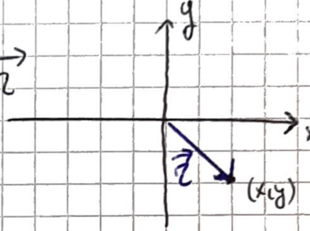
#2.1 DUE GRADIENTI

a) $f(x,y) = -x^2 - y^2$

$$= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\hat{j}$$

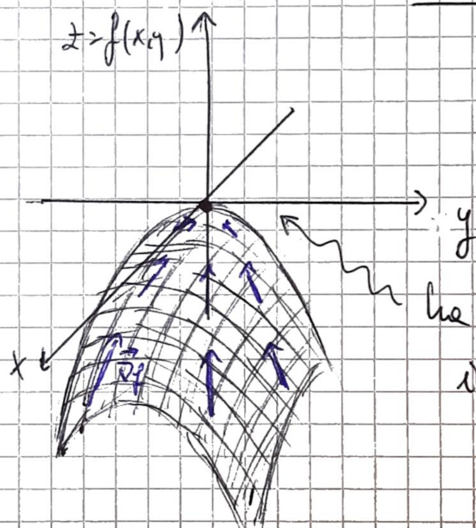
$$\text{grad } f(x,y) = \vec{\nabla} f(x,y) = (-2x)\hat{i} + (-2y)\hat{j}$$

Posso scrivere $\vec{\nabla} f(x,y) = -2(x\hat{i} + y\hat{j}) = -2\vec{r}$



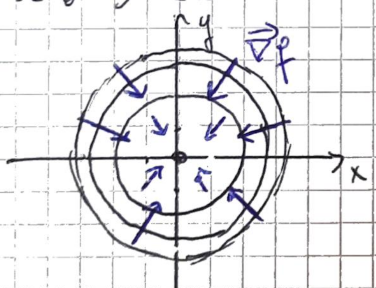
• Interpretazione:

- grafico di $f(x,y)$:



ha un massimo in $(0,0)$.

- curve di livello:



(Taglio il grafico con piani paralleli al piano xy: ogni curva rappresenta un valore della funzione: curve vicine a $(0,0)$ indicano valori più alti!)

$\Rightarrow \vec{\nabla} f \propto -\vec{r}$: punta verso l'origine e ha modulo più grande quando la funzione varia molto $\rightarrow$ direzione di massima pendenza!

b) $f(x,y) = -2\cos(xy^2) + 3\sin(x^2 y)$

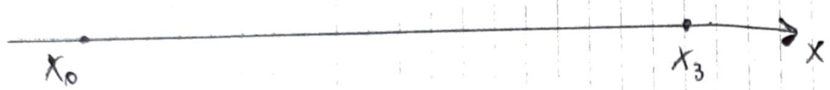
$$\frac{\partial f}{\partial x} = +2\sin(xy^2)\cdot y^2 + 3\cos(x^2 y)\cdot 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = +2\sin(xy^2)\cdot 2yx + 3\cos(x^2 y)\, x^2$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = \left(2y^2 \sin(xy)^2 + 6xy\cos(x^2 y)\right)\hat{i} + \left(4xy\sin(x^2 y) + 3x^2\cos(x^2 y)\right)\hat{j}$$

IN SCOOTER

2.2 Suddividiamo il percorso in 3 parti:



$x_0 \to$ posizione iniziale;

$x_1 \to$ posizione in cui cambia velocità;

$x_2 \to$ inizio del rallentamento;

$x_3 \to$ posizione finale.

$$\Delta_{TOT} = \Delta x_{01} + \Delta x_{12} + \Delta x_{23}$$

$$\Delta x_{01} = v_{01} \cdot \Delta t_{01} = 35\ Km/h \cdot 15\ min = 35 \cdot \frac{1000\ m}{3600\ s} \cdot 15 \cdot 60\ s = $$
$$\simeq 8700\ m$$

$$\Delta x_{12} = v_{12} \cdot \Delta t_{12} = 45\ Km/h \cdot 10\ min = 45 \cdot \frac{1000 m}{3600 s} \cdot 10 \cdot 60\ s = 7500\ m$$

$$\Delta x_{23} = 190\ m.$$

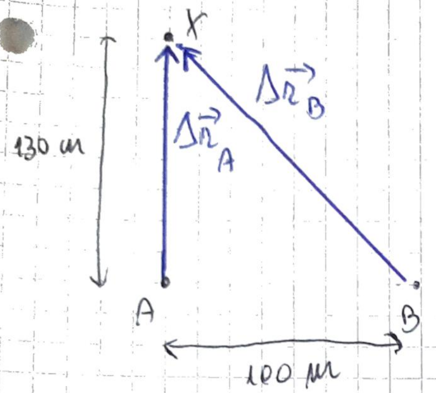
(a) $\Rightarrow \Delta x_{TOT} = (8700 + 7500 + 190)\ m = 16400\ m$

(b) $\bar{v}_{TOT} = \frac{\Delta x_{TOT}}{\Delta t_{TOT}} = \frac{16\,400\ m}{(15 \cdot 60 + 10 \cdot 60 + 30)\ s} \simeq 10{,}7\ m/s \simeq 39\ Km/h$

(c) $\bar{a}_{23} = \frac{\Delta v_{23}}{\Delta t_{23}} = \frac{v_3 - v_2}{\Delta t_{23}} = \frac{0\ m/s - 45 \cdot \frac{1000}{3600} \frac{m}{s}}{30\ s} \simeq -0{,}42\ m/s$

il corpo è fermo in x_3

2.3 CACCIA AL TESORO



$\Delta\vec{r}_A$ VETTORE SPOSTAMENTO DEL PRIMO FINALISTA

$\Delta\vec{r}_B$ VETTORE SPOSTAMENTO DEL SECONDO FINALISTA.

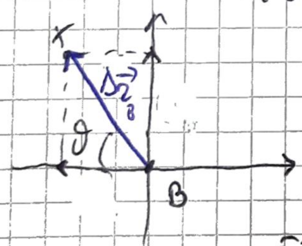
$|\Delta\vec{r}_A| = 130\ m \qquad |\Delta\vec{r}_B| = \sqrt{(130\ m)^2 + (100\ m)^2} = \simeq 164\ m.$

- Per arrivare al punto X, il primo finalista impiega

$$\Delta t_A = \frac{|\Delta\vec{r}_A|}{|\vec{v}_A|} = \frac{130\ m}{5{,}5\ m/s} \simeq 24\ s.$$

Per arrivare per primo, secondo finalista deve impiegare un tempo più piccolo: $\Delta t_B < \Delta t_A \Rightarrow \dfrac{|\Delta\vec{r}_B|}{|\vec{v}_B|} < \Delta t_A \Rightarrow |\vec{v}_B| > \dfrac{|\Delta\vec{r}_B|}{\Delta t_A}$

$\Rightarrow |\vec{v}_B| > \dfrac{164\ m}{24\ s} \simeq 6{,}8\ m/s.$ modulo di $\vec{v}_B$ (minimo).



direzione $\Rightarrow$ stessa di $\Delta\vec{r}_B$: $\left(\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)$

$$\Rightarrow \vartheta = \arctan\frac{|(\Delta\vec{r}_B)_y|}{|(\Delta\vec{r}_B)_x|} = \arctan\frac{130\ \cancel{m}}{100\ \cancel{m}} \simeq 52°.$$

52° nord-ovest.

$$\Rightarrow (\vec{v}_B)_x = -|\vec{v}_B|\cdot\cos\vartheta = -6{,}8\ m/s\cdot\cos 52° = -4{,}2\ m/s$$

$$(\vec{v}_B)_y = |\vec{v}_B|\cdot\sin\vartheta = 6{,}8\ m/s\cdot\sin 52° = 5{,}4\ m/s$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = (-4{,}2\ m/s)\hat{\imath} + (5{,}4\ m/s)\hat{\jmath}.$$

oppure direttamente: $\vec{v}_B = \dfrac{\Delta\vec{r}_B}{\Delta t} = \underset{\text{tempo minimo}}{\dfrac{1}{24\ s}}\left[(-100\ m)\hat{\imath} + (130\ m)\hat{\jmath}\right] =$

$$= -4{,}2\ \hat{\imath}\ m/s + 5{,}4\ \hat{\jmath}\ m/s.$$

2.6 $\vec{r}(t) = [(0,15\ m/s^2)t^2 - 0,40\ m]\hat{i} + [-(0,35\ m/s)t]\hat{j}$.

a) $\bullet\ \vec{r}(5\ s) = [(0,25\ m/s^2)(5\ s)^2 - 0,40\ m]\hat{i} + [-0,35\ m/s \cdot 5\ s]\hat{j} =$

$= (5,85\ m)\hat{i} + (-1,75)\hat{j}$. $\rightarrow$ punto finale

$\bullet\ \vec{r}(0\ s) = (-0,40\ m)\hat{i}$ $\rightarrow$ punto iniziale.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(5\ s) - \vec{r}(0\ s) = [(5,85 - (-0,40))\ m]\hat{i} + [(-1,75 - 0)\ m]\hat{j}$$

$$= (6,25\ m)\hat{i} + (-1,75\ m)\hat{j}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(6,25\ m)^2 + (-1,75\ m)^2} = 6,5\ m.$$

b) $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = [(0,5\ m/s)t]\hat{i} + (-0,35\ m/s)\hat{j}$.

c) $\vec{v}(5\ s) = (0,5\ m/s \cdot 5\ s)\hat{i} + (-0,35\ m/s)\hat{j} =$

$$= (2,5\ m/s)\hat{i} + (-0,35\ m/s)\hat{j}$$

$$|\vec{v}(5\ s)| = \sqrt{(2,5\ m/s)^2 + (-0,35\ m/s)^2} \cong 2,52\ m/s.$$

d) $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = [(0,5\ m/s^2)]\hat{i}$