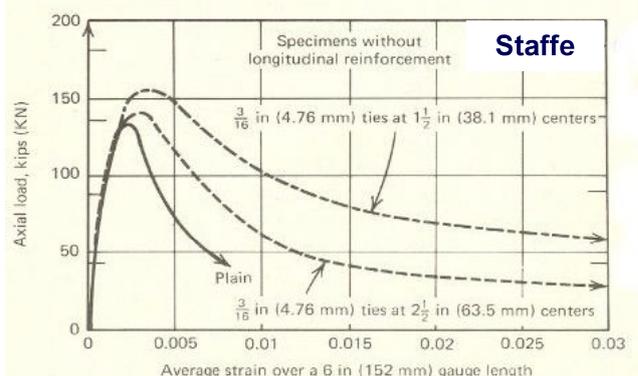
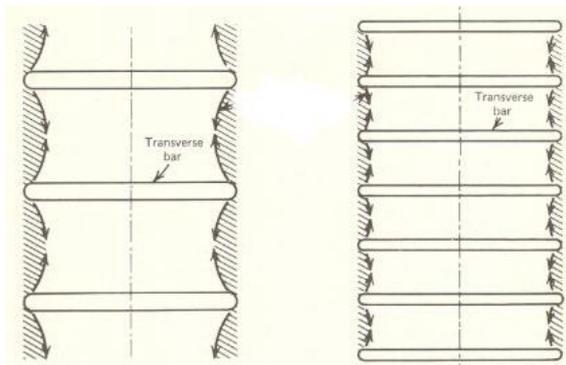
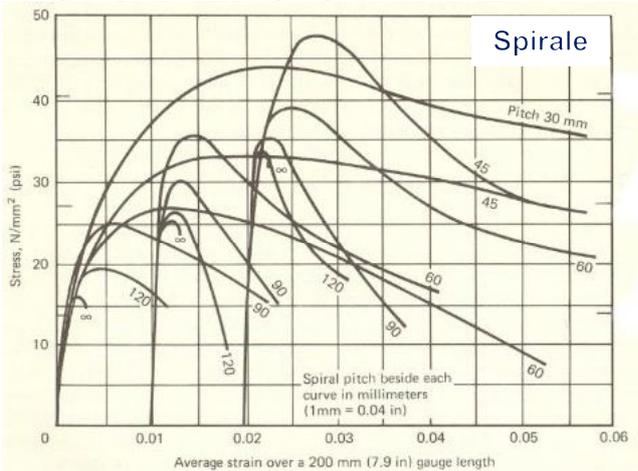
$$f_{cc} = f_c + \alpha \sigma$$

$\alpha$  variano fra 4 e 7  
 $\alpha=4.1$  Richart, Brown



# CONFINAMENTO CON SPIRALI O STAFFE

Il contenimento trasversale può essere eseguito con staffe/spirali. L'efficacia è funzione del passo e della forma.



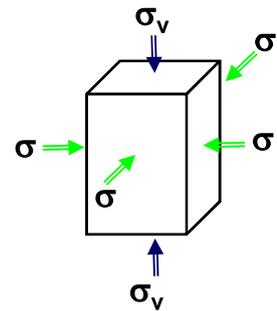
## EFFETTO DEL CONFINAMENTO

L'effetto del confinamento può essere tenuto conto andando a modificare il legame costitutivo del calcestruzzo in funzione del tipo di armatura d'anima impiegata.

Si assume che quando il calcestruzzo raggiunge il suo ramo plastico le staffe sono prossime allo snervamento

Allora le tensioni di confinamento possono essere approssimate con la relazione

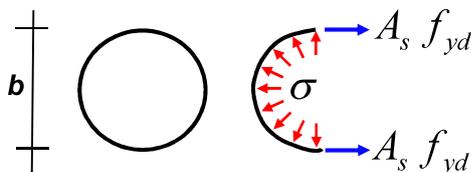
$$\frac{\sigma}{f_{cd}} = 0.5 \omega_w$$



$\omega_w$  è la percentuale volumetrica meccanica di armatura d'anima

## CALCOLO TENSIONE LATERALE

### Staffe circolari

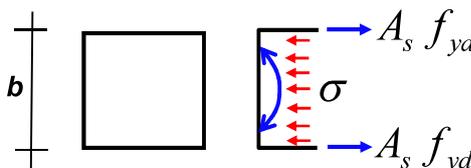


$$\sigma = \frac{2 A_s f_{yd}}{b s} \quad \text{(Legge di Boyle)}$$

$$\omega_w = \frac{4 \pi b A_s f_{yd}}{\pi b^2 s f_{cd}} \Rightarrow \frac{2 f_{yd} A_s}{b s} = \frac{\omega_w \pi b f_{cd}}{2 \pi b}$$

$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd}$$

### Staffe quadrate



$$\sigma = \frac{2 A_s f_{yd}}{b s}$$

$$\omega_w = \frac{4 b A_s f_{yd}}{b^2 s f_{cd}} \Rightarrow \frac{2 f_{yd} A_s}{b s} = \frac{\omega_w f_{cd}}{2}$$

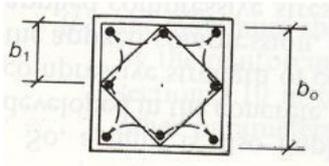
$$\sigma = 0.5 \omega_w f_{cd}$$

# EFFICACIA STAFFE E SPIRALI

Naturalmente l'efficacia è legata al passo e alla forma

$$\sigma = 0.5 \alpha_n \alpha_s \omega_w f_{cd}$$

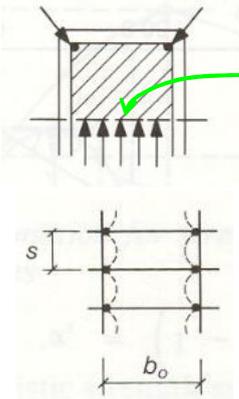
forma                      passo



$$\alpha_n \cong 1 - \frac{n b_1^2}{6 A_o}$$

$n$  numero barre vincolate con st.

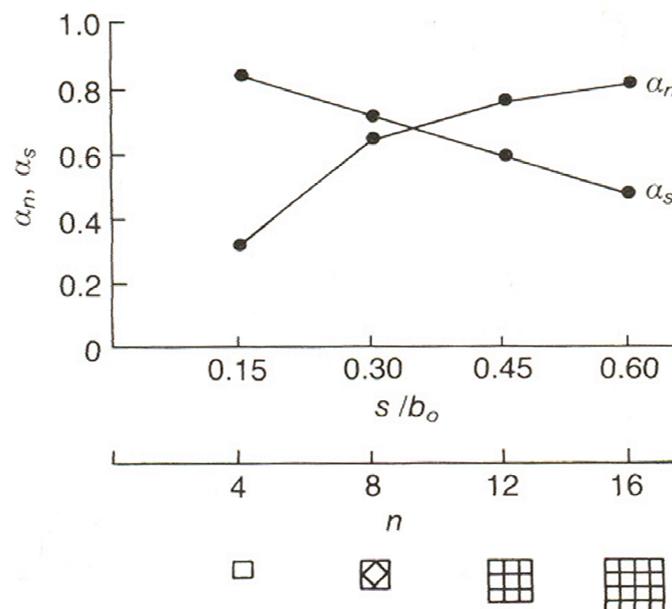
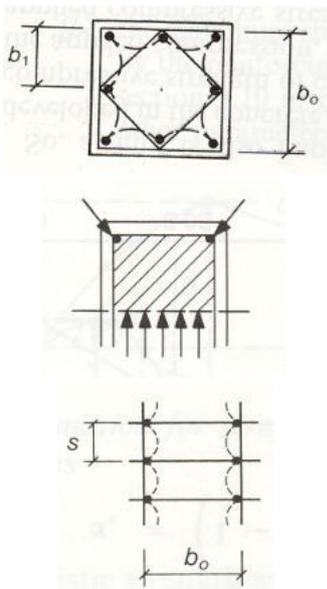
$A_o$  area del core



Per le travi, l'asse neutro va considerato come se fosse presente una staffa trasversale

$$\alpha_s = 1 - \frac{s}{2 b_o}$$

# EFFICACIA STAFFE E SPIRALI



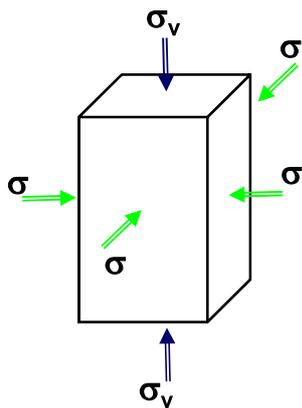
Per pilastri circolari e staffe circolari

$$\alpha_n = 1 \quad \alpha_s = \left(1 - \frac{s}{2 b_o}\right)^2$$

Per pilastri cerchiati con spirale

$$\alpha_n = 1 \quad \alpha_s = 1 - \frac{s}{2 b_o}$$

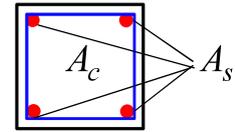
# CAPACITA' PORTANTE CON CONTRIB. LATER.



$$\sigma = 0.5 \alpha_n \alpha_s \omega_w f_{cd}$$

$$f_{cc} = f_c + \alpha \sigma$$

assumendo  $\alpha = 4$



$$N_{Rd} = f_{cd} [A_c + 4(0.5 \alpha_n \alpha_s \omega_w)] + \sigma^* A_s$$

$$\sigma^* = E_s \varepsilon_{c2} \quad \text{se} \quad \varepsilon_{yd} > \varepsilon_{c2}$$

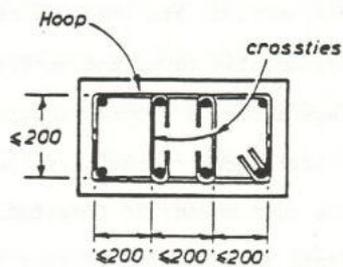
$$\sigma^* = f_{yd} \quad \text{se} \quad \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_{c2}$$

$$N_{Rd} = f_{cd} (A_c + 2 \alpha_n \alpha_s \omega_w) + \sigma^* A_s$$

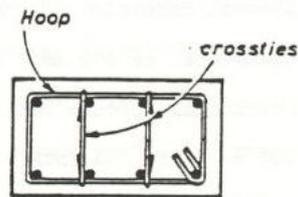
Importante per staffe circolari o spirali

Trascurabile per pilastri con staffe poligonali

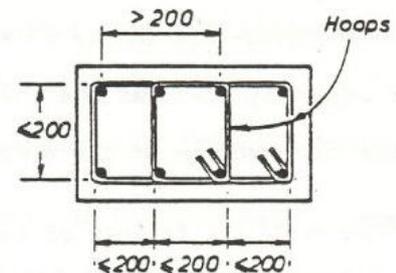
## ESEMPI DI CONFINAMENTO



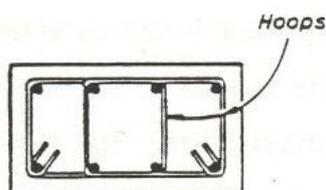
Single hoop plus two supplementary cross ties bent around longitudinal bars.



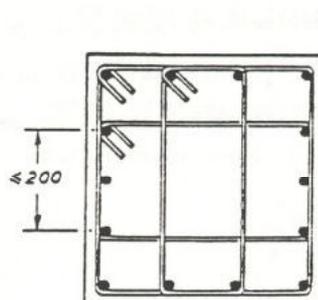
Single hoop plus two supplementary cross ties bent around hoop.



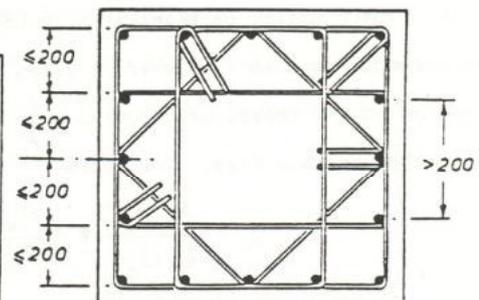
Two overlapping hoops - preferred detail



Two overlapping hoops - not preferred



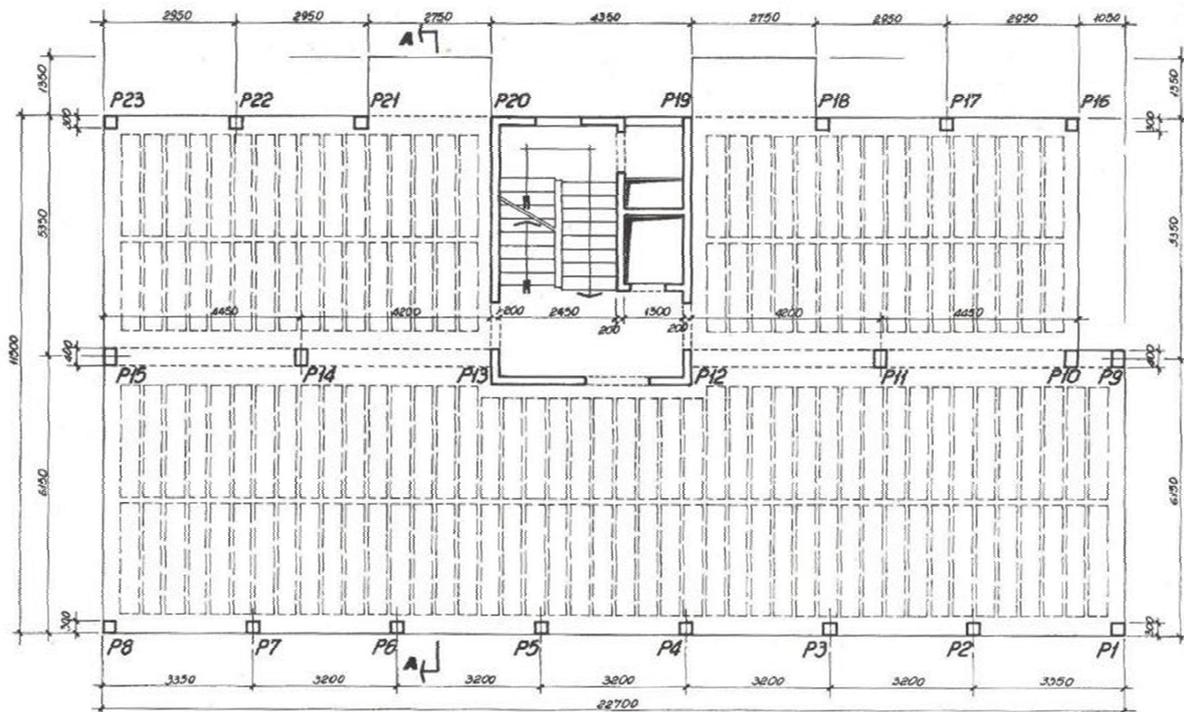
Three overlapping hoops



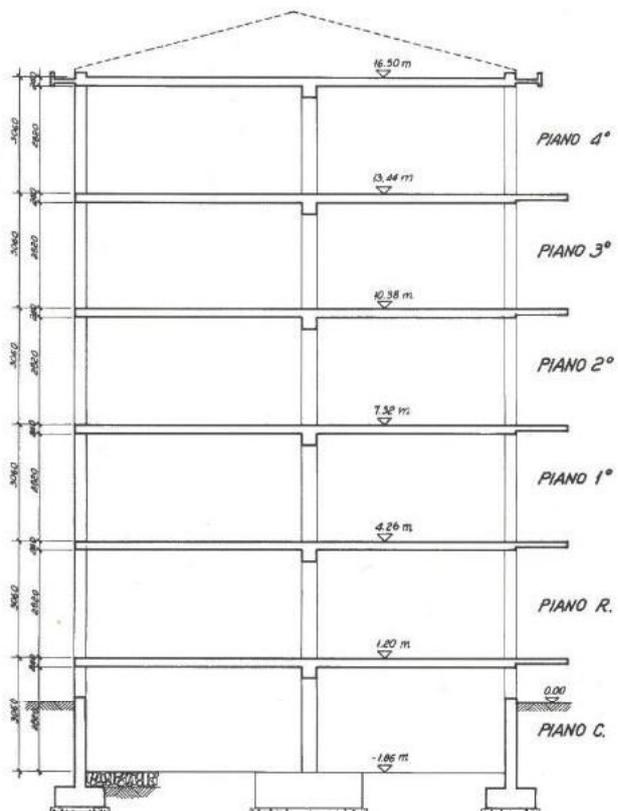
Four overlapping hoops

# ESEMPIO DIMENSIONAMENTO PILASTRO

tav. 1 PIANTA PIANO TIPO



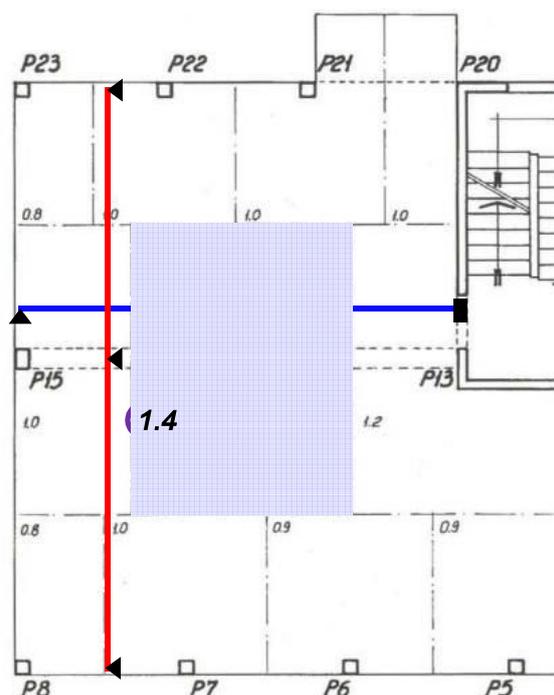
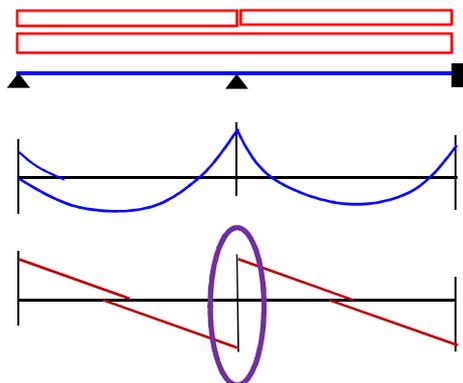
## ESEMPIO DIMENSIONA MENTO PILASTRO



tav. 2 SEZIONE A-A

## AZIONI SUI PILASTRI

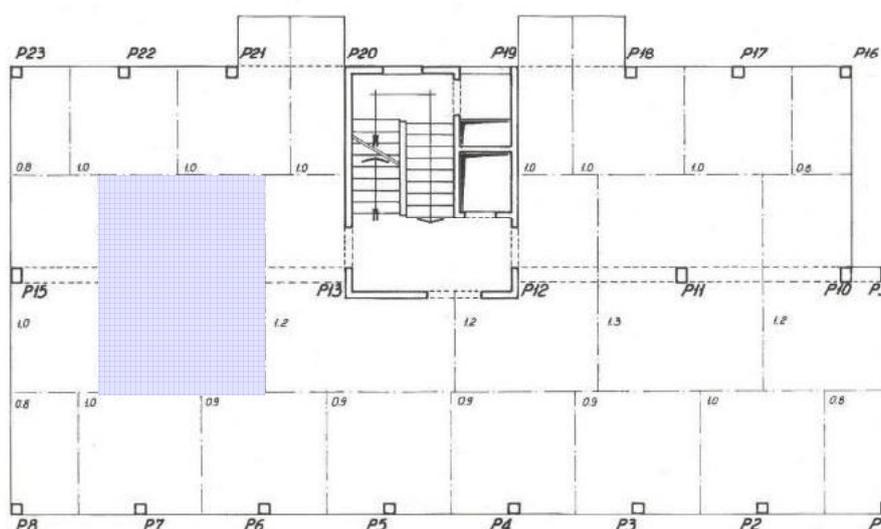
Per un calcolo di predimensionamento dei pilastri, con riserva di successive verifiche al seguito di più rigorose analisi dei telai, si può seguire un procedimento approssimato che si basa sulla scomposizione della pianta dell'impalcato in *aree di influenza*.



## AZIONI SUI PILASTRI

Per un calcolo di predimensionamento dei pilastri, con riserva di successive verifiche al seguito di più rigorose analisi dei telai, si può seguire un procedimento approssimato che si basa sulla scomposizione della pianta dell'impalcato in *aree di influenza*.

tav. 3 AREE D'INFLUENZA PILASTRI



# VERIFICHE SEZIONI

Per il passo massimo delle staffe e il diametro minimo delle staffe si deve avere:

$$s \leq 12\phi \qquad \phi_s \geq \frac{\phi}{4}$$

Per le riprese dei ferri ai vari piani è necessario considerare una lunghezza minima di ancoraggio pari a:

$$l_b = \frac{\phi f_{yd}}{4 f_{bd}}$$

Con

$$f_{yd} = 391 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ctk} = 1,95 \text{ N/mm}^2 \qquad (\text{v. Tab 1.07})$$

$$f_{ctd} = 1,95/1,5 = 1,30 \text{ N/mm}^2$$

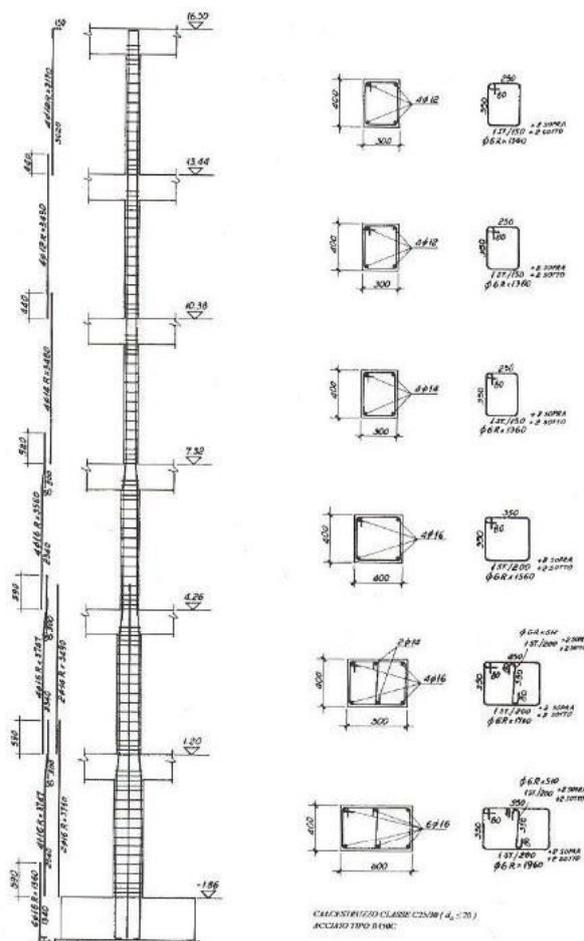
$$f_{bd} = 2,25 \times 1,30 = 2,92 \text{ N/mm}^2$$

si ottiene

$$l_b = \frac{\phi \cdot 391}{4 \cdot 2,92} \cong 33\phi \qquad \text{comunque } l_b \geq 40\phi$$

## DISPOSIZIONE ARMATURE NEL PILASTRO

tav. 4 PILASTRO P14



# ELEMENTI SOGGETTI A TRAZIONE

Con la trattazione degli elementi tesi in calcestruzzo armato si introduce il tema della fessurazione.

Il tema della fessurazione è complesso e quindi i criteri e metodi che si utilizzano per trattare il fenomeno sono approssimati.

Come anticipato, dando per scontata la sicurezza nei riguardi della rovina, la fessurazione ha tre ordini di conseguenze:

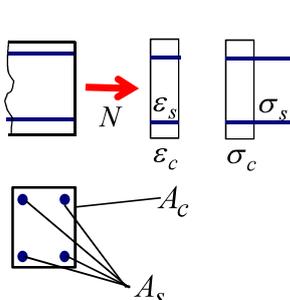
- **Incremento della permeabilità** (che penalizza la durabilità e la funzionalità nel caso dei serbatoi)
- **Decadimento estetico** (evidenza dello stato fessurativo con senso di apparente precarietà statica che lo rendono inaccettabile all'utenza)
- **Riduzione durabilità** (gli agenti aggressivi per calcestruzzo e acciaio penetrano più velocemente attraverso le fessure accelerando il degrado)

## ELEMENTI TESI

Caso di sezione interamente reagente  $\sigma_c \leq f_{ctd}$

- Ipotesi
- Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
  - Perfetta aderenza acciaio-cl
  - Cls elastico lineare fino a rottura, acciaio elastico lineare

Per le verifiche di esercizio, da congruenza ed equilibrio si ha



$$\left[ \begin{array}{l} \varepsilon_s = \varepsilon_c \rightarrow \sigma_s = \sigma_c \frac{E_s}{E_c} = \sigma_c \alpha_e \\ \sigma_c A_c + \sigma_s A_s = N \end{array} \right.$$

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c + \alpha_e A_s}$$

$\sigma_c \leq f_{ctd}$

si ha il limite di formazione delle fessure  $A_i$  sezione omogeneizzata

$$N_{cr} = f_{ctd} (A_c + \alpha_e A_s)$$

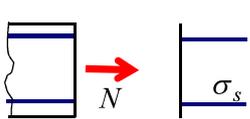
# ELEMENTI TESI

**Caso di sezione parzializzata (calcestruzzo fessurato)**

**Ipotesi** {

- Conservazione delle sezioni piane (Ipotesi di Bernoulli)
- Perfetta aderenza acciaio-clc
- Clc fessurato, acciaio elastoplastico

Per le verifiche di esercizio, da equilibrio si ha



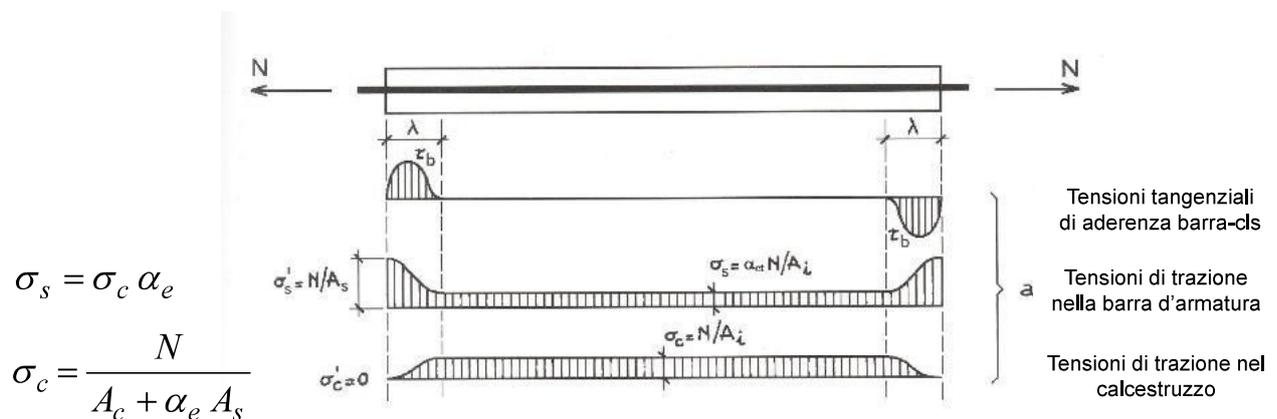
$$\sigma_s = \frac{N}{A_s}$$

Per le verifiche allo stato limite ultimo di resistenza, si ha

$$N_{Rd} = f_{yd} A_s$$

## FESSURAZIONE DEL TIRANTE IN C.A.

In un tirante superati i tratti estremi di diffusione delle tensioni dall'acciaio al clc, si hanno nei due materiali le tensioni

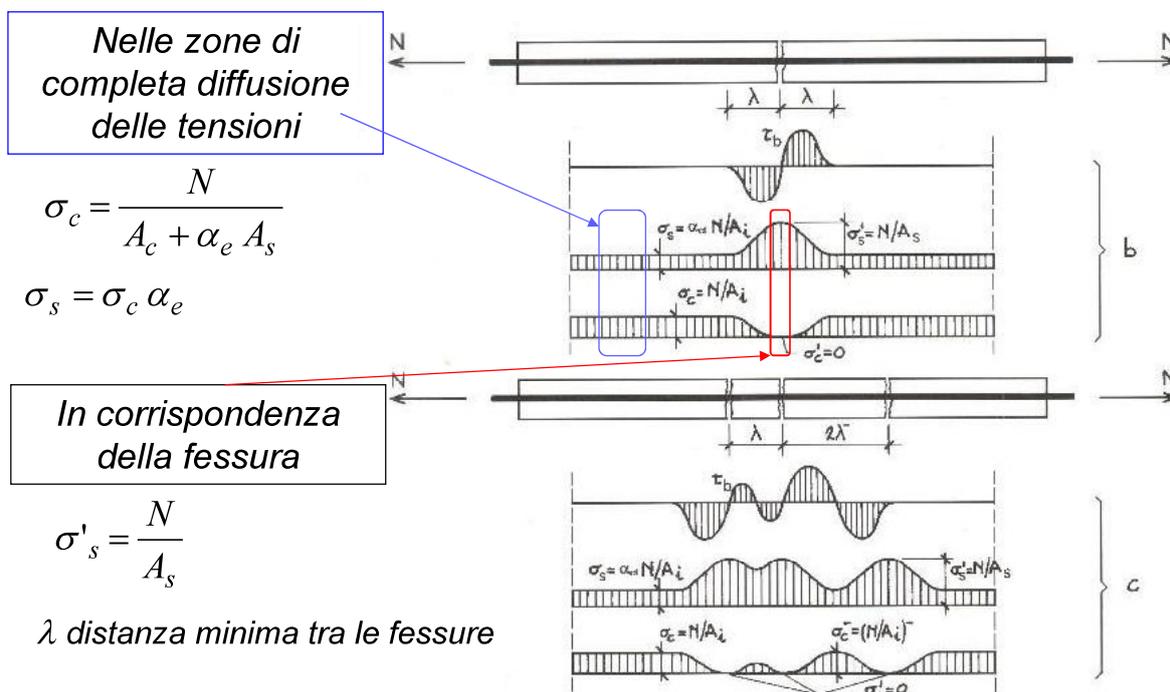


Finchè la tensione nel clc rimane inferiore alla sua resistenza a trazione, tale stato rimane invariato.

Si nota che nei tratti di incompleta diffusione delle tensioni sono attive le tensioni di aderenza che favoriscono tale diffusione.

## FESSURAZIONE DEL TIRANTE IN C.A.

Incrementando l'azione assiale si ha che la tensione nel cls può raggiungere la resistenza e formarsi la prima fessura e poi le altre



## FESSURAZIONE DEL TIRANTE IN C.A.

Per il calcolo della distanza minima tra due fessure contigue si considera la situazione di figura

Equilibrio tratto infinitesimo di barra

$$A_s d\sigma_s(x) = \pi \phi \tau_b(x) dx$$

$$\tau_b(x) = \frac{\phi}{4} \frac{d\sigma_s(x)}{dx}$$

Considerando  $\tau$  costante  $\sigma$  è lineare

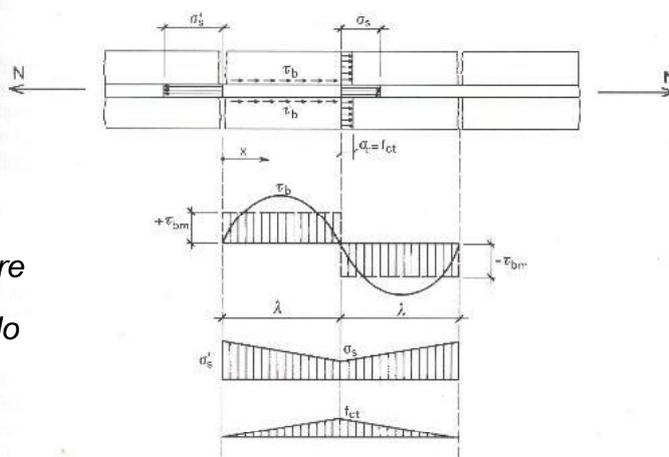
L'equilibrio di metà concio, ponendo la tensione nel cls pari a  $f_{ctd}$ , dà

$$N = \sigma'_s A_s = \sigma_s A_s + f_{ctd} A_c$$

$$\Delta\sigma_s = \sigma'_s - \sigma_s = f_{ctd} \frac{A_c}{A_s}$$

L'equilibrio della semiparte di barra dà

$$A_s \Delta\sigma_s = \pi \phi \tau_{bm} \lambda \quad \frac{\pi \phi^2}{4} \Delta\sigma_s = \pi \phi \tau_{bm} \lambda \quad \lambda = \frac{\phi A_c f_{ctd}}{4 A_s \tau_{bm}}$$



# FESSURAZIONE DEL TIRANTE IN C.A.

Il calcolo dell'apertura di fessura allora diventa

Distanza minima fessure

$$\lambda = \frac{\phi A_c f_{ctd}}{4 A_s \tau_{bm}}$$

Apertura di fessura

$$w = 2(\Delta\lambda_s - \Delta\lambda_c)$$

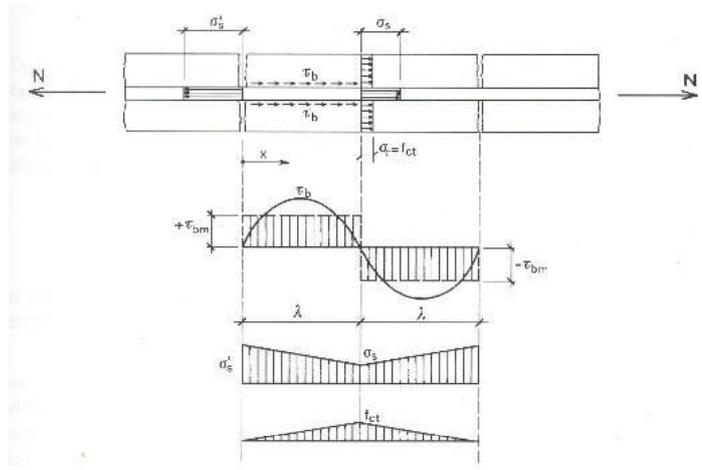
Allungamento barra      Allungamento cls

$$\Delta\lambda_s = \frac{\sigma'_s + \sigma_s}{2 E_s} \lambda = \frac{2\sigma'_s - \Delta\sigma_s}{2 E_s} \lambda$$

$$\Delta\lambda_c = \frac{f_{ctd}}{2 E_c} \lambda \quad (\text{trascurabile})$$

$$w = 2 \left( \frac{\sigma'_s}{E_s} - \frac{1}{2} \frac{\Delta\sigma_s}{E_s} \right) \lambda = 2 \frac{\sigma'_s}{E_s} \left( 1 - \frac{f_{ctd} A_c}{2 \sigma'_s A_s} \right) \lambda$$

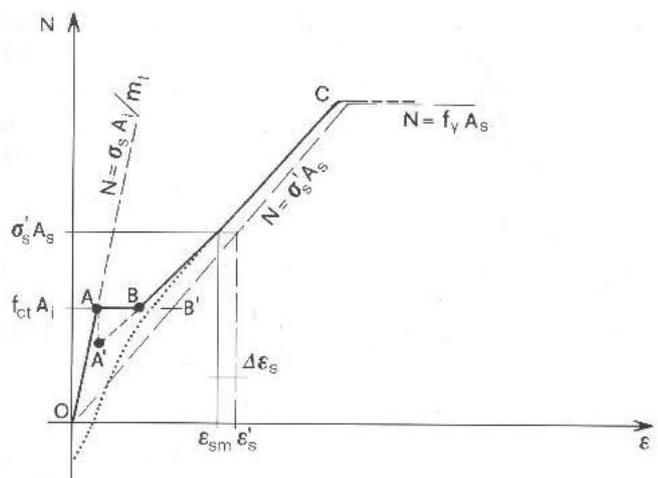
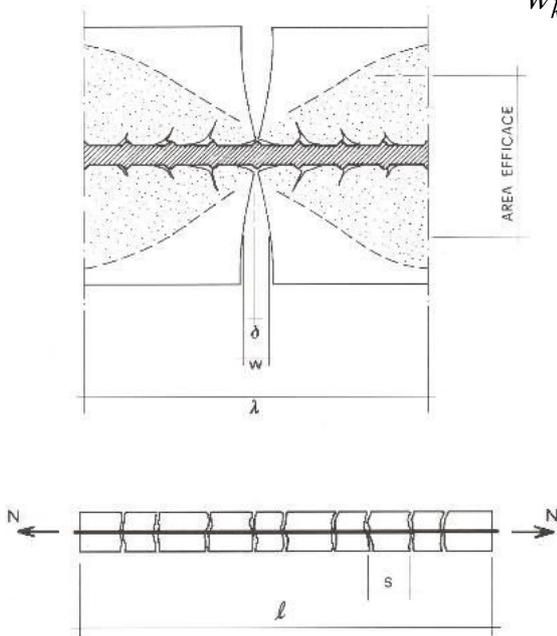
Tension stiffening



# FESSURAZIONE DEL TIRANTE IN C.A.

Il valore caratteristico dell'apertura di fessura si ricava dalla relazione

$$w_k = 1.7 w_m$$



$$A_s \geq A_c \frac{f_{ctm}}{f_{yd}} \quad (\text{armatura minima})$$