

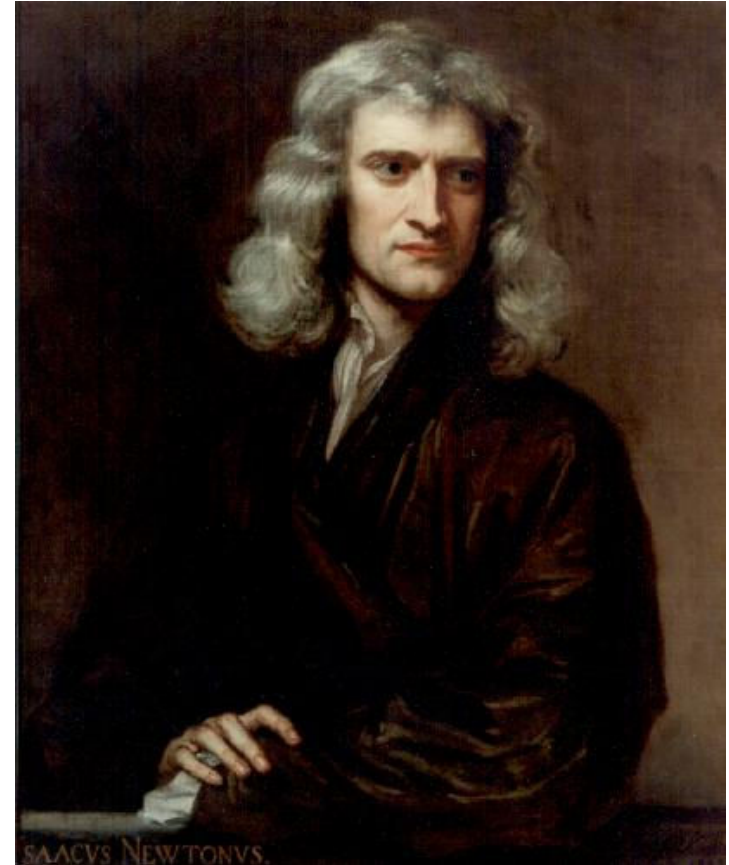
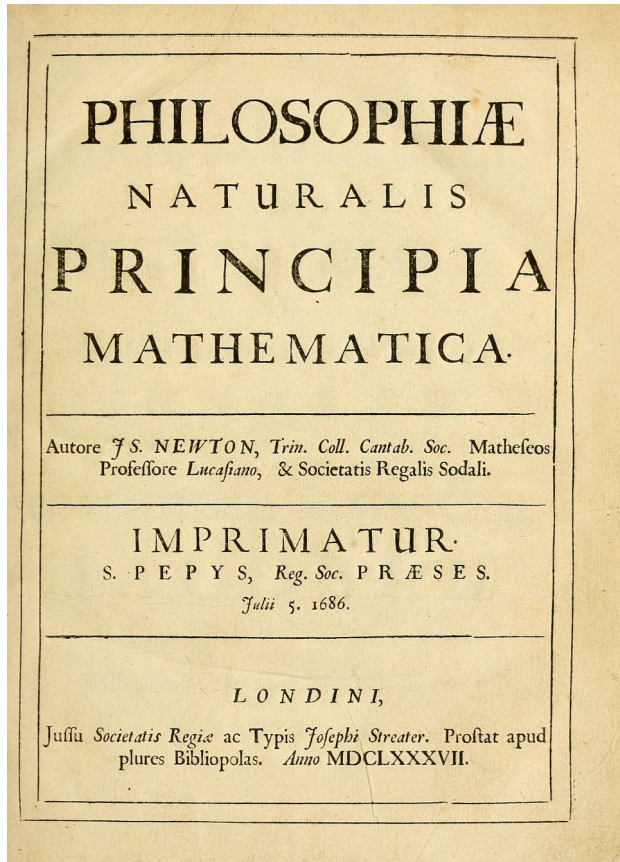
Fisica Generale 1 – 018IN

Dinamica

Prof. Pierre Thibault
pthibault@units.it



Dinamica



Isaac Newton (1643-1727)

Le leggi di Newton

Prima legge

Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse.

Seconda legge

Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.

Terza legge

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria: ossia, le azioni di due corpi sono sempre uguali fra loro e dirette verso parti opposte.

Fonte: http://tesi.cab.unipd.it/45491/1/Francesco_Costa.pdf

Massa e Forza

Massa:

* Misura della resistenza alle variazioni di velocità
← "massa inerziale"

* Proporzionale al peso
← "massa gravitazionale"

* Quantità di materia

Unità: kg

massa è additiva

 $m_1 + m_2$

Forza:

* Spinta che produce un cambiamento di moto di un corpo

→ vettore

unità: Newton

$1N = kg \cdot m/s^2$

Le leggi di Newton

"principi della dinamica"

1. Se la forza risultante che agisce su un corpo è nulla ($\sum \vec{F} = 0$), l'accelerazione del corpo è nulla ($\vec{a} = 0$)
↳ definizione di sistema di riferimento inerziale

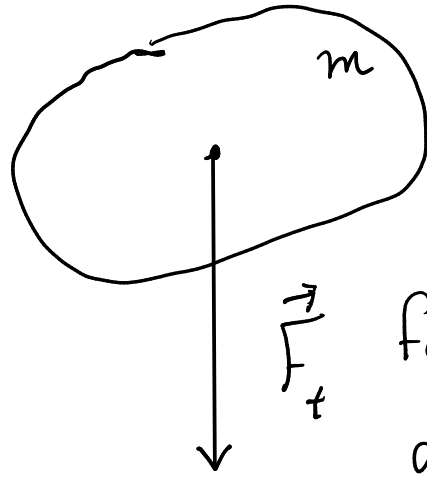
2. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

l'accelerazione di un corpo è proporzionale alla forza risultante

3. La forza esercitata da un corpo A su un corpo B è uguale in modulo e direzione e in verso opposto alla forza esercitata da B su A

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

Peso



$\vec{F}_t$ forza esercitata
dalla terra

$$\vec{F}_t = m\vec{g} \quad \vec{g}: \text{accelerazione gravitazionale}$$

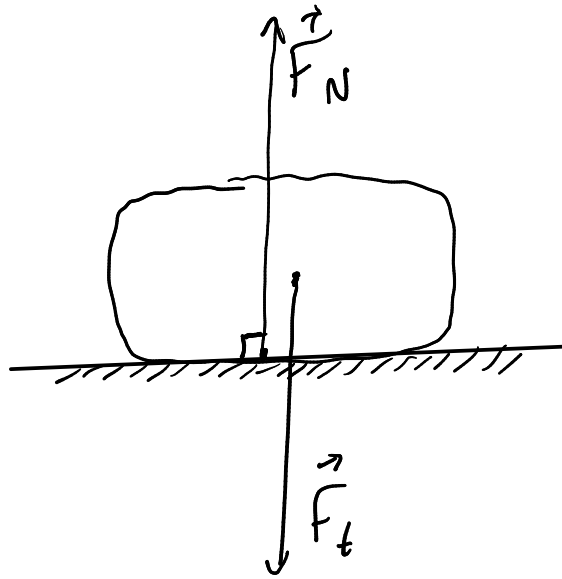
$\vec{g}$: campo gravitazionale
alla superficie della
terra

Osservazione: $\vec{F}_t = m\vec{g}$ sembra simile
a $\vec{F} = m\vec{a}$ ma è tutt'altra

$\vec{F}_t = m\vec{g}$ è un caso particolare della
legge di gravitazione universale

Forza normale

(reazione vincolante)



Caso particolare di forza di contatto:

spinta da una superficie.

forza normale: perpendicolare alla superficie

$$\vec{F}_t + \vec{F}_N = m\vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_N = -\vec{F}_t$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2^a \text{ legge}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\text{vincolo}}$

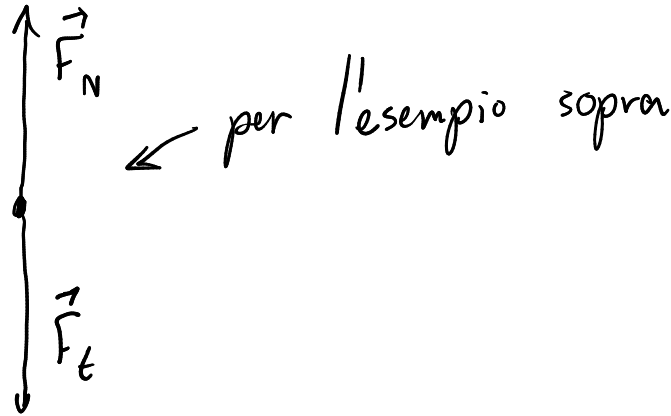
Osservazione: una forza
ha sempre un punto di
applicazione (la coda
del vettore)



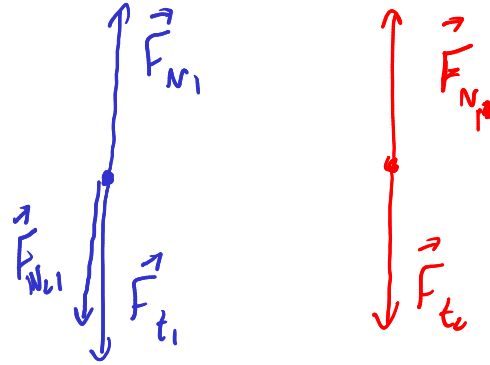
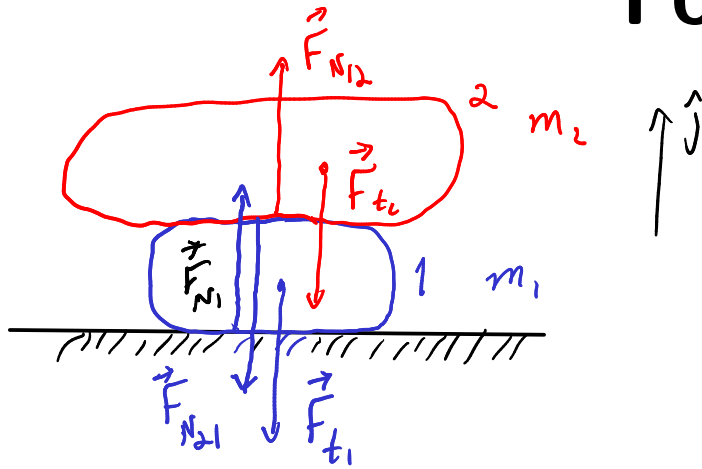
~~Forza normale~~

Diagramma di corpo libero

- * ogni corpo rappresentato da un punto
- * comporta solo le forze che sono applicate sul corpo



Forza normale



Peso:

$$\vec{F}_{t1} = m_1 \vec{g} = -m_1 g \hat{j}$$

$$\vec{F}_{t2} = m_2 \vec{g} = -m_2 g \hat{j}$$

2° legge:

(*) $0 = m_1 \vec{a}_1 = \sum \vec{F} = \vec{F}_{t1} + \vec{F}_{N21} + \vec{F}_{N1}$

(**) $0 = m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{t2} + \vec{F}_{N12}$

3° legge: $\vec{F}_{N12} = -\vec{F}_{N21}$ (***)

(**) $\vec{F}_{N12} = -\vec{F}_{t2} = m_2 g \hat{j}$

(***) $\vec{F}_{N21} = -m_2 g \hat{j}$

(*) $\vec{F}_{N1} = -\vec{F}_{t1} - \vec{F}_{N21} = m_1 g \hat{j} + m_2 g \hat{j} = (m_1 + m_2) g \hat{j}$

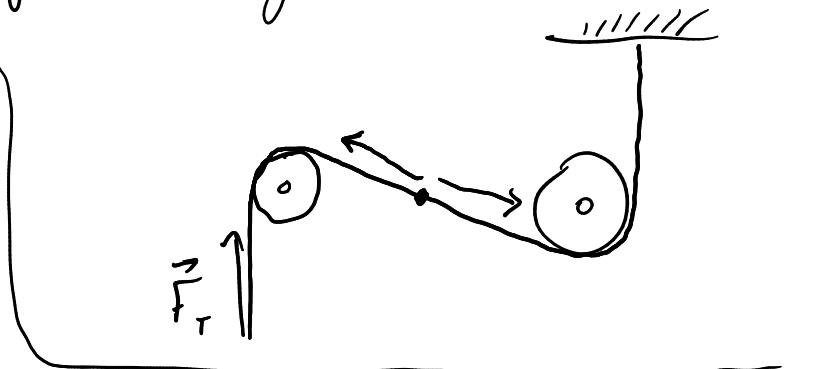
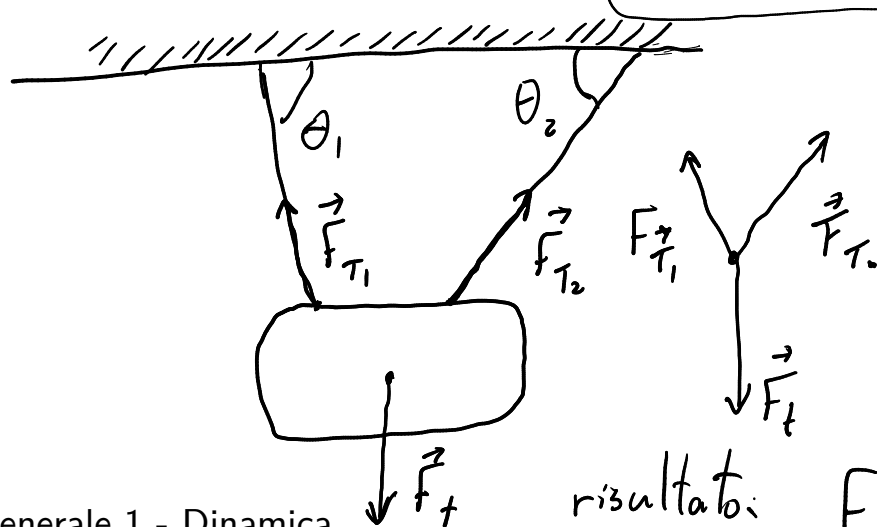
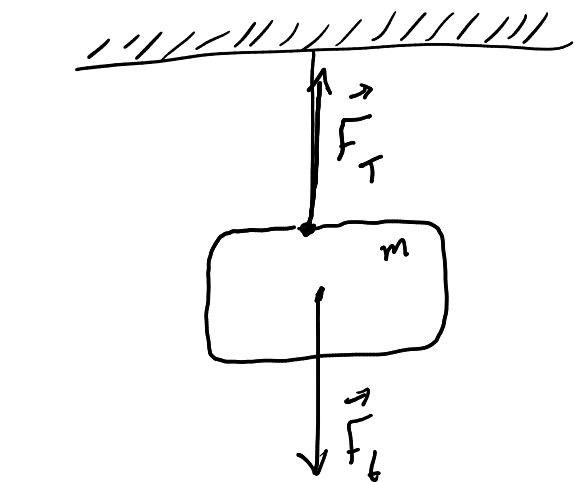
* la forza peso del corpo 2 si applica solo sul corpo 2. L'effetto del peso del corpo 2 è trasmesso attraverso la forza di contatto (normale) tra i corpi.

Tensione

forza esercitata da una fune, un cavo,
una corda, un filo, ...

* $\vec{F}_T$ è sempre parallela alla corda

* $|F_T|$ è uguale lungo tutta la corda



2a legge: $\sum \vec{F} = 0 = \vec{F}_t + \vec{F}_{T_1} + \vec{F}_{T_2}$

$$F_{T_2} = \frac{mg}{\cos \theta_2 (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)} \quad F_{T_1} = \frac{mg}{\cos \theta_1 (\tan \theta_1 + \tan \theta_2)}$$

Strategie per la risoluzione di problemi

1. Visualizza

- Crea un'immagine mentale del problema
- Identifica i concetti che possono esser utili
- Reformula la domanda nelle tue proprie parole, ed in termini che possono essere calcolati.

2. Descrivi

- Fai diagrammi, incluso diagrammi di corpi liberi.
- Scegli un sistema di coordinate che ti sembra appropriato
- Nomina le quantità che sembrano importanti nel problema
- Identifica le quantità da trovare per dare la soluzione al problema.

Strategie per la risoluzione di problemi

3. Fai un piano

- Trasferisci i concetti in forma matematica
- Puoi partire dalla soluzione e lavorare in retromarcia, oppure partire da quello che sai verso quello che cerchi.

4. Esegui il piano

- Risolvi i sistemi di equazioni
- Verifica le unità
- Se hai valori numerici, ora è il tempo di sostituirli.

Strategie per la risoluzione di problemi

5. Valuta la soluzione

- La soluzione risponde alla domanda fatta?
- Se puoi, valida il risultato testando casi limite
- Il risultato è ragionevole?
- Il risultato è completo?

6. Cambia piano se necessario

- Altra strategia?
- Altro sistema di coordinate o di riferimento?

Strategie per la risoluzione di problemi

1. Visualizza

2. Descrivi

3. Fai un piano

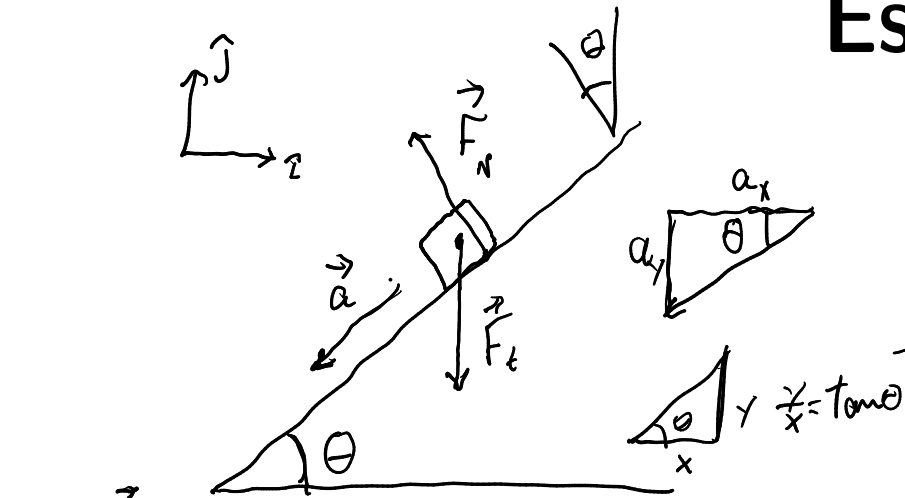
4. Esegui il piano

5. Valuta la soluzione

**6. Cambia il piano se
necessario**

Esempi

- 1) Qual è l'accelerazione del corpo?
- 2) Qual è il modulo della forza normale?



$$\vec{F}_N = F_{Nx} \hat{i} + F_{Ny} \hat{j}$$

2^a legge: $m\vec{a} = \vec{F}_N + \vec{F}_t$

$$m\vec{a} \cdot \hat{i} = ma_x = (\vec{F}_N + \vec{F}_t) \cdot \hat{i} = F_{Nx} + 0$$

$$F_{Nx} = ma_x$$

$$m\vec{a} \cdot \hat{j} = ma_y = (\vec{F}_N + \vec{F}_t) \cdot \hat{j} = F_{Ny} + -mg$$

$$ma_y = F_{Ny} - mg \quad **$$

$$F_{Nx} = -F_N \sin \theta \quad F_{Ny} = F_N \cos \theta$$

$$(*) \quad a_x = -\frac{F_N}{m} \sin \theta \quad (***) \quad a_y = \frac{F_N}{m} \cos \theta - g$$

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan \theta \rightarrow a_y \cos \theta = a_x \sin \theta \quad (****)$$

$$(*), (***) \rightarrow (****): \left(\frac{F_N}{m} \cos \theta - g \right) \cos \theta = \left(-\frac{F_N}{m} \sin \theta \right) \sin \theta$$

$$\frac{F_N}{m} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = g \cos \theta$$

$$\boxed{F_N = mg \cos \theta}$$

Esempi

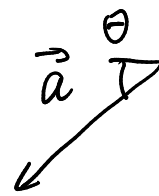
$$a_x = -g \sin \theta \cos \theta$$

$$a_y = g \cos^2 \theta - g = -g(1 - \cos^2 \theta) = -g \sin^2 \theta$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta}$$

$$= g \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$a = g \sin \theta$$



$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$= \underbrace{-a \cos \theta}_{\frac{a_y}{a_x} = \frac{\sin}{\cos} = \tan} \hat{i} - \underbrace{a \sin \theta}_{\frac{a_y}{a_x} = \frac{\sin}{\cos} = \tan} \hat{j}$$

2^a legge in questa base:

$$\hat{i}': ma = mg \sin \theta$$

$$\hat{j}' = 0 = F_N - mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow a = g \sin \theta$$

$$F_N = mg \cos \theta$$

Versione 2:



$$F_N = F_N \hat{j}'$$

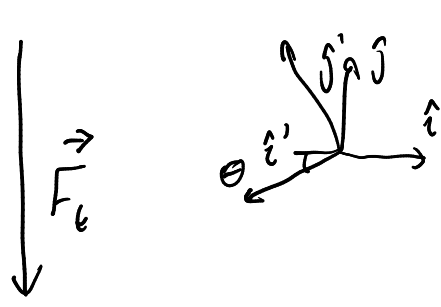
$$F_t = mg (\sin \theta \hat{i}' - \cos \theta \hat{j}')$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i}'$$

($a_x' = |\vec{a}| = a$ perché è così che abbiamo scelto $\hat{i}'$)



Esempio

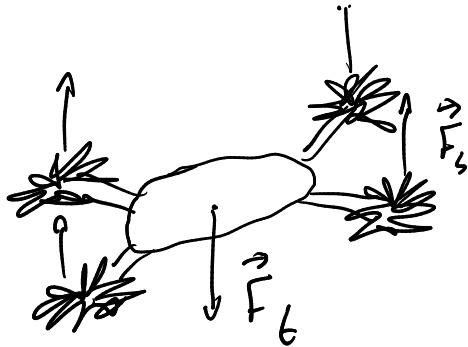


$$\vec{F}_t = -mg \hat{j}$$

$$\vec{F}_t \cdot \hat{i}' = -mg \hat{j} \cdot \hat{i}' = -mg \cos(90 + \theta) = mg \sin \theta$$

$$\vec{F}_t \cdot \hat{j}' = -mg \hat{j} \cdot \hat{j}' = -mg \cos \theta$$

Quale deve essere la spinta prodotta da ciascuna elica di un quadricottero per mantenerlo in aria?



$$m \vec{a} = 0 = \sum \vec{F} = \vec{F}_t + 4 \vec{F}_s$$

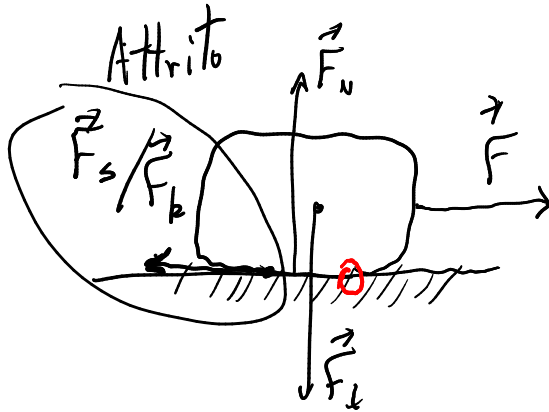
$$\Rightarrow \vec{F}_s = -\frac{1}{4} \vec{F}_t$$

Attrito

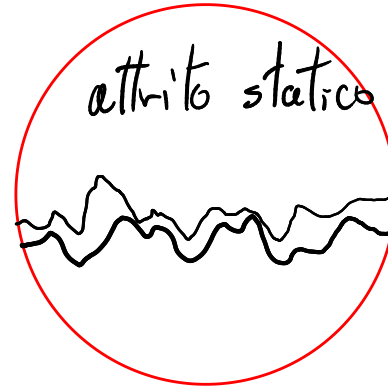
Ricorda: Forza normale:

- * perpendicolare alla superficie
- * modulo tale che il moto è vincolato
perp. alla superficie

Forza di attrito



- * parallela alla superficie
- * modulo $\begin{cases} \text{tale che il moto è vincolato} & \text{(statico)} \\ \text{proporzionale alla forza normale} & \text{(dinamico)} \end{cases}$



Attrito statico e cinetico

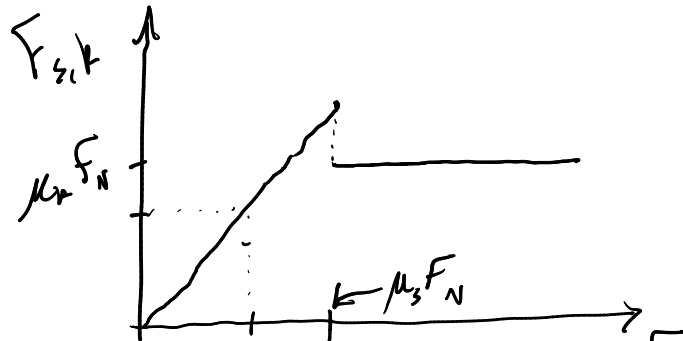
* Attrito dinamico: velocità relativa tra le superficie è non-zero
(dinamico)

kinetic
≡
dinamico

$$F_k = \mu_k F_N$$

μ_k : coefficiente di attrito dinamico
unità: senza unità

* Attrito statico: quando non c'è moto relativo tra le superficie



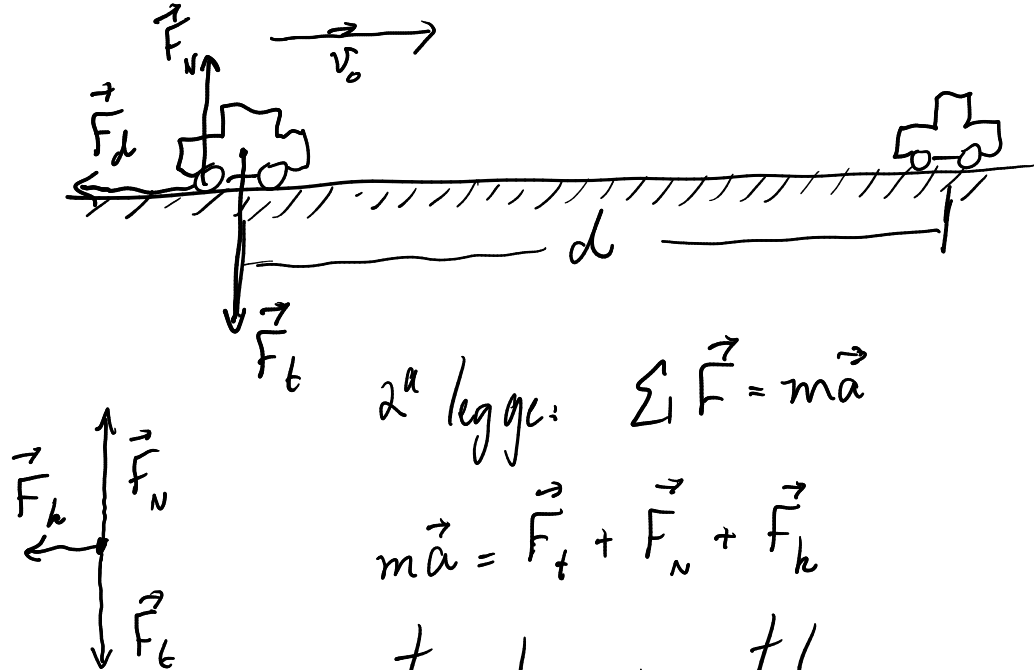
$$F_s \leq \mu_s F_N$$

in generale: $\mu_s \neq \mu_k$
sempre: $\mu_s > \mu_k$

$F \leftarrow$ forza esterna // superficie

Esempio 1

Una macchina richiede 40 m per fermarsi partendo da una velocità di 100 km/h (slittando sulla strada con le ruote ferme). Qual è il coefficiente di attrito cinetico?



2^a legge: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$m\vec{a} = \vec{F}_t + \vec{F}_N + \vec{F}_k$$

moto solo orizzontale

$$\Rightarrow F_N = F_t = mg$$

$$ma_x = -F_k = -\mu_k F_N = -\mu_k mg$$

$$\Rightarrow a_x = -\mu_k g$$

accelerazione costante!

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad X$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad \checkmark$$

$v = 0$ alla fine del moto, $x - x_0 = d$

$$-v_0^2 = -2\mu_k g d$$

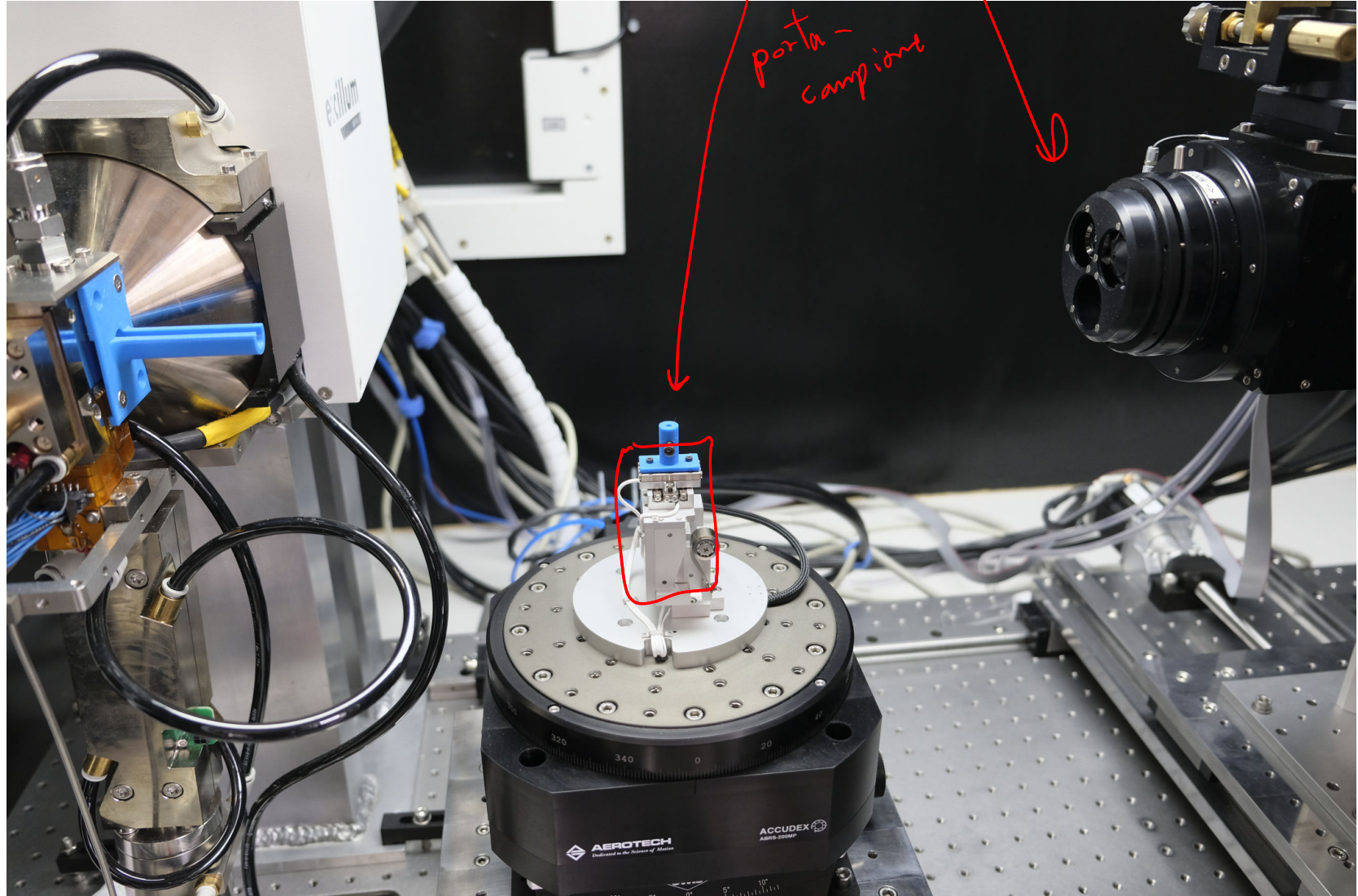
$$\Rightarrow \mu_k = \frac{v_0^2}{2dg} = 0,56$$

Esempio 2

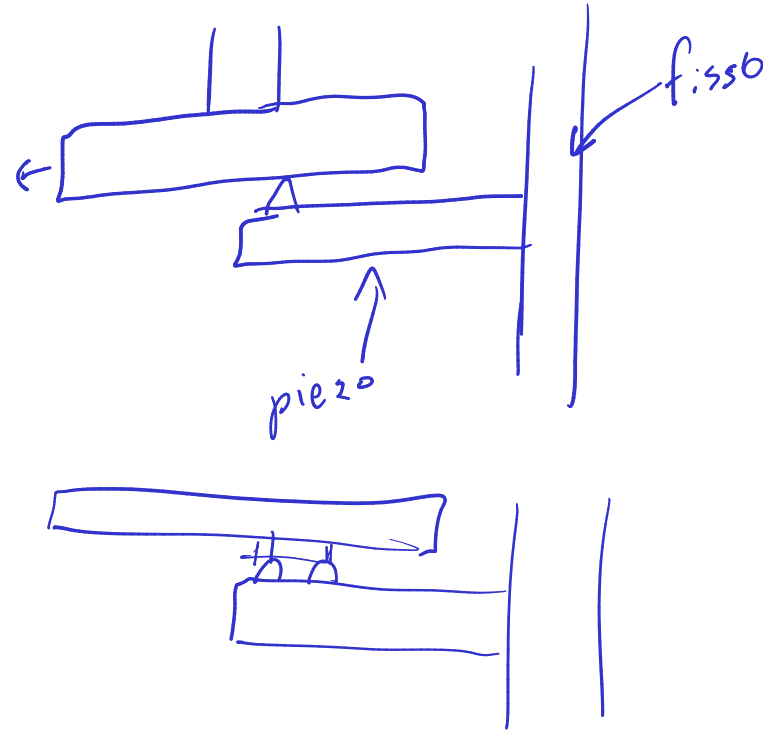
sorgente raggi x

rivelatore

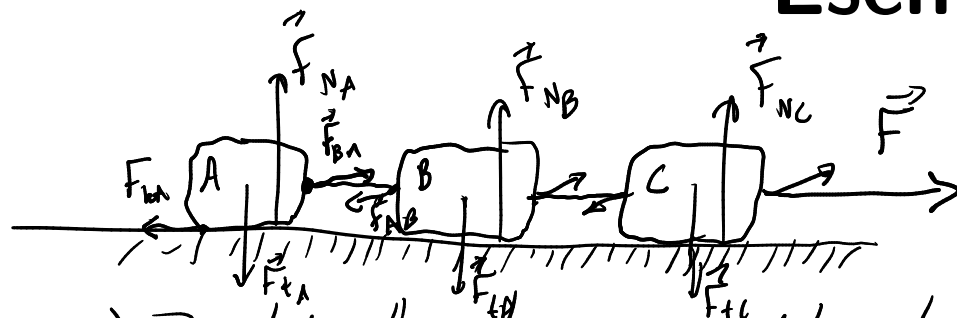
porta-campione



Esempio 2



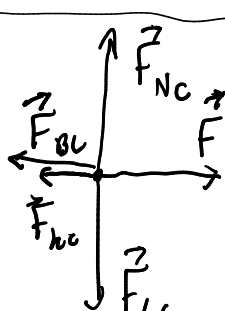
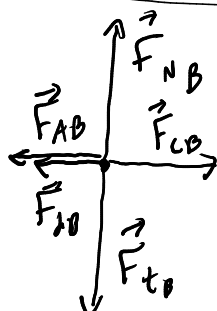
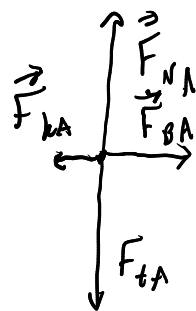
Esempio 2



$$m_A = 30 \text{ kg} \quad m_B = 50 \text{ kg} \quad m_C = 20 \text{ kg}$$

$$F = 200 \text{ N} \quad \mu_k = 0,1$$

a) Qual è l'accelerazione del sistema? b) tensione delle corde A-B e B-C?



3^a legge: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$
 $\vec{F}_{CB} = -\vec{F}_{BC}$

2^a legge: A) $m_A \vec{a}_A = \vec{F}_{NA} + \vec{F}_{tA} + \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{kA}$

B) $m_B \vec{a}_B = \vec{F}_{NB} + \vec{F}_{tB} + \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} + \vec{F}_{kB}$

C) $m_C \vec{a}_C = \vec{F}_{NC} + \vec{F}_{tC} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{kC} + \vec{F}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a}_C = \vec{a} = a \hat{i} + 0 \hat{j}$

$(m_A + m_B + m_C) \vec{a} = \vec{F}_{NA} + \vec{F}_{NB} + \vec{F}_{NC}$

(1) + (2) + (3)

(le tensioni si cancellano!)

$+ \vec{F}_{tA} + \vec{F}_{tB} + \vec{F}_{tC}$
 $+ \vec{F}_{kA} + \vec{F}_{kB} + \vec{F}_{kC}$
 $+ \vec{F}$ (4)

Esempio 2

dalla componente y di (1), (2) e (3)

$$F_{NA} = m_A g, \quad F_{NB} = m_B g, \quad F_{NC} = m_C g$$

componente x di (4)

$$\begin{aligned} (m_A + m_B + m_C)a &= F_{kAx} + F_{kBx} + F_{kCx} + F \\ &= -\mu_k m_A g - \mu_k m_B g - \mu_k m_C g + F \\ &= -(m_A + m_B + m_C)\mu_k g + F \end{aligned}$$

$$a = -\mu_k g + \frac{F}{m_A + m_B + m_C}$$

Esempio 2

Tensione:

(1) componente x:

$$m_A a = +F_{BA} - \mu_k m_A g$$

$$F_{BA} = m_A (a + \mu_k g)$$

$$= m_A \left[\frac{F}{m_A + m_B + m_C} - \cancel{\mu_k g} + \cancel{\mu_k g} \right]$$

$$F_{BA} = \left(\frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} \right) F$$

(3) componente x: $m_C a = -F_{BC} - \mu_k m_C g + F$

$$F_{BC} = -m_C (a + \mu_k g) + F = -m_C \frac{F}{m_A + m_B + m_C} + F \left(\frac{m_A + m_B + m_C}{m_A + m_B + m_C} \right)$$

$$= \frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C} F$$

5.31 La massa del blocco sospeso rappresentato nella Figura E5.7 è di 45 kg. Determinare la tensione di ciascuna delle corde.

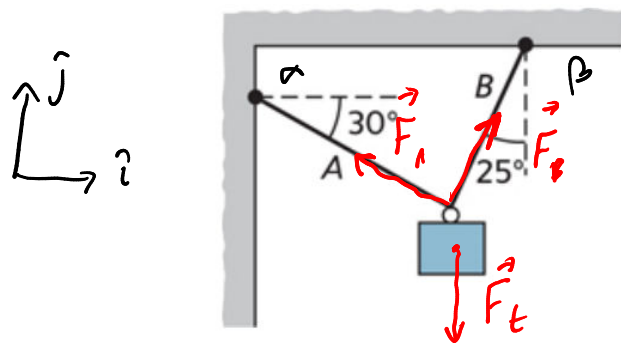
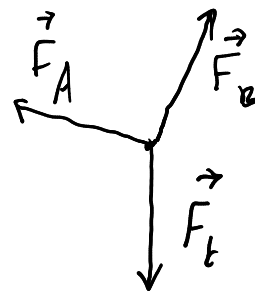


Figura E5.7 Esercizio 5.31.



2a legge:

$$m\vec{a} = 0 = \vec{F}_t + \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

componenti: $x: 0 = -F_A \cos \alpha + F_B \sin \beta \rightarrow F_A = F_B \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$

$y: 0 = -mg + F_A \sin \alpha + F_B \cos \beta$

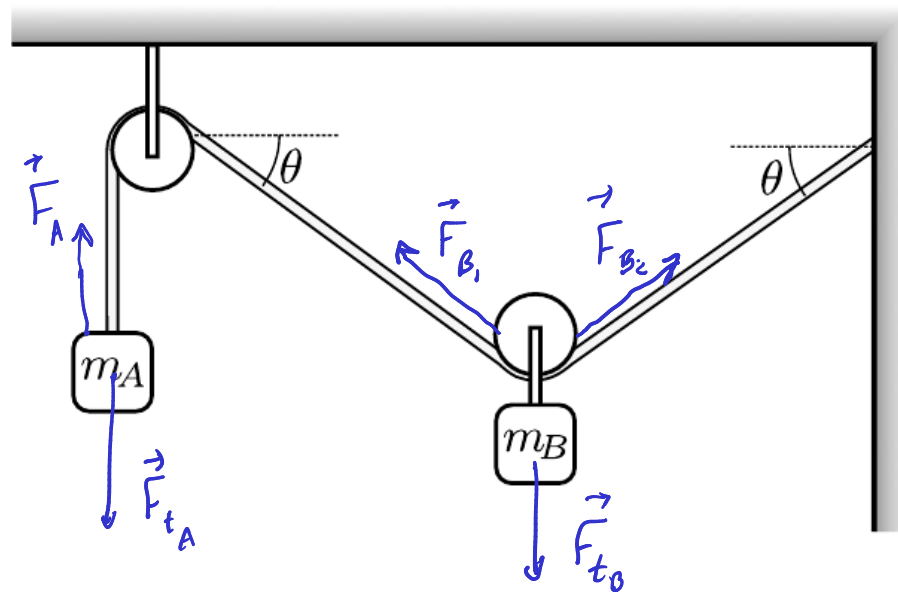
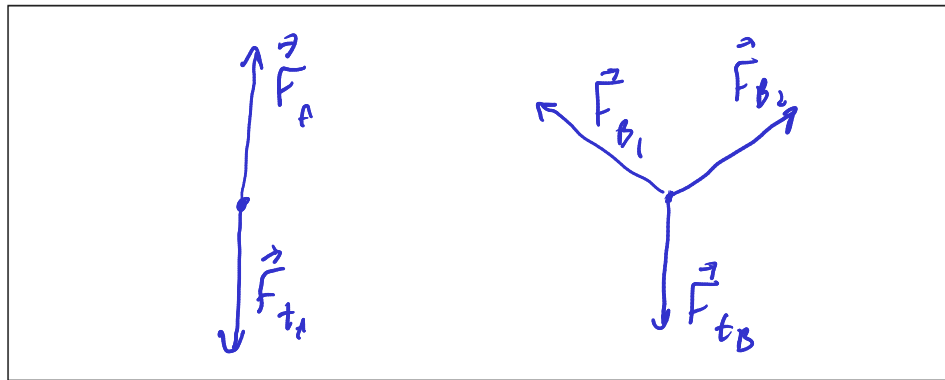
$$mg = \left(F_B \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \right) \sin \alpha + F_B \cos \beta = F_B (\sin \beta \tan \alpha + \cos \beta)$$

$$F_B = \frac{mg}{(\sin \beta \tan \alpha + \cos \beta)} = 380 \text{ N}$$

$$F_A = 190 \text{ N}$$

6. Il disegno illustra un sistema di due blocchi e pulegge in equilibrio. La fune e le pulegge hanno una massa trascurabile, e non c'è attrito.

- [4] (a) Disegnare il diagramma a corpi liberi per entrambi i blocchi.



- (b) Trovare l'angolo θ . (L'espressione dipenderà solo delle masse m_A e m_B)

Corpo A:

$$m\vec{a}_A = 0 = \vec{F}_A + \vec{F}_{tA} = (F_A - m_A g)\hat{j}$$

$$\Rightarrow F_A = m_A g$$

Corpo B: componenti x: $F_{B1} = F_{B2}$ (moduli!)

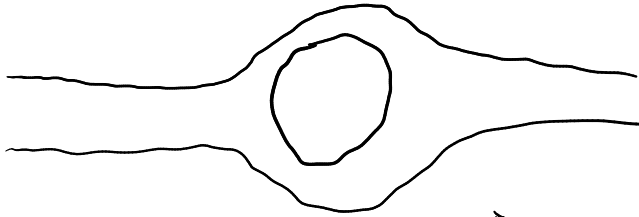
componente y: $0 = -m_B g + F_{B1} \sin \theta + F_{B2} \sin \theta$

$$2F_B \sin \theta = m_B g$$

$$F_A = F_B \Rightarrow \sin \theta = \frac{m_B g}{2F_A} = \frac{m_B}{2m_A}$$

Attrito dovuto a un fluido (resistenza)

1) A velocità "bassa", densità "bassa"
⇒ flusso laminare



legge di Stoke: $\vec{F} = -b\vec{v}$
coefficiente $\uparrow$

Commento: equazione utile ma
raramente applicabile

Più generale

$$F_v = \frac{1}{2} \rho A C_D v^2$$

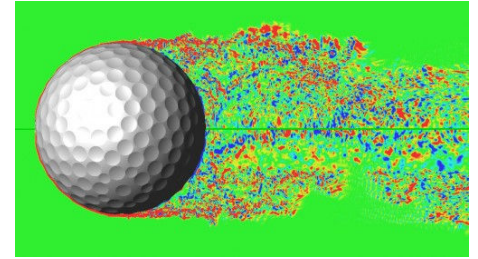
densità
del fluido

velocità

coefficiente di resistenza "Drag"

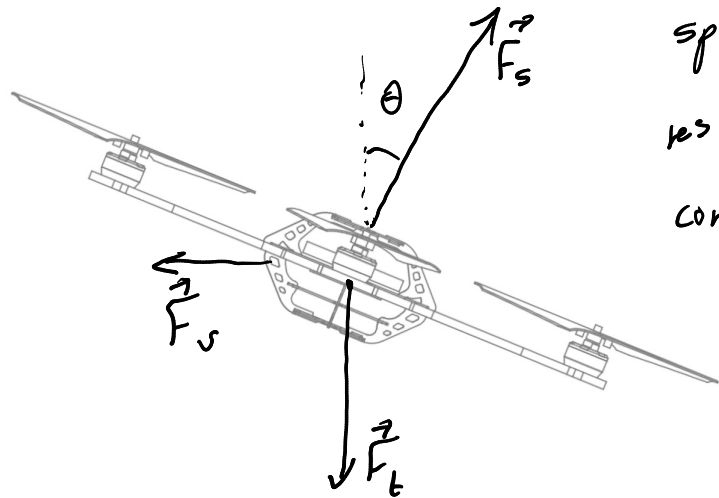
area di proiezione dell'oggetto

$$\left(\vec{F}_v = -F_v \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{1}{2} \rho A C_D v \vec{v} \right)$$

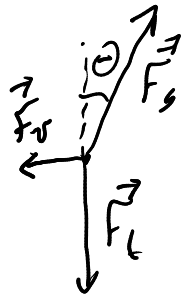


Fonte: <https://seed.golf/2017/02/10/golf-ball-dimple-configuration/>

Attrito dovuto a un fluido (resistenza)



spinta: "thrust"
resistenza: "drag"
contro il peso "lift"



$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F}_s + \vec{F}_v + \vec{F}_l = 0$$

(equilibrio)

$$y: -mg + F_s \cos \theta = 0$$

$$x: -bv + F_s \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{bv}{mg}$$



$$\text{All'equilibrio: } \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F}_t + \vec{F}_v = 0$$

$$mg = \frac{1}{2} \rho A C_D v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A C_D}}$$

es. g.
 $m = 70 \text{ kg}$

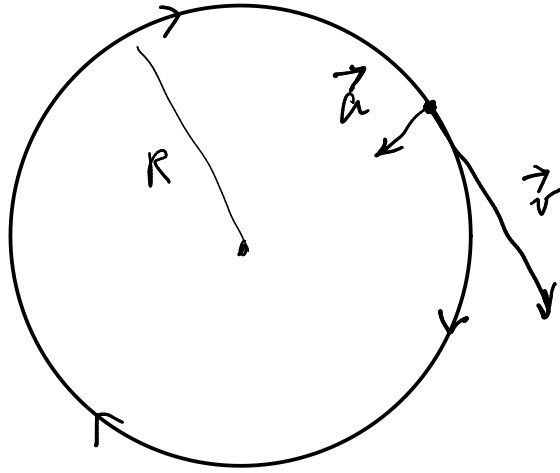
$C_D = 0,8$

$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$

$A = 0,5 \text{ m}^2$

$v = 55 \text{ m/s}$

Dinamica del moto circolare



Gia visto: $a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

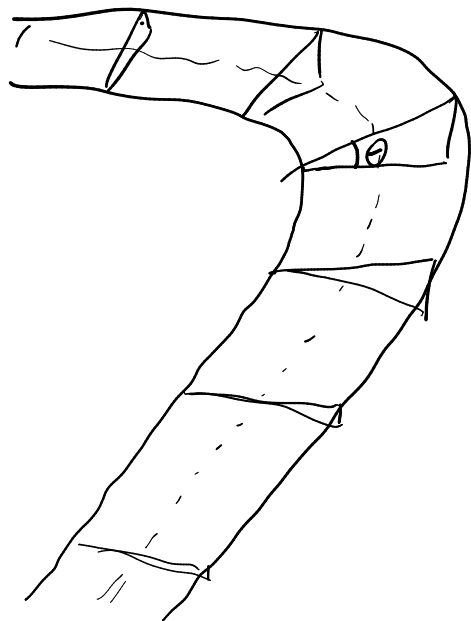
Forza necessaria per mantenere il moto circolare:

forza centripeta

$$F_c = \frac{mv^2}{R} \quad (\text{orientata verso il centro})$$

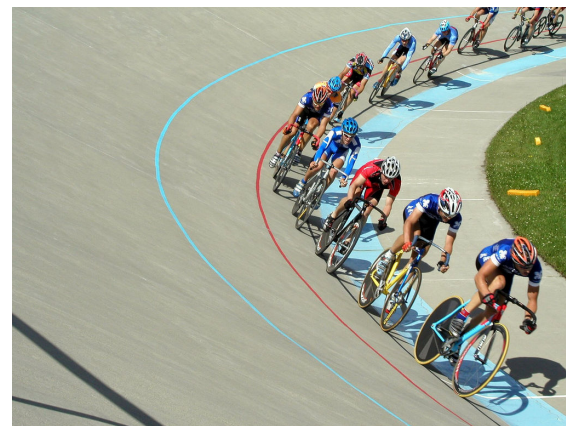
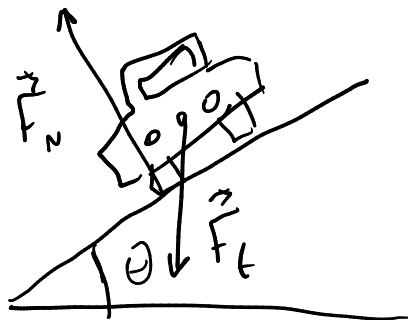
~~La~~ Forza centripeta: descrizione della direzione e verso della forza, non della natura della forza

Dinamica del moto circolare



(senza attrito)

θ scelto in modo tale
che la componente orizzontale
della forza normale fornisce
l'accelerazione centripeta



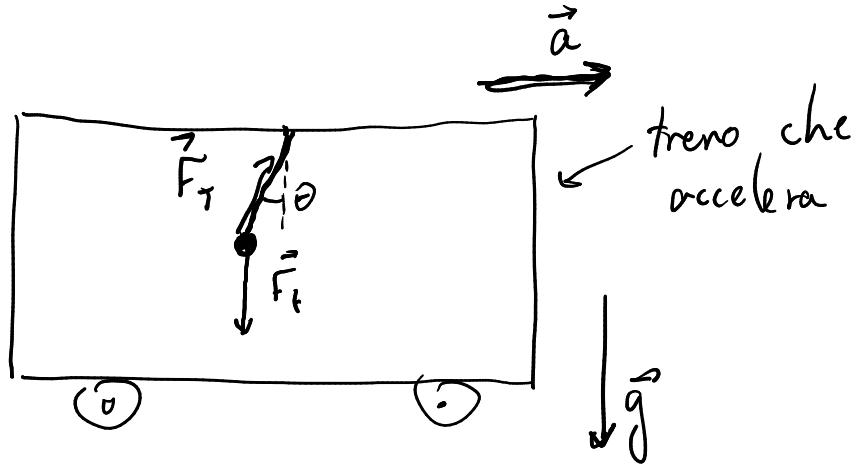
Componente orizzontale:

$$F_N \sin \theta = \frac{mv^2}{R}$$

verticale: $F_N \cos \theta = mg$

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Sistemi non-inerziali

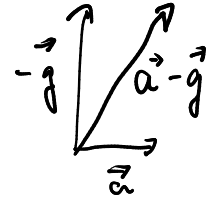


visto da fuori (sistema inerziale)

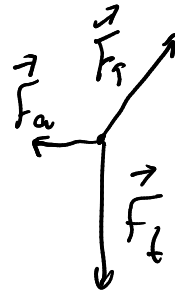
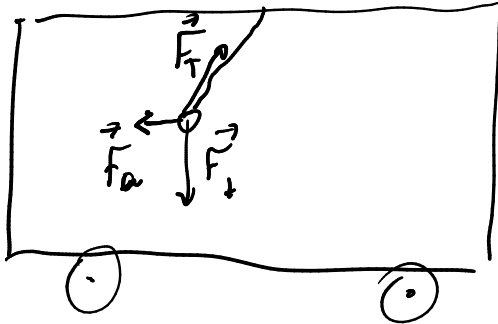
$$\vec{F}_T + \vec{F}_t = m\vec{a} \quad (*)$$

$$\vec{F}_T = m(\vec{a} - \vec{g})$$

possiamo
calcolare $\theta, |\vec{F}_T|$



visto da dentro il treno

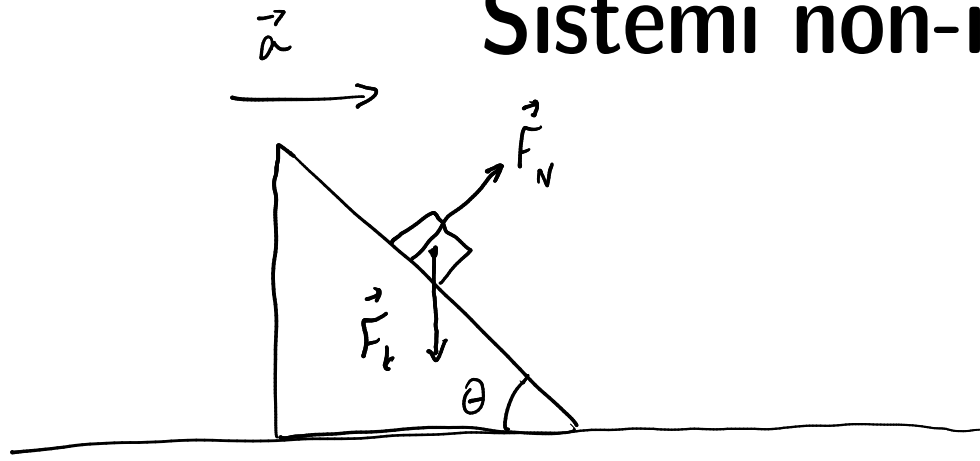


$$\vec{F}_T + \vec{F}_t + \underbrace{\vec{F}_a}_{-m\vec{a}} = 0 \quad (**)$$

$$\vec{F}_a = -m\vec{a}$$

↑ accelerazioni
del sistema

Sistemi non-inerziali



(senza attrito)

quale deve essere $\vec{a}$ per mantenere la posizione del blocco costante relativa al cuneo?

Nel sistema non-inerziale che segue il cuneo, esiste una forza apparente $\vec{F}_a = -m\vec{a}$.

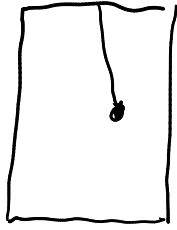
la condizione di equilibrio: $\sum \vec{F} = 0 = \vec{F}_t + \vec{F}_N + \vec{F}_a = 0$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{m} (\vec{F}_t + \vec{F}_N)$$

$$a \dots = g \tan \theta$$

Sistemi non-inerziali

Il periodo di un pendolo di lunghezza l è $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$



pendolo dentro un ascensore che accelera con accelerazione $\vec{a} = a_y \hat{j}$

Nel sistema non-inerziale dell'ascensore:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_T + \vec{F}_g + \vec{F}_a = \vec{F}_T - mg\hat{j} - ma_y\hat{j}$$

forza di tensione $\nearrow$
 peso $\nearrow$
 forza apparente $\nearrow$

$$= \vec{F}_T - \underbrace{m(g + a_y)}_{\text{"peso" con campo gravitazionale } \vec{g} - \vec{a}} \hat{j}$$

$\Rightarrow$ il periodo diventa

$$T_a = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a_y}}$$

"peso" con campo gravitazionale $\vec{g} - \vec{a}$

Sistemi non-inerziali

Caso il più generale: il ^{moto del} sistema di riferimento non-inerziale
 è una combinazione traslazione + rotazione

A: inerziale

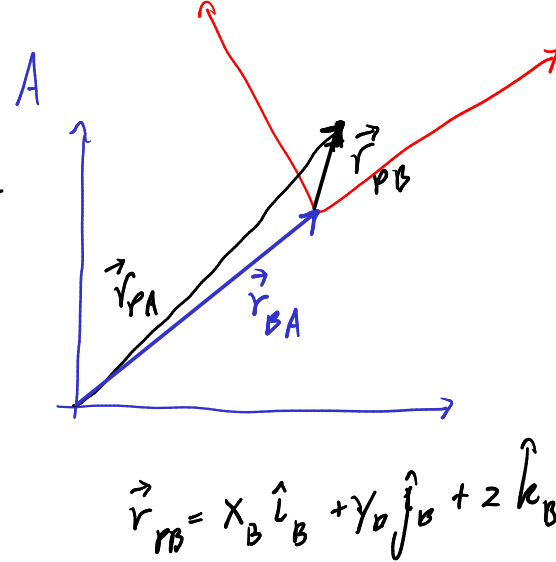
B: non-inerziale

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \leftarrow \text{vero come prima}$$

derivata rispetto a t:

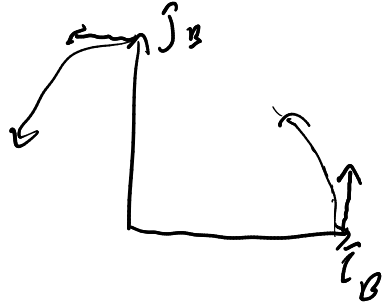
$$\vec{v}_{PA} = \frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{PA} &= \vec{v}_{BA} + \left\{ \frac{dx_B}{dt} \hat{i}_B + \frac{dy_B}{dt} \hat{j}_B + \frac{dz_B}{dt} \hat{k}_B + x_B \frac{d\hat{i}_B}{dt} + y_B \frac{d\hat{j}_B}{dt} + z_B \frac{d\hat{k}_B}{dt} \right\} \\ &= \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB} + [\text{rotazione}] \end{aligned}$$



Sistemi non-inerziali

Caso speciale: rotazione attorno asse z ($\hat{k}_B$ fisso)



$$\frac{d\hat{i}_B}{dt} \propto \hat{j}_B$$

$$\frac{d\hat{j}_B}{dt} \propto \hat{i}_B$$

$$\frac{d\hat{i}_B}{dt} = \omega \hat{j}_B$$

$$\frac{d\hat{j}_B}{dt} = -\omega \hat{i}_B$$

ω : velocità
angolare

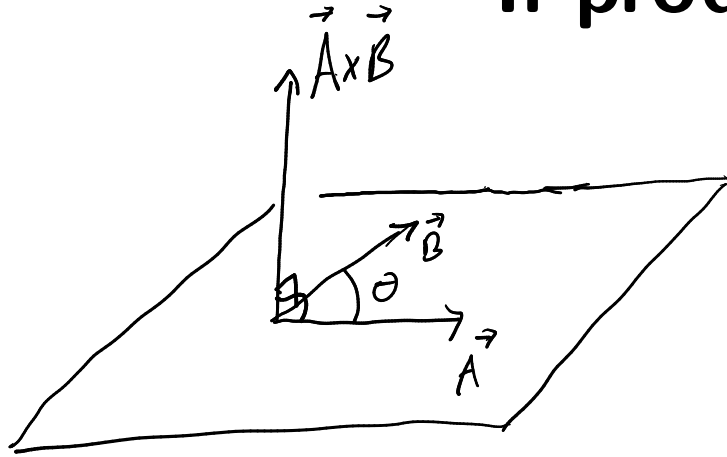
$$x_B \frac{d\hat{i}_B}{dt} + y_B \frac{d\hat{j}_B}{dt} + z_B \frac{d\hat{k}_B}{dt} = \begin{vmatrix} \hat{i}_B & \hat{j}_B & \hat{k}_B \\ 0 & 0 & \omega \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = \omega x_B \hat{j}_B - \omega y_B \hat{i}_B$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}$$

← prodotto
vettoriale!

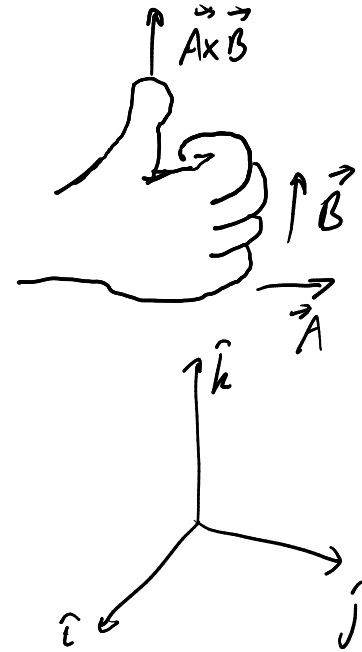
$$\Rightarrow \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}$$

Il prodotto vettoriale



$\vec{A} \times \vec{B}$: vettore perpendicolare a $\vec{A}$ e $\vec{B}$
ed: lunghezza $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$

verso: regola della mano destra



$$\star \vec{A} \perp \vec{B} : |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}|$$

$$\star \vec{A} \parallel \vec{B} : \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$$

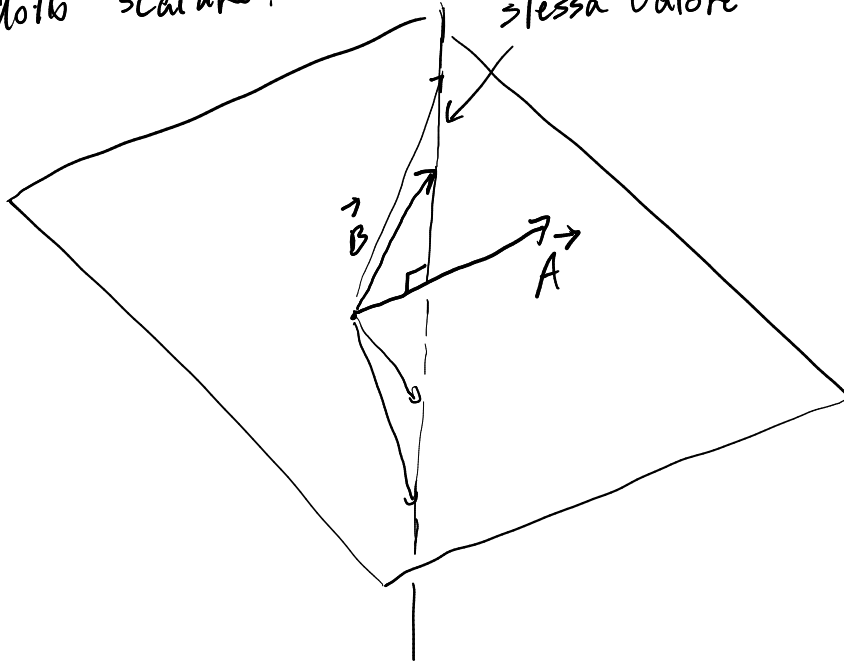
$$\star \vec{B} \times \vec{A} = -(\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\star \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

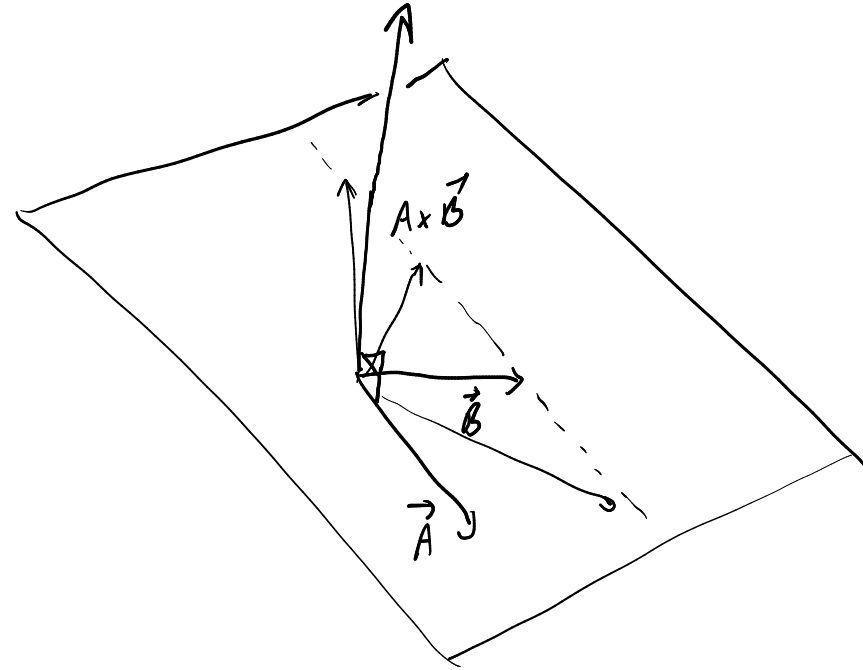
Il prodotto vettoriale

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Prodotto scalare: $\vec{B} \cdot \vec{A}$ ↖ stessa valore



Prodotto vettoriale



Esempio: ciclotrone

Forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

senza $\vec{E}$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

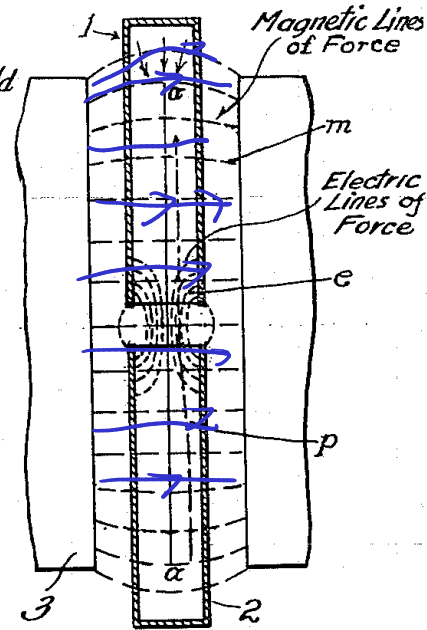
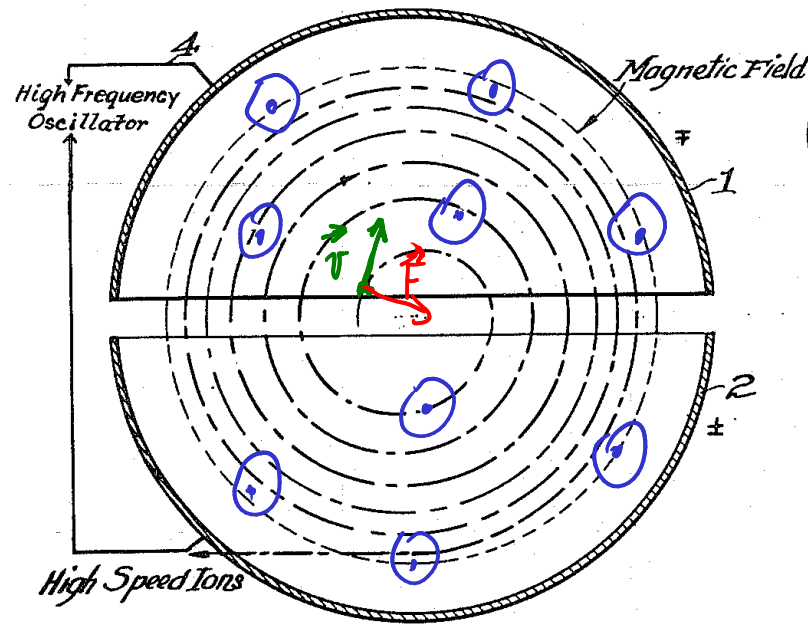
Forza centripeta!

$$m \frac{v^2}{R} = qvB$$

$$\hookrightarrow \frac{mv}{R} = qB \rightarrow m\omega = qB$$

frequenza ciclotronica

$$\hookrightarrow \omega = \frac{q}{m} B$$



Lawrence 1930 (Nobel 1939)

⊙ fuori della pagina
⊗ dentro



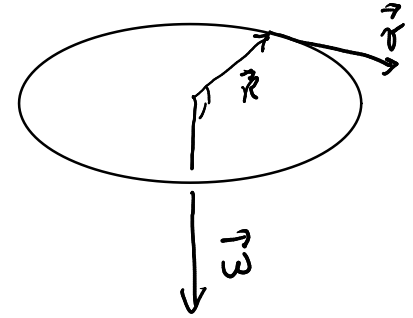
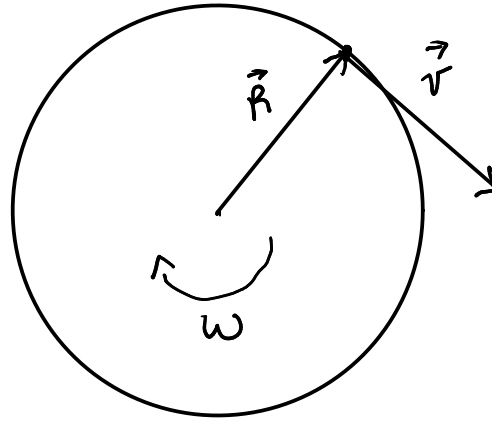
(pseudo-)forza di Coriolis

β : sistema rotatorio

Visto prima:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

(versione più generale di
 $v = \omega R$)

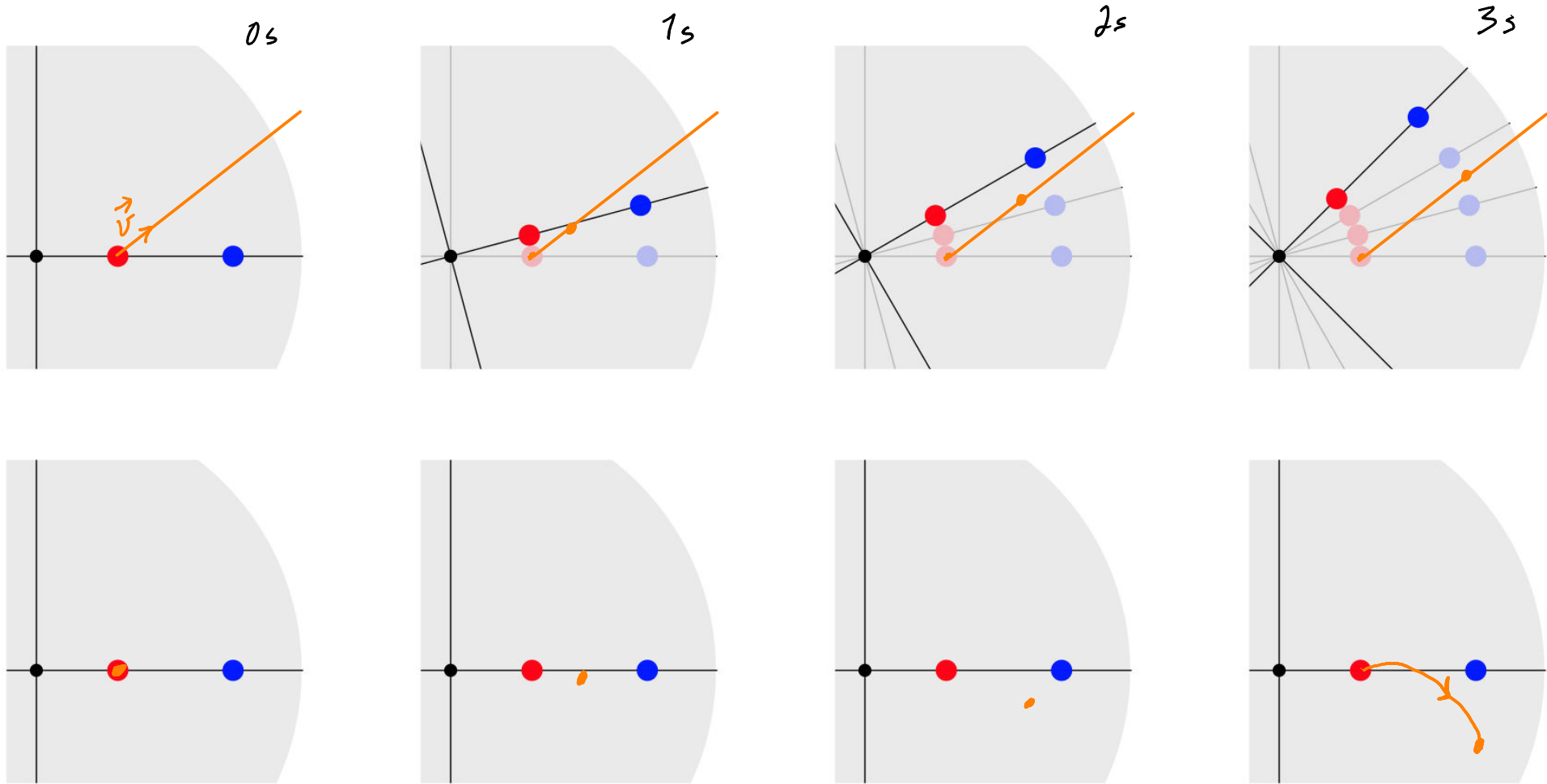


[facciamo $\frac{d}{dt} (\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB})$ ma troppo lungo
quindi solo risultato]

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{BA} + \vec{a}_c + \vec{a}_{\text{coriolis}}$$

* Accelerazione centripeta:
$$\begin{aligned} \vec{a}_c &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{v} \end{aligned}$$

(pseudo-)forza di Coriolis

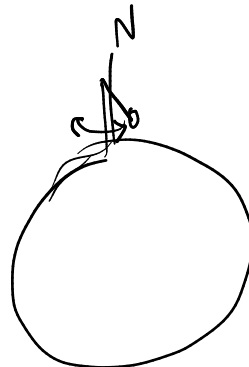
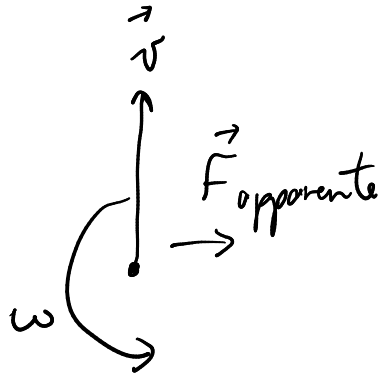


(pseudo-)forza di Coriolis

Forza apparente di Coriolis:

$$\vec{F} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}$$

↑
velocità del corpo



Dalla derivazione $\vec{v}_{PA}$ troviamo la regola $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times$

quindi

$$\begin{aligned} \vec{a}_{PA} &= \vec{a}_{BA} + \left(\frac{d}{dt} + \vec{\omega} \times \right) (\vec{v}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}) \\ &= \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{PB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{PB} \\ &\quad + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}) \end{aligned}$$

$$= \vec{a}_{BA} + \vec{a}_{PB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PB}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{PB}$$

↑
accelerazione del sistema

↑
accelerazione secondo il sistema B

↑
accelerazione centripeta

↑
accelerazione di Coriolis

(pseudo-)forza di Coriolis

Nell'emisfero nord, la forza di Coriolis è diretta verso la destra

