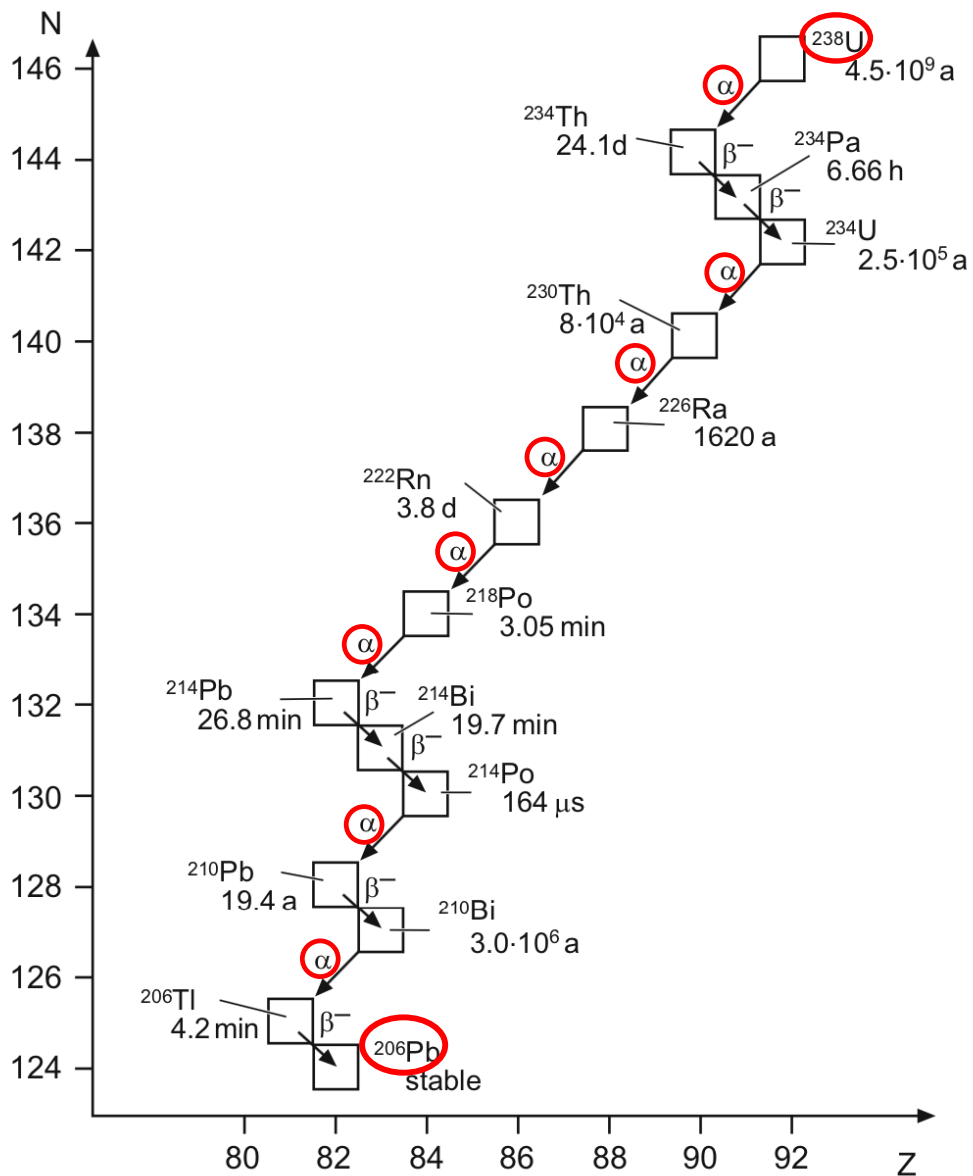


FISICA NUCLEARE (6)

Instabilità dei nuclei

- Decadimento radioattivo di più sostanze
- Equilibrio secolare
- Tecniche radioattive di datazione

Decadimento radioattivo di più sostanze



- **Sostanza radioattiva decade in un'altra radioattiva:** le due in relazione genetica, **genitore (G)** la prima, **figlia (F)** la seconda. Si può estendere a **molte generazioni**
- A $t = 0$, $N_1(0)$ e $N_2(0)$ atomi delle sostanze (1) e (2), in **relazione genetica**. Si vogliono trovare $N_1(t)$ ed $N_2(t)$

(1) decade come $dN_1 = -N_1\lambda_1 dt$

∀ (1) decaduto si forma un (2). N_2 varia per due ragioni:

- **diminuisce** per decadimenti spontanei di (2),
- **cresce** per formazione di (2), prodotti dal decadimento di (1)

Variazione totale:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

Per una terza sostanza analogamente:

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

e così via ...

Con k generazioni in cascata \Rightarrow sistema k eq. diff. risolvibile ponendo:

$$\begin{cases} N_1 = a_{11}e^{-\lambda_1 t} \\ N_2 = a_{21}e^{-\lambda_1 t} + a_{22}e^{-\lambda_2 t} \\ \dots \\ N_k = a_{k1}e^{-\lambda_1 t} + a_{k2}e^{-\lambda_2 t} + \dots + a_{kk}e^{-\lambda_k t} \end{cases}$$

a_{ij} da determinare per soddisfare cond. iniziali $N_i(0)$

Sostituendo \Rightarrow formula ricorrenza valida per $i \neq j$

$$a_{ij} = a_{i-1,j} \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_j)(\lambda_2 - \lambda_j) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_j)} a_{11}$$

Per coefficienti con indici uguali: $N_i(0) = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ik}$

Alcune cond. iniziali hanno importanza pratica

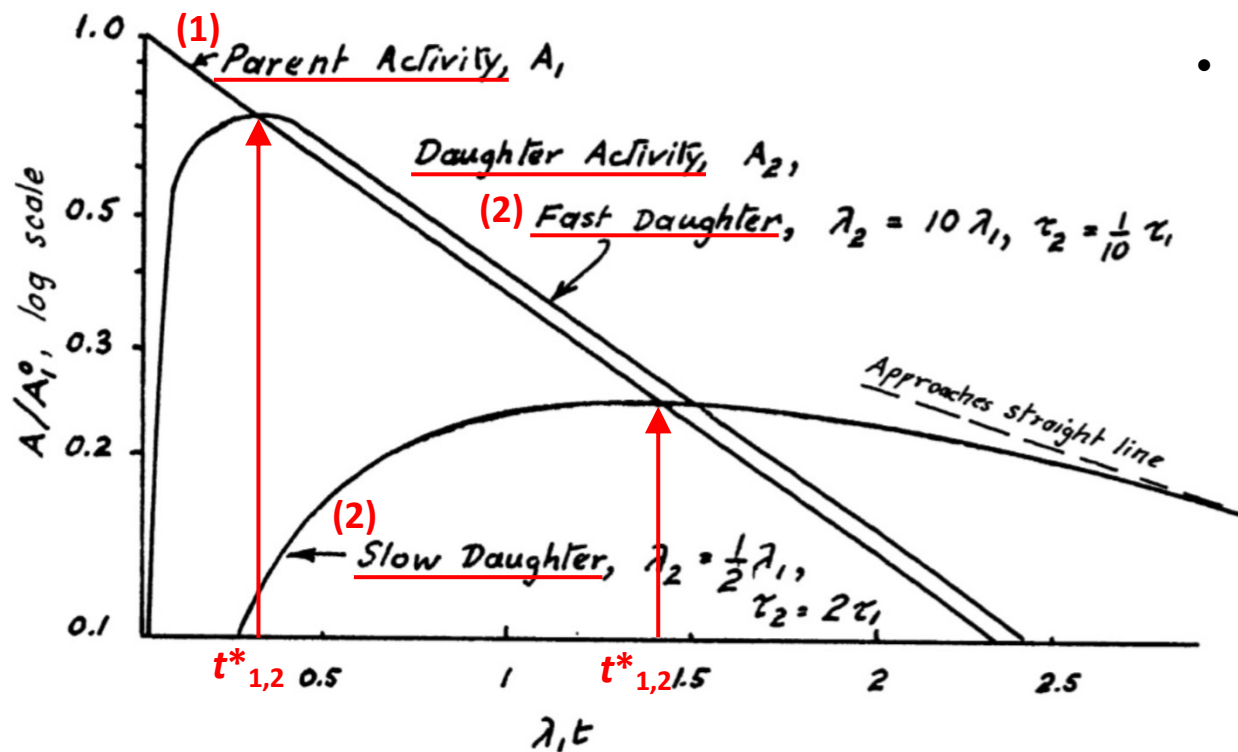
(*produzione di radioisotopi, ...*)

All'inizio la sola sostanza (1) con $N_1(0)$ atomi

Procedendo fino alla terza generazione \Rightarrow

(*Bateman equations for nuclear transmutations*)

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1(0)e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ N_3(t) = N_1(0) \lambda_1 \lambda_2 \left[\frac{e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right] \end{cases}$$



Problema:

- Si cerca $t^*_{1,2}$ in cui attività di **G (1)** e **F (2)** di una stessa catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t)$ combaciano

Ciò implica: $\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t)$ e sostituendo

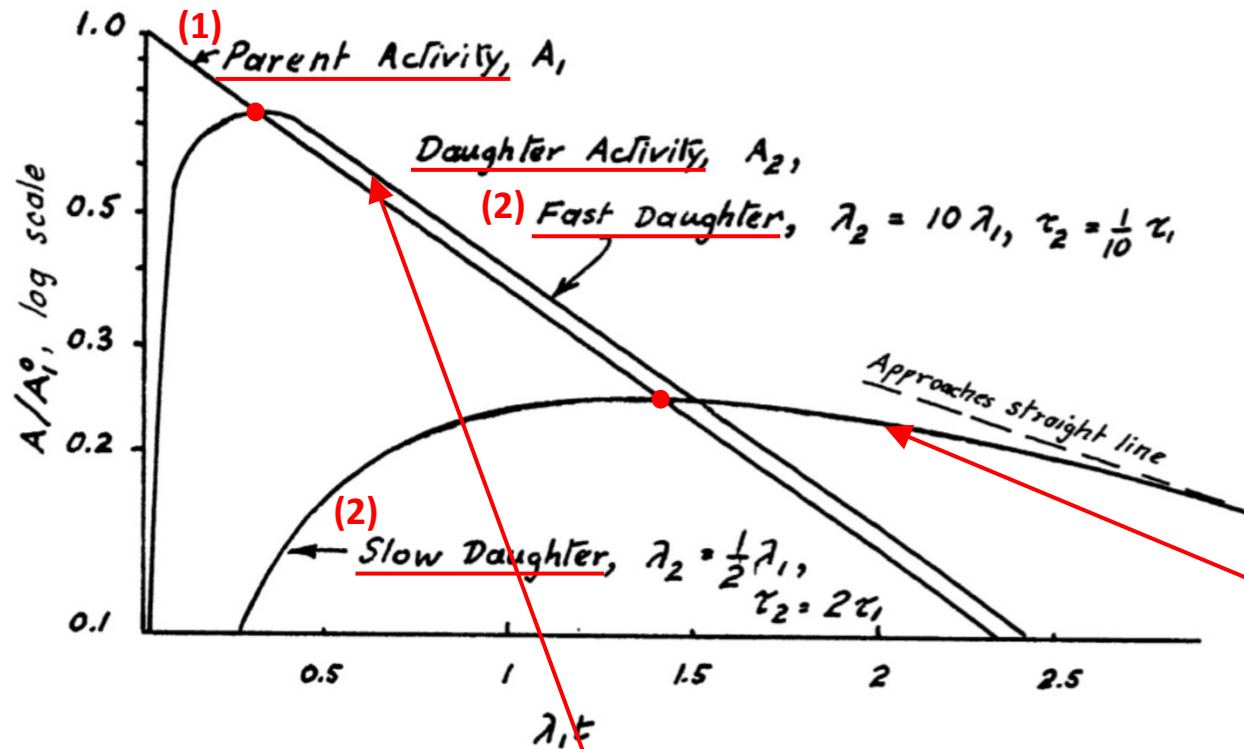
$$\lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t} = \lambda_2 N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$t^*_{1,2} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$$

che corrisponde a quando l'attività di **F** è massima

$$dN_2(t)/dt = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$$

Se all'inizio c'è sola sostanza **G**, **F** raggiunge massima attività quando coincide con quella di **G**, $t_{max} = t^*_{1,2}$



Catena radioattiva $N_1(t) \xrightarrow{\lambda_1} N_2(t) \xrightarrow{\lambda_2} N_3(t)$
 se **stabile** sostanza di terza generazione $\lambda_3 = 0$

$$N_3(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right)$$

Quattro casi notevoli:

1) $\lambda_1 > \lambda_2$, per $t \sim$ lungo ($t \gg 1/\lambda_1$) si trascura primo esp. in parentesi per $N_2(t)$, ottenendo

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$$

In tal caso, per $t > t_{max}$, sostanza **F(2)** procede decadendo \sim secondo propria costante λ_2

2) $\lambda_1 < \lambda_2$, dopo $t \sim$ lungo ($t \gg 1/\lambda_2$) quindi $t > t_{max}$, si trascura secondo esp. in parentesi per $N_2(t)$

$$N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \Rightarrow A_2(t) = \lambda_2 N_2(t) \cong \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_1(t)$$

In tal caso la sostanza **F(2)** procede decadendo \sim secondo costante λ_1 del **G**

3) $\lambda_1 \ll \lambda_2$, per $t > t_{max}$ si ha $A_2(t) \simeq A_1(t)$, con **equilibrio transiente** fra le attività di (1) e (2) e rapporto fra esse \sim costante: $A_2/A_1 \simeq \lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \simeq 1$

4) Se oltre a $\lambda_1 \ll \lambda_2$ si ha anche $\lambda_1 \simeq 0$, e si considerano tempi $1/\lambda_1 \gg t \gg 1/\lambda_2$, allora

$$\begin{cases} N_1(t) \cong N_1(0) \\ N_2(t) \cong N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{A}_1(t) \cong \mathcal{A}_1(0) \\ \mathcal{A}_2(t) \cong \mathcal{A}_1(0) (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{cases}$$

Quindi $A_1(t)$ piccola \sim cost. e $A_2(t)$ tende all'equilibrio per $t \gg 1/\lambda_2$, quando $e^{-\lambda_2 t} \rightarrow 0$ e $A_2(t) \rightarrow A_1(0)$, in regime di **quasi saturazione** (equilibrio)

Effettivo equilibrio richiederebbe $dN_1(t)/dt = 0$, che per una catena con k decadimenti successivi implica

$$\mathcal{A}_1(t) = \mathcal{A}_2(t) = \mathcal{A}_3(t) = \dots = \mathcal{A}_k(t) \quad \text{Equilibrio Secolare}$$

condizione asintotica approssimabile tanto meglio quanto più lentamente decade G rispetto a ogni F

- **Equilibrio secolare si applica solo a materiale contenente tutti i prodotti di decadimento del G , rimasto indisturbato abbastanza a lungo da conseguire condizione d'equilibrio**

- Equilibrio anche **producendo** G con rateo R uguale a rateo di decadimento $\lambda N(t)$

Si irraggia campione di nuclei stabili inducendo R trasmutazioni/s verso elemento che decade con cost. λ

Nuclei radioattivi $N(t)$ da bilanciamento fra R e $-\lambda N(t)$:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mathcal{R} - \lambda N(t)$$

che se $R = \text{cost.}$, si può riscrivere:

$$\frac{d[\mathcal{R} - \lambda N(t)]}{\mathcal{R} - \lambda N(t)} = -\lambda dt$$

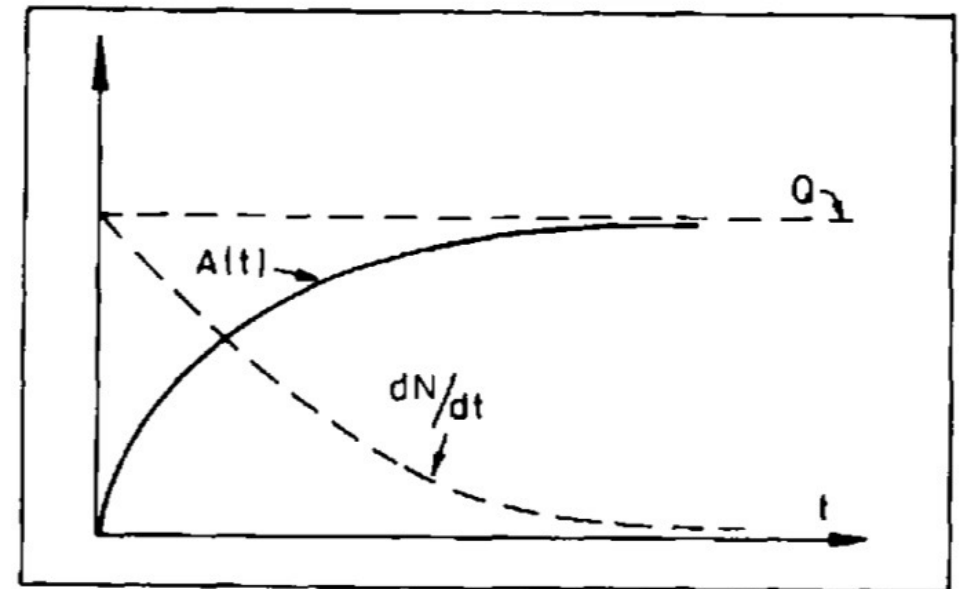
Integrando, con $N(0) = 0$:

$$\mathcal{R} - \lambda N(t) = [\mathcal{R} - \lambda N(0)] e^{-\lambda t} \Rightarrow N(t) = \frac{\mathcal{R}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \Rightarrow \mathcal{A}(t) = \lambda N(t) = \mathcal{R} (1 - e^{-\lambda t})$$

andamento a saturazione, tipico per **formazione e decadimento in competizione**

Se tempo irraggiamento piccolo rispetto $1/\lambda$, si espande fino al termine lineare in t , e $\mathcal{A}(t) \simeq R \lambda t \Rightarrow$ cresce a rateo $\sim \text{cost.}$

Per irraggiamenti brevi, accumulo \sim lineare nel tempo e poco intaccato dai decadimenti: **esempio di equilibrio secolare**



Tecniche radioattive di datazione

Datate reperti **inorganici** e **organici**

- **Età minerale si ricava dagli elementi radioattivi che contiene**

Roccia che alla formazione contiene ^{238}U , nel tempo accumula **elio** da decadimento di ^{238}U , un cui atomo, trasformandosi in ^{206}Pb stabile, emette **8 α** che se non sfuggono da roccia \Rightarrow datarla dal rapporto fra ^{238}U attuale ed **He** accumulato

- Si utilizzano anche i rapporti $^{206}\text{Pb}/^{207}\text{Pb}$, **K/Ar** e $^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$

G decade in **F**, si **contano G** e **F**, $N_G(t_1)$ e $N_F(t_1)$; se da t_0 ha agito solo decadimento e **se** $N_F(t_0) = 0$

$$N_G(t_0) = N_F(t_1) + N_G(t_1) \quad \Rightarrow \quad N_G(t_1) = N_G(t_0) e^{-\lambda(t_1-t_0)}$$

da cui

$$\Delta t \equiv t_1 - t_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{N_G(t_0)}{N_G(t_1)} \right] = \frac{1}{\lambda} \ln \left[1 + \frac{N_F(t_1)}{N_G(t_1)} \right]$$

Precisione dipende da quanto bene è nota λ e da statistica di conteggio per N_G e N_F

Raggi cosmici possono modificare rapporto N_F/N_G , rispetto ai soli decadimenti di **G**

- Se $N_F(t_0) \neq 0$ si cerca nel campione presenza di un diverso isotopo F' della specie F , stabile e non derivante dal decadimento di un G a lunga vita media

Se a t_0 sono già presenti $N_F(t_0)$ F , si ha

$$N_F(t_1) + N_G(t_1) = N_F(t_0) + N_G(t_0)$$

Sia $N_{F'} \neq 0$ la popolazione dell'isotopo F' , la cui stabilità implica $N_{F'}(t_1) = N_{F'}(t_0)$. Si può allora ...

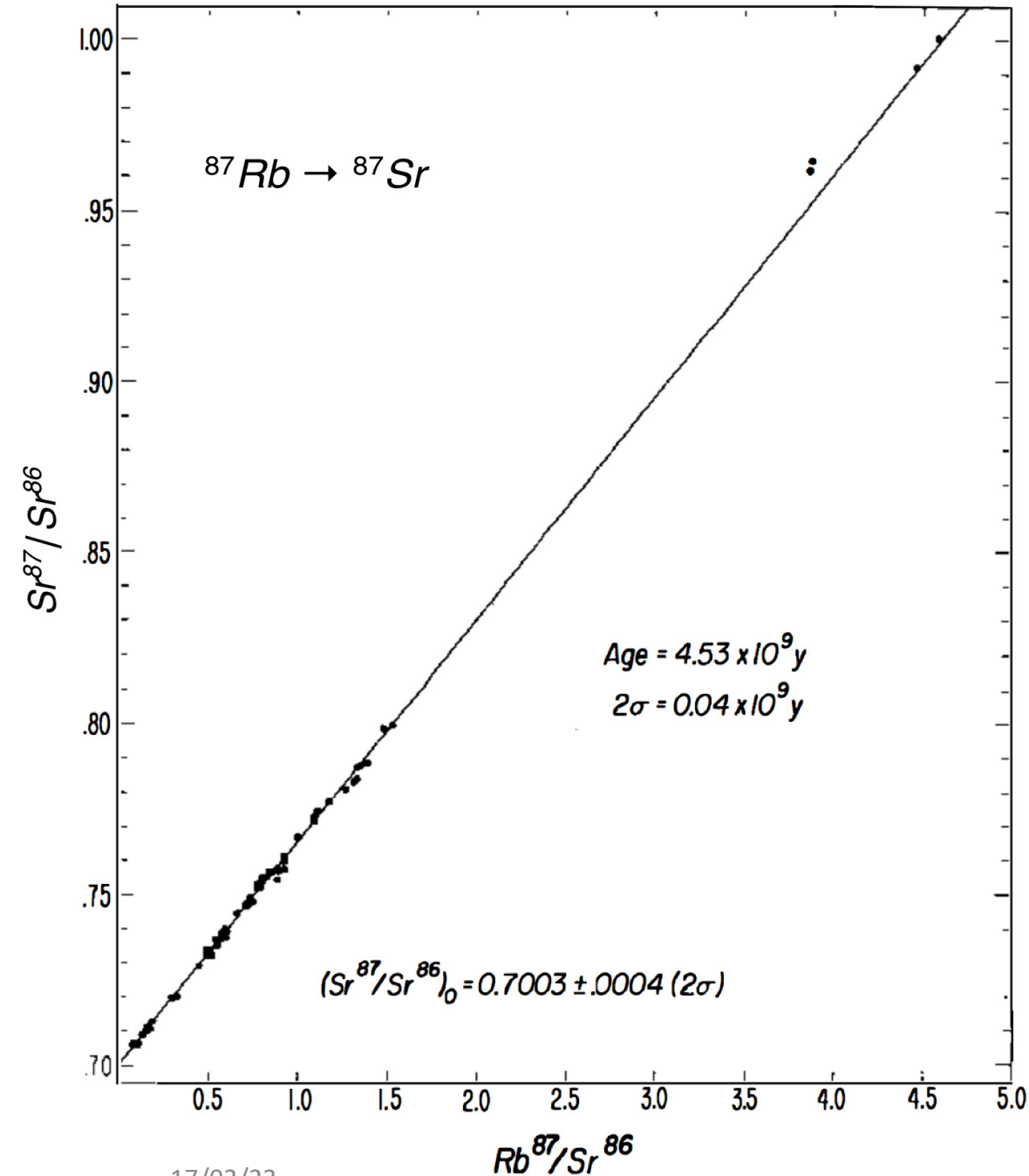
$$\frac{N_F(t_1) + N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_F(t_0) + N_G(t_0)}{N_{F'}(t_0)} \quad \text{che diventa}$$

Ipotesi per andamento
rettilineo ...

$$\frac{N_F(t_1)}{N_{F'}(t_1)} = \frac{N_G(t_1)}{N_{F'}(t_1)} \left[e^{\lambda(t_1-t_0)} - 1 \right] + \frac{N_F(t_0)}{N_{F'}(t_0)}$$

$N_F(t_1)/N_{F'}(t_1)$ e $N_G(t_1)/N_{F'}(t_1)$ misurabili in lab., ma resta incognito $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$

- **Minerali che cristallizzano con origine comune hanno uguali età e rapporti isotopici $N_F(t_0)/N_{F'}(t_0)$, anche se in essi $N_G(t_0)$ può essere molto diverso (... diversa composizione chimica)**



- Se è così ci sono minerali con diversi rapporti $N_{\text{F}}(t_1)/N_{\text{F}'}(t_1)$ e $N_{\text{G}}(t_1)/N_{\text{F}'}(t_1)$, corrispondenti a stessa coppia $(t_1 - t_0)$ e $N_{\text{F}}(t_0)/N_{\text{F}'}(t_0)$

Verificabile graficando $N_{\text{F}}(t_1)/N_{\text{F}'}(t_1) \% N_{\text{G}}(t_1)/N_{\text{F}'}(t_1)$

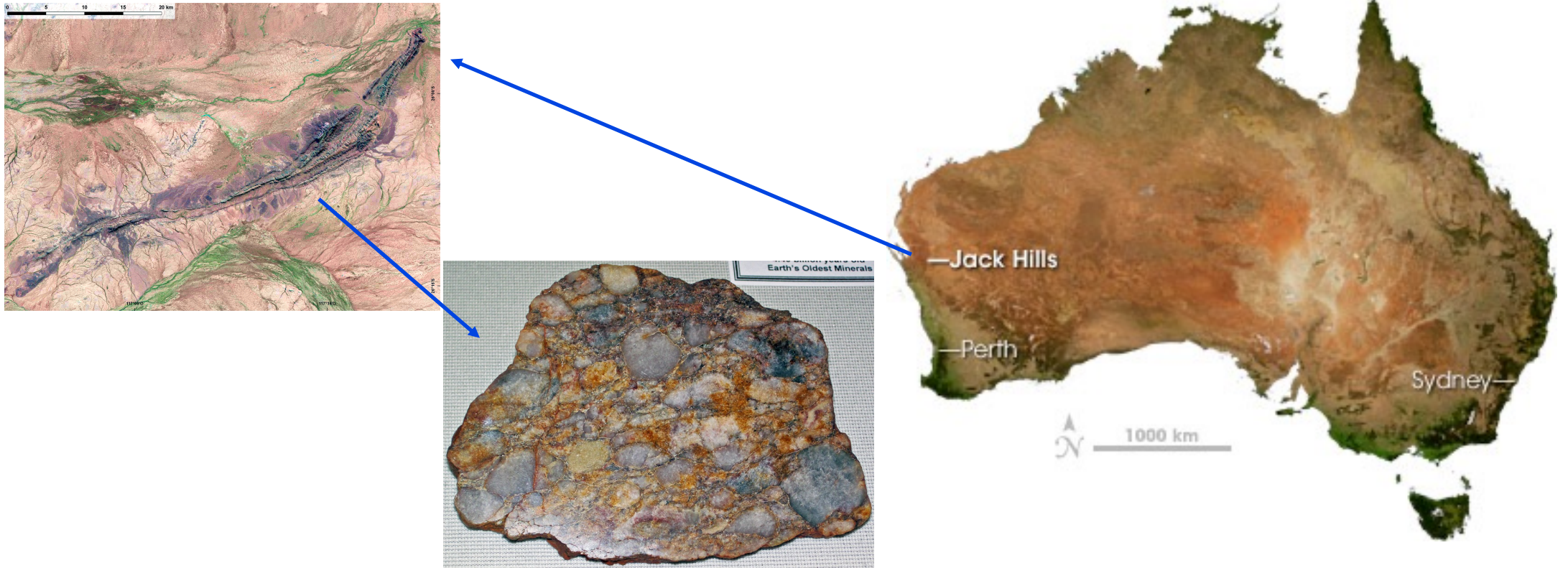
- Per molti minerali \Rightarrow dipendenza lineare fra rapporti, con pendenza $[e^{\lambda(t_1 - t_0)} - 1]$

e intercetta $N_{\text{F}}(t_0)/N_{\text{F}'}(t_0)$.

Esempio: $^{87}\text{Rb} \rightarrow ^{87}\text{Sr}$ ($T_{1/2} = 4.8 \times 10^{10}$ y), confrontato con isotopo stabile ^{86}Sr (in figura)

Buona linearità suffraga ipotesi che **non** vi siano state perdite di nuclei **G** o **F**

Rocce terrestri superficiali più vecchie datate con tali metodi hanno $\sim 4.4 \times 10^9$ y e sono costituite da granuli di zircone scoperti in Australia, nella regione di Jack Hills, nel 2013



Risultato, compatibile con età dei frammenti meteorici più antichi, suggerisce che la crosta terrestre si sia formata circa 100 milioni di anni dopo il gigantesco impatto che potrebbe aver dato origine alla Luna

Datazione di reperti organici

Organismo vivente assorbe CO_2 , con $^{12}\text{C} \sim 98.89\%$, $^{13}\text{C} \sim 1.10\%$, tracce di ^{14}C

- ^{14}C radioattivo, decade β^- in ^{14}N con $\tau = 8267 \text{ y}$, continuamente formato in alta atmosfera per cattura su ^{14}N dei n termici, prodotti secondari dei cosmici: $n + ^{14}\text{N} \rightarrow p + ^{14}\text{C}$
- Equilibrio fra produz. e decad., se stabili struttura chimica, densità media atmosfera, e flusso cosmici \Rightarrow resta costante nel tempo conc. ^{14}C in atmosfera
- ^{14}C prodotto con rateo $R(^{14}\text{C})$ e reagisce con O_2 dando $^{14}\text{CO}_2$, anche utilizzata dalle piante durante la fotosintesi clorofilliana

Da catena alimentare ^{14}C si trasferisce in ogni struttura vivente: $\sim 1.3 \text{ } ^{14}\text{C}$ ogni $10^{12} \text{ } ^{12}\text{C}$

Tutta la materia vivente è leggermente radioattiva

Se $R(^{14}\text{C})$ costante \Rightarrow materia organica in equilibrio con atmosfera per contenuto ^{14}C , e lo mantiene fino alla morte (*metabolismo*)

$$\frac{dN(^{14}\text{C})}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}(^{14}\text{C}) = \lambda(^{14}\text{C}) N(^{14}\text{C}) = \mathcal{A}(^{14}\text{C})$$

Alla morte s'interrompe equilibrio e ^{14}C nell'organismo inizia a decrescere **con legge del decadimento**

- **Età campione organico dalla morte dell'organismo**: si misura attività per grammo di carbonio (**attività specifica A_{sp}**), e la si confronta con quella del carbonio atmosferico **0.23 Bq/g** [13.8 disint./(g×min.)]

Se organismo muore a t_0 , e si misura a t_1 , l'età $\Delta t = (t_1 - t_0)$ del campione è ...

$$A_{sp}({}^{14}\text{C}, t_1) = A_{sp}({}^{14}\text{C}, t_0) e^{-\lambda(t_1 - t_0)} \quad \Rightarrow \quad \Delta t \equiv (t_1 - t_0) = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{A_{sp}({}^{14}\text{C}, t_0)}{A_{sp}({}^{14}\text{C}, t_1)}$$

Affidabile per tempi $\approx 7 \times \tau$, quindi con ${}^{14}\text{C}$ datazioni attendibili fino a tempi $\lesssim 6 \times 10^4 \text{ y}$

Meglio tecnica AMS (conta direttamente atomi di ${}^{14}\text{C}$ e di altri isotopi, presenti nel campione)

