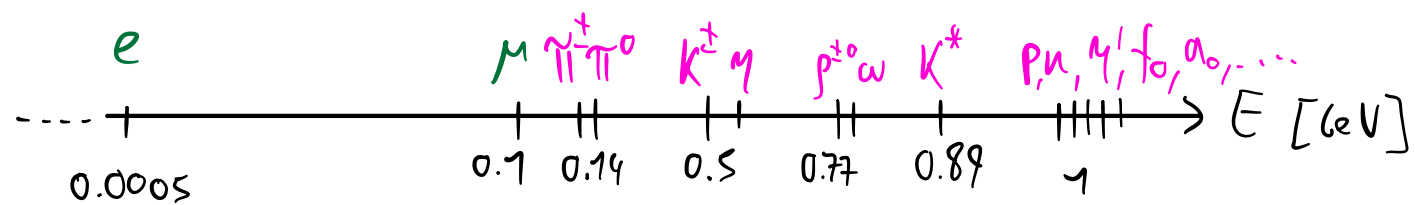


# INTERAZIONE FORTE

Andando ad energie poco sopra la massa del muone notiamo la presenza di una grande quantità di particelle con masse tra  $\sim 0.1$  e  $\sim 10$  GeV e di spin  $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$



Tutti questi **stati** non sono particelle elementari ma stati **COMPONENTI**. Ovvero degli stati legati costituiti da **quark** e **anti-quark**, tenuti insieme dall' **INTERAZIONE FORTE**.

La teoria che descrive questa interazione forte è la **CROMO-DINAMICA QUANTISTICA (QCD)**

# QCD

La cromodinamica quantistica (QCD) è una teoria di campo con gruppo di gauge non abeliano  $SU(3)_c$ .

La generalizzazione delle teorie di gauge a gruppi non abeliani è dovuta a Yang-Mills ('54).

## TEORIE DI GAUGE NON ABELIANE

Consideriamo un gruppo di Lie non abeliano compatto  $\mathcal{G}$  con generatori  $t^a$  che soddisfanno l'algebra di Lie:

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c, \quad a, b, c = 1, \dots, n \quad f^{abc} : \text{costanti di struttura}$$

Normalizziamo i generatori con  $\text{Tr}[t^a t^b] = \frac{\delta^{ab}}{2}$ .

Consideriamo i campi  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , che formano sotto una rappresentazione irriducibile  $r$ -dimensionale di  $\mathcal{G}$ .

$$\varphi'_i(x) = U_{ij}(\vec{\alpha}(x)) \varphi_j(x), \quad \vec{\alpha}(x) = (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))$$

Se  $U(\vec{\alpha})$  è connesso con l'identità allora  $U(\vec{\alpha}) = \exp(i\vec{\alpha}^a t^a)$

La DERIVATA COVARIANTE è costruita introducendo i bosoni di gauge  $A_\mu^a(x)$ , che trasformano nella rappresentazione AGGIUNTA di  $\mathcal{G}$ :  $A_\mu(x) = A^a t^a$

$$\mathcal{D}_\mu \phi = (\partial_\mu + ig A_\mu(x)) \phi.$$

$g$ : COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO

In componenti:  $(\mathcal{D}_\mu \phi)_i = (\partial_{ij} \partial_\mu + ig A_\mu^a(x) t_{ij}^a) \phi_j(x)$

Il campo di gauge trasforma:

$$A'_\mu = U(\alpha) A_\mu U^{-1}(\alpha) + \frac{i}{g} (\partial_\mu U(\alpha)) U^{-1}(\alpha)$$

La field strength si può trovare dalla relazione

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \phi \equiv ig F_{\mu\nu}$$

$$\rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}^a t^a$$

trasforma in maniera lineare:  $F'_{\mu\nu} = U(\alpha) F_{\mu\nu} U^{-1}(\alpha)$ .

In componenti:  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$

A questo punto possiamo scrivere la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + (\mathcal{D}^\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \phi) + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \dots$$

$$= -\frac{1}{4} \underbrace{F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}} + (\mathcal{D}^\mu \phi)_i^\dagger (\mathcal{D}_\mu \phi)_i + i \bar{\psi}_i (\not{\partial} \psi)_i + \dots$$

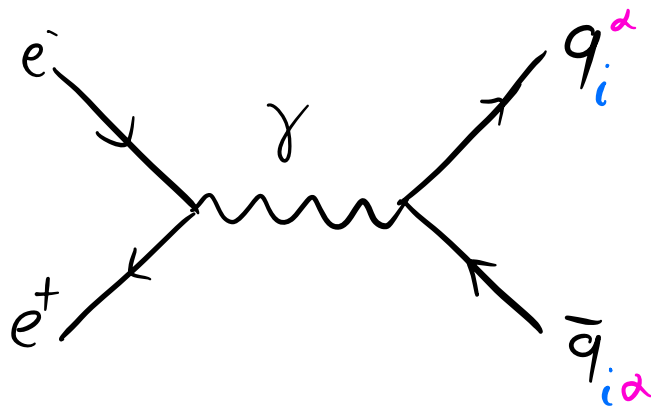
contiene anche interazioni tra bosoni di gauge

# $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})$

[S.26.3; PS.5.7]

Supponiamo di misurare la sezione d'urto INCLUSIVA dell'annichilazione  $e^+e^-$  in un numero arbitrario di ADRONI: particelle composte da vari quark e anti-quark, tenute insieme dalla interazione forte.

Al prim'ordine in th. delle perturbazioni avrei il diagramma:



$\alpha$ : indice di "colore"

$i$ : indice di "sapore"

In funzione dell'energia del centro di massa ho: (stesso risultato che  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ )

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q_i^\alpha \bar{q}_{i\alpha}) (E) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{E^2} Q_{q_i}^2, \text{ per } E > 2m_{q_i}$$

La sezione d'urto INCLUSIVA sarà data dalla SOMMA sugli indici di COLORE (che non osservo) e di SAPORE (dato che  $e^-$  inclusiva):

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni}) (E) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{E^2} \sum_{\alpha} \sum_i^{2m_{q_i} < E} Q_{q_i}^2 = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{E^2} N_c \sum_i^{2m_{q_i} < E} Q_{q_i}^2$$



Dove la somma sul colore mi da il  
 "NUMERO DI COLORI" dei quark  $N_c$ , ovvero la  
 dimensione della loro rappresentazione sotto il gruppo  
 di gauge delle interazioni forti.

Si e' soliti normalizzare questa con

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{\bar{E}^2}, \text{ definendo:}$$

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_c \sum_i Q_{q_i}^2 \theta(\bar{E} - 2m_{q_i})$$

Assumendo  $\bar{E} \gg m_{\text{strange}}$  abbiamo:

$$R = N_c \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \theta(\bar{E} - 2m_c) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \theta(\bar{E} - 2m_b) \right]$$

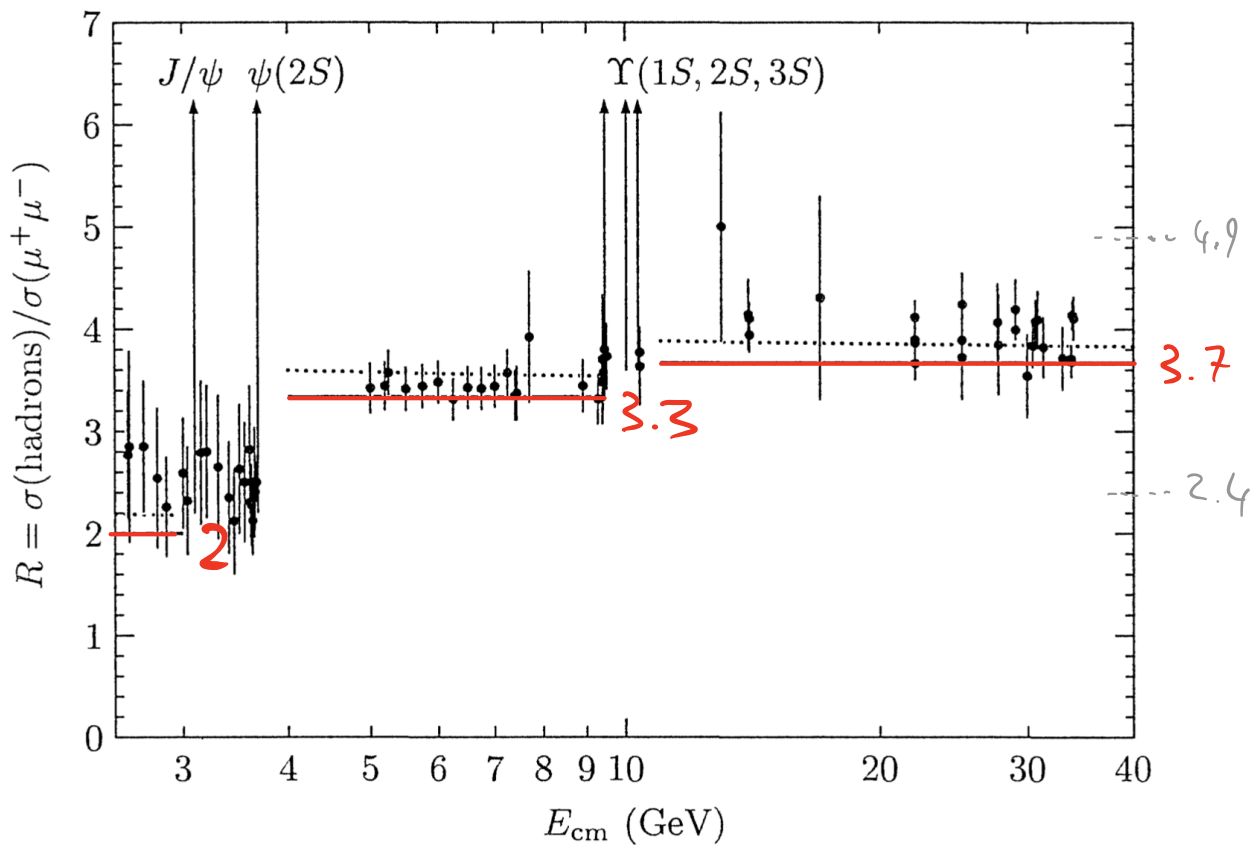
$$\approx N_c \left[ 0,67 + 0,44 \theta(\bar{E} - 2m_c) + 0,11 \theta(\bar{E} - 2m_b) \right]$$

$$m_c \approx 1,27 \text{ GeV}$$

$$m_b \approx 4,18 \text{ GeV}$$

	$2$	$3$	$4$	$N_c$
$\bar{E} \lesssim 3$	1.3	2	2,7	
$4 \lesssim \bar{E} \lesssim 9$	2.2	3.3	4.4	
$11 \lesssim \bar{E} \lesssim 300$	2.4	3.7	4.9	

Confrontando con la misura:



$\Rightarrow$   $\bar{c}$  compatibile solo con  $N_c = 3$

- La linea punteggiata include correzioni di ordine superiore  $\sim \frac{\alpha_s}{4\pi}$
- I quark devono trasformare in una rappresentazione complessa (affinche  $\bar{q}q$  sia un singoletto ma  $qq$  no).
- L'unica possibilita' e' che trasformino nella **FONDAMENTALE** di un gruppo di gauge  $SU(3)$

$$\Rightarrow G_{\text{QCD}} = SU(3)_c$$

# QCD

- $\mathcal{G} = SU(3)_c$  — è solo per ricordarci che si parla del gruppo di gauge del colore.

- Generatori  $t_A$ ,  $A=1, \dots, 8$

Nella rappresentazione fondamentale,  $\mathfrak{3}$ , sono le matrici di Gell-Mann:  $t_A^{(\mathfrak{3})} = \frac{\lambda_A}{2}$

$$\lambda_{1,2,3} = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{G}_{1,2,3} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

I generatori soddisfanno  $\text{Tr}(t_A) = 0$ ,  $\text{Tr}(t_A t_B) = \frac{1}{2} \delta_{AB}$

- 8 bosoni di gauge  $G_A^\mu(x)$  : **GLUONI**

$$G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A - g_s f^{ABC} G_\mu^B G_\nu^C$$

↑ **COSTANTE DI ACCOPPIAMENTO FORTE**

- I campi di materia carichi sotto  $SU(3)_c$  sono i **QUARK** e trasformano nella rappresentazione fondamentale  $\mathfrak{3}$ :  $q'_\alpha(x) = \left( e^{i\alpha_A(x) t_A^{(\mathfrak{3})}} \right)_{\alpha\beta} q_\beta(x)$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

Derivata covariante:  $D_\mu q = \partial_\mu q + ig_s \frac{\lambda^A}{2} G_\mu^A q$ .

# LAGRANGIANA DI QCD (trascurando $U(1)_{em}$ )

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G_{\mu\nu}^A + \sum_i \bar{q}_i (i\not{D} - m_i) q_i$$

$i$ : indice di **SAPORI** dei quark:  $u, d, s, c, b, t$

A questa Lagrangiana occorre aggiungere i termini dovuti al gauge fixing (gauge fixing + ghost) più un altro termine di solo gluoni:

$$\mathcal{L}_\theta = -\theta_{QCD} \frac{g_s^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^A \tilde{G}^{A\mu\nu}, \text{ dove } \tilde{G}_{\mu\nu}^A = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} G^{A\sigma\rho}$$

Questo termine può essere scritto come una derivata totale:

$$G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} = \partial_\mu K^\mu = \partial_\mu \left( \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} G_\nu^A \left( G_{\lambda\sigma}^A + \frac{g_s}{3} f^{ABC} G_\lambda^B G_\sigma^C \right) \right)$$

$S_\theta = \int d^4x \mathcal{L}_\theta$  non è nullo perché il vuoto della QCD ha una topologia non banale.

Da misure sperimentali però si ottiene il limite  $\theta < 10^{-9}$ , quindi trascurabile per la fisica di questo corso.

Provare a dare una motivazione del perché  $\theta$  sia così piccolo va col nome "θ-problem" dello SM.

# SIMMETRIE DELLA QCD

$\mathcal{L}_{QCD}$  scritta sopra, oltre ad essere invariante sotto Lorentz e  $SU(3)_c$ , ha anche altre simmetrie:

DISCRETE SPAZIO-TEMPORALI:

- Parità  $P$  ( $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ ,  $t \rightarrow t$ )
- Coniugazione di carica  $C$  ( $\psi \rightarrow \bar{\psi}$ )

## SIMMETRIE INTERNE GLOBALI

Queste sono trasformazioni dei campi che commutano con Lorentz e che lasciano invariata  $\mathcal{L}_{QCD}$ .

- Numero di ciascun tipo di quark  $N_{q_i}$

Trasformazione di fase INDIPENDENTE di ciascun sapore di quark  $q_i$ :

$$q_i \rightarrow e^{i\alpha_i} q_i, \quad \bar{q}_i \rightarrow e^{-i\alpha_i} \bar{q}_i, \quad \alpha_i = \text{const.}$$

È banale verificare che  $\mathcal{L}_{QCD} \rightarrow \mathcal{L}_{QCD}$ .

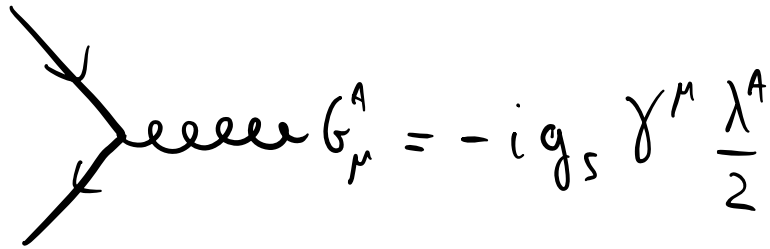
Il caso particolare in cui tutte le  $\alpha_i \equiv \alpha_B$  sono uguali corrisponde alla CONSERVAZIONE del

Numero barionico  $B$ .

Per convenzione si sceglie  $B = \frac{1}{3}$  per i quark.

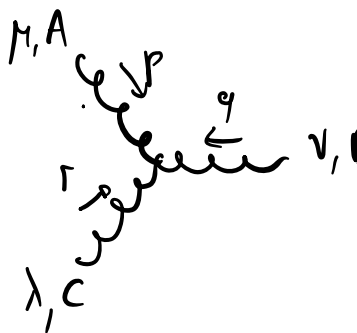
# INTERAZIONI

Come la QED abbiamo l'interazione tra fermioni e gluoni, con le sostituzioni  $e \rightarrow g_s$ ,  $Q \rightarrow \frac{\lambda^A}{2}$ :

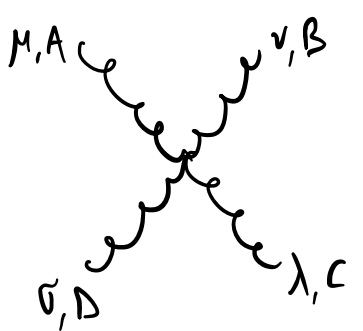


$$G_{\mu}^A = -i g_s \gamma^{\mu} \frac{\lambda^A}{2}$$

Dal termine  $-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu}$  però in questo caso si ottengono anche termini a 3 e 4 gluoni, oltre il termine cinetico:



$$= -g_s f_{ABC} [g_{\mu\nu} (p-q)_{\lambda} + g_{\nu\lambda} (q-r)_{\mu} + g_{\lambda\mu} (r-p)_{\nu}]$$



$$= -i g_s^2 [f_{ABC} f_{CDE} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) + (B \leftrightarrow C, \nu \leftrightarrow \lambda) + (B \leftrightarrow D, \nu \leftrightarrow \sigma)]$$

In più, in calcoli a 1o più loop, occorre anche considerare interazioni con lo scambio di ghosts (particelle fittizie introdotte nella procedura di gauge fixing).

[vedi corso di Campi III]

I **QUARK** sono fermioni che trasformano sotto la rappresentazione fondamentale (**3**) di  $SU(3)_c$ .

Le interazioni di QCD (e QED) sono di "tipo vettore": entrambe le chiralità  $q_L$  e  $q_R$  si trasformano ugualmente, quindi posso scrivere la teoria con spinori di Dirac.

Per la QCD i quark si differenziano solo per la loro massa, ma sotto la QCD hanno anche cariche diverse:

$q_i$	<b>u</b>	<b>d</b>	<b>s</b>	<b>c</b>	<b>b</b>	<b>t</b>	
<b>m</b>	0.0022	0.0047	0.093	1,27	4,18	173	GeV
<b>Q</b>	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Come l'accoppiamento elettrico, anche quello di QCD dipende dall'energia del processo tramite il gruppo di rinormalizzazione.

Nel caso della QCD, le interazioni tra gluoni rendono il calcolo più complicato. Il risultato per la **FUNZIONE BETA** è

$$\mu \frac{dg_s}{d\mu} \equiv \beta_{\text{QCD}}(g_s) = - \left( 11 - \frac{2N_f}{3} \right) \frac{g_s^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g_s^5) = -\beta_0 \frac{g_s^3}{16\pi^2} + \dots$$

Questo termine è dovuto all'interazione tra gluoni: un termine di "puro Yang-Mills".

$N_f$  è il numero di flavour (nr. di quark) con massa  $M_q \ll \mu$ .

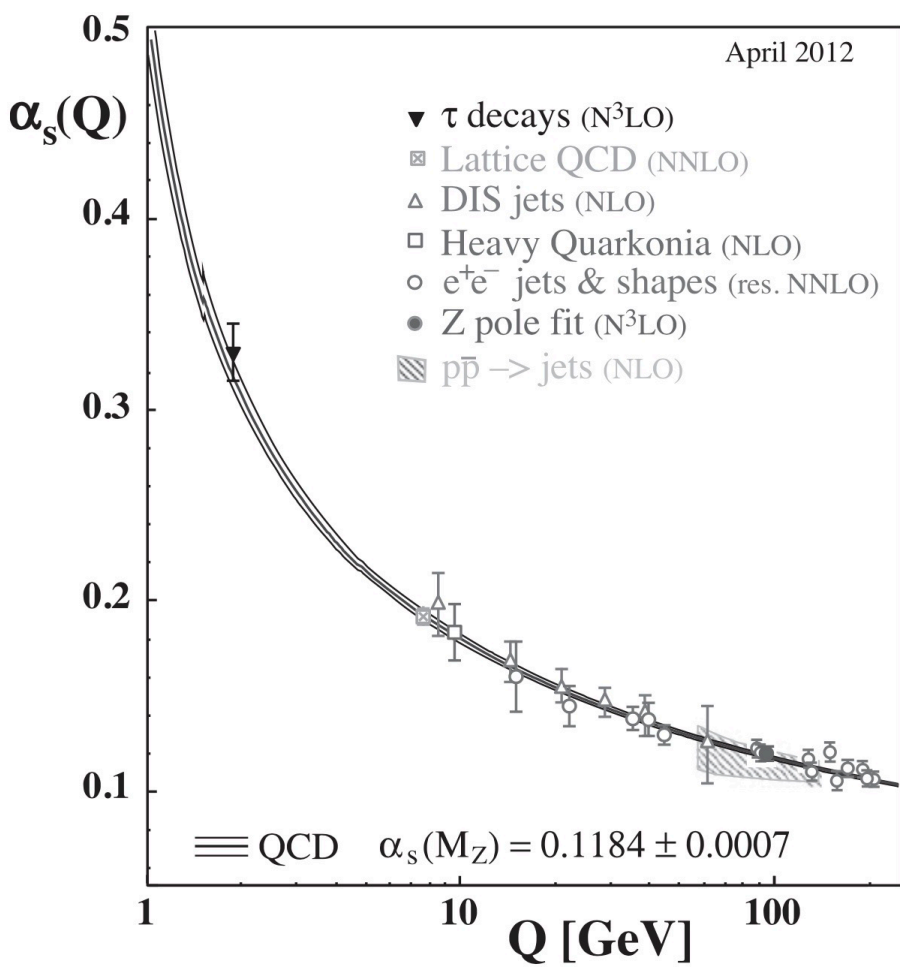
Il termine di Yang-Mills tende a rendere  $\beta_{\text{QCD}} < 0$ .  
Includendo anche il top,  $N_f^{\text{SM}} = 6$  :  $11 - \frac{2 \cdot 6}{3} = 7$ .

Per la QCD  $\beta_{\text{QCD}} < 0$ .

L'accoppiamento diminuisce a grandi energie:

"**LIBERTÀ ASINTOTICA**". La QCD è "UV-free".





A basse energie la teoria diventa fortemente accoppiata e non-perturbativa ad una scala  $\Lambda_{QCD}$ .

$$\alpha_s(Q) = \frac{4\pi}{11 - \frac{2N_f}{3}} \frac{1}{\log \frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}}$$

Relazione tra un parametro adimensionale ed una scala fisica

"transmutazione dimensionale"

$$\Lambda_{QCD} \simeq 213 \pm 8 \text{ MeV}$$

Una ipotesi, non dimostrata, è che  $\alpha_s$  continui a crescere a basse energie, generando il fenomeno del **CONFINAMENTO** dei quark.

A basse energie (i.e. grandi distanze) i quark sono confinati in stati con carica neutra di QCD: gli **ADRONI**.

Gli adroni sono stati legati di quark e anti-quark e devono essere singoletti di QCD

$$q \sim 3, \quad \bar{q} \sim \bar{3} \text{ di } SU(3)_c$$

combinazioni di rappresentazioni:

$$(qq): \quad 3 \otimes 3 = \bar{3} \oplus 6 \quad \rightarrow \text{nessun singoletto}$$

$$(q\bar{q}): \quad 3 \otimes \bar{3} = \boxed{1} \oplus 8$$

Questi stati hanno spin 0, 1 e sono chiamati **MESONI**. Hanno  $B=0$ .

$$(qqq): \quad 3 \otimes 3 \otimes 3 = (3 \otimes 3) \otimes 3 = (\bar{3} \oplus 6) \otimes 3 \\ = \boxed{1} \oplus 8 \oplus 8' \oplus 10$$

Questi stati hanno spin  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$  e sono i **BARIONI**.

Hanno numero barionico  $B=1$ .

$\Rightarrow$  Il barione piú leggero sará necessariamente stabile\*: il PROTONO.

\* Non può decadere in nessun'altra combinazione di stati piú leggeri in maniera che  $B$  sia conservato.

In generale, gli adroni hanno masse  $\sim 1$  GeV, dovute all'energia accumulata nei legami di QCD (se  $m_{\text{quark}} \ll \Lambda_{\text{QCD}}$ ).

Esempio: **protone**  $m_p = 0,938$  GeV

$$p \sim (uud) \quad 2m_u + m_d = 0,0091 \text{ GeV}$$

Se però uno (o più) dei quark costituenti l'adrone ha una massa  $\gg \Lambda_{\text{QCD}}$  (QUARK PESANTE) allora la massa adronica sarà dominata dalla massa del quark.

Alcuni mesoni hanno però una massa molto più piccola degli altri.

Ad esempio i pioni:

$$\text{PIONI} \left\{ \begin{array}{l} \pi^+ \sim (u\bar{d}), \pi^- \sim (d\bar{u}) \\ \pi^0 \sim \frac{(u\bar{u} + d\bar{d})}{\sqrt{2}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} m_{\pi^\pm} \approx 0,140 \text{ MeV} \\ m_{\pi^0} \approx 0,135 \text{ MeV} \end{array}$$

Il motivo è che i pioni sono pseudo-bosoni di Nambu-Goldstone.

# QCD a BASSA ENERGIA

[DG VIII]

## SIMMETRIA CHIRALE E ISOSPIN

$m_{u,d,s} \ll \Lambda_{\text{QCD}}$  : approssimiamoli come massless

Trascuriamo gli altri quark (a basse energie i quark leggeri domineranno la fenomenologia).

Trascuriamo anche l'interazione elettromagnetica:  $e \ll g_s$ .

In questo limite:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{ferm.}} \approx \bar{u} i \not{D} u + \bar{d} i \not{D} d + \bar{s} i \not{D} s = \bar{q} i \not{D} q$$

dove  $q \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$  è un vettore nello spazio del **sapore**.

### IMPORTANTE:

Non confondere con lo spazio del colore o degli indici spinoriali.

EsPLICITANDO tutti gli indici:

$$\begin{array}{l}
 \text{colore: } a = \{r, g, b\} \\
 \downarrow \\
 q^a \\
 \uparrow \\
 \text{sapore } i = \{u, d, s\} \\
 \leftarrow \text{Dirac}
 \end{array}
 =
 \underbrace{\begin{pmatrix} u_r & u_g & u_b \\ d_r & d_g & d_b \\ s_r & s_g & s_b \end{pmatrix}}_{\text{SU(3)}_c \text{ - colore}}
 \left. \vphantom{\begin{pmatrix} u_r & u_g & u_b \\ d_r & d_g & d_b \\ s_r & s_g & s_b \end{pmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{spazio del} \\ \text{"sapore"} \\ \downarrow \\ \text{simmetria approx se} \\ m_{u,d,s} = 0 \end{array}$$

Possiamo scomporre  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{ferm}}$  in termini delle componenti chirali  $q_L = P_L q$  e  $q_R = P_R q$ ,  $P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{ferm}} = \bar{q}_L i \not{D} q_L + \bar{q}_R i \not{D} q_R$$

È invariante sotto il gruppo di trasformazioni chirali globali  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_L \times U(1)_R$ :

$$q_{Li} \rightarrow \left( e^{i\alpha_L^0 \mathbf{1} + i \alpha_L^a \frac{\lambda^a}{2}} \right)_{ij} q_{Lj}, \quad q_{Ri} \rightarrow \left( e^{i\alpha_R^0 \mathbf{1} + i \alpha_R^a \frac{\lambda^a}{2}} \right)_{ij} q_{Rj}$$

Matrici di Gell-Mann

$U(1)_L$        $SU(3)_L$        $U(1)_R$        $SU(3)_R$

NOTA: Non confondere questi  $SU(3)_{L,R}$  con  $SU(3)_c$ .  
 Questi agiscono sullo spazio del sapore,  $SU(3)_c$  su quello del colore.

• La combinazione **assiale**  $U(1)_R - U(1)_L = U(1)_A$  è rotta a livello quantistico (anomalia  $U(1)$  assiale) e quindi **NON** è una simmetria della teoria quantistica.

• La combinazione **vettoriale**  $U(1)_R + U(1)_L = U(1)_V$  è la simmetria legata alla conservazione del **NUMERO BARIONICO**.

A livello non perturbativo, il vuoto della QCD è tale che si genera un condensato di quark, ovvero un valore di aspettazione sul vuoto non nullo per l'operatore  $\bar{q}q$ :

$$\langle 0 | \bar{q}_i q_j | 0 \rangle = -f^2 B_0 \delta_{ij} \neq 0$$

$$\bar{q}_i q_j = \bar{q}_{Li} q_{Rj} + \bar{q}_{Ri} q_{Lj}$$

È evidente che questo elemento di matrice non è invariante sotto trasformazioni di  $SU(3)_L$  o  $SU(3)_R$ , prese separatamente:

- $\mathcal{L}_{QCD}$  è invariante ma il vuoto no.

⇒ La simmetria è ROTTA SPONTANEAMENTE

- $\bar{q}q$  è invece invariante per trasformazioni del sottogruppo vettoriale  $U(1)_B \times SU(3)_I$ :  
N. Barionico
ISOSPIN

$$q_{L,R} \rightarrow g_I q_{L,R} = \left( e^{i \frac{1}{3} \alpha_I^0 \mathbb{1} + i \alpha_I^a \frac{\lambda^a}{2}} \right) q_{L,R}$$

$$\bar{q}q \rightarrow \bar{q} g_I^\dagger g_I q = \bar{q}q$$

La simmetria chirale di QCD è rotta spontaneamente dal condensato di quark al sottogruppo vettoriale:

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_B \rightarrow SU(3)_I \times U(1)_B$$

Quindi lo spettro e le interazioni degli adroni rispetteranno le simmetrie  $SU(3)_I \times U(1)_B$ .

## TEOREMA DI GOLDSTONE

Ad ogni rottura spontanea di una simmetria continua globale, corrisponde una particella scalare a massa nulla.

La particella a massa nulla che ne segue è il **bosone di Goldstone**.

Ne avremo 1 per ogni generatore di una simmetria rotta spontaneamente. Nel nostro caso, il nr. di generatori rotti è:

$$8 + 8 + 1 - (8 + 1) = \boxed{8}$$

## DIMOSTRAZIONE

[Valida per campi classici, a livello quantistico si usa il potenziale effettivo.]

Supponiamo di avere  $N$  campi  $\varphi^a(x)$

Il minimo del potenziale  $V(\varphi)$  è per  $\varphi_0^a$  :  $\frac{\partial}{\partial \varphi^a} V(\varphi) \Big|_{\varphi^a(x) = \varphi_0^a} = 0$

Espandendo  $V(\varphi)$  attorno al minimo:

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + \frac{1}{2} (\varphi^a - \varphi_0^a) (\varphi^b - \varphi_0^b) \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} V \right)_{\varphi_0} + \dots$$

$\left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} V \right)_{\varphi_0} \equiv m_{ab}^2$  } Il termine quadratico del potenziale descrive le masse

- è una matrice simmetrica
- gli autovalori sono le masse dei campi scalari

Una trasformazione infinitesima corrispondente ad una simmetria ha la forma

$$\varphi^a \rightarrow \varphi^a + \alpha \Delta^a(\varphi), \quad \alpha \ll 1$$

Essendo una simmetria, l'azione  $S(\varphi)$  è invariante e quindi, per campi costanti, anche

$V(\varphi)$  è invariante:



$$V(\varphi^a) = V(\varphi^a + \alpha \Delta^a(\varphi)) = V(\varphi^a) + \alpha \Delta^a(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^a} V(\varphi)$$

$$\Rightarrow \Delta^a(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^a} V(\varphi) = 0$$

Derivando per  $\varphi^b$  e mettendo  $\varphi = \varphi_0$  abbiamo:

$$0 = \left( \frac{\partial \Delta^a}{\partial \varphi^b} \right)_{\varphi_0} \underbrace{\left( \frac{\partial V}{\partial \varphi^a} \right)_{\varphi_0}}_0 + \Delta^a(\varphi_0) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \right)_{\varphi_0}$$

$$\Rightarrow \Delta^a(\varphi_0) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \right)_{\varphi_0} = 0$$

- Se il vuoto è invariante:  $\varphi_0^a \rightarrow \varphi_0^a + \alpha \Delta^a(\varphi_0) \equiv \varphi_0^a$   
 $\Rightarrow \Delta^a(\varphi_0) = 0$  e la relazione è soddisfatta  $\forall M_{ab}^2$ .
- Se il vuoto non è invariante allora  $\Delta^a(\varphi_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \Delta^a(\varphi_0) M_{ab}^2 = 0$$

$\Rightarrow \Delta^a(\varphi_0)$  è l'autovettore con autovalore di massa zero, ovvero il bosone di Goldstone.

# (SO SPIN SU(3))<sub>I</sub>

$SU(3)_I$  agisce su  $q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$  3 "light" quarks

$q \sim 3$  of  $SU(3)_I$ ,  $\bar{q} \sim \bar{3}$  of  $SU(3)_I$   
 $q_i$   $\bar{q}_i = (q_i)^*$

The generators are formally the same  $T^A = \frac{\lambda^A}{2}$  matrices we saw for  $SU(3)_c$ , however THEY ACT ON A DIFFERENT SPACE: flavour vs. color.

Let us call the two Cartan generators

$$I_3 = \frac{1}{2} \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

One can classify elements of a representation in terms of the eigenvalues of  $I_3$  and  $Y$ .

$$\begin{array}{lll} I_3(u) = \frac{1}{2} & I_3(d) = -\frac{1}{2} & I_3(s) = 0 \\ Y(u) = \frac{1}{3} & Y(d) = \frac{1}{3} & Y(s) = -\frac{2}{3} \end{array}$$

$Y = B + S$

hyper number  $\rightarrow$  strong

$B(u) = -B(\bar{u}) = \frac{1}{3}$

$S(u) = B(d) = 0$

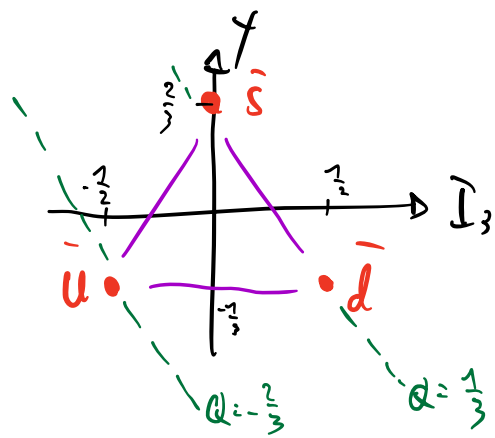
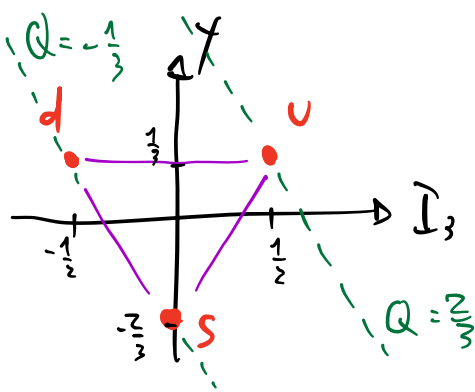
$S(s) = -S(\bar{s}) = -1$

Electric charge acts on quarks as  $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

In terms of the Cartan generators:

$Q = I_3 + \frac{1}{2} Y$   $Q$  is exactly conserved, but  $I_3$  &  $Y$  are not!

In a plane:



Quarks cannot be observed as free particles (due to their QCD charge, but only as bound states.

Mesons are particles arising as bound states of a quark and an anti-quark  $\rightarrow$

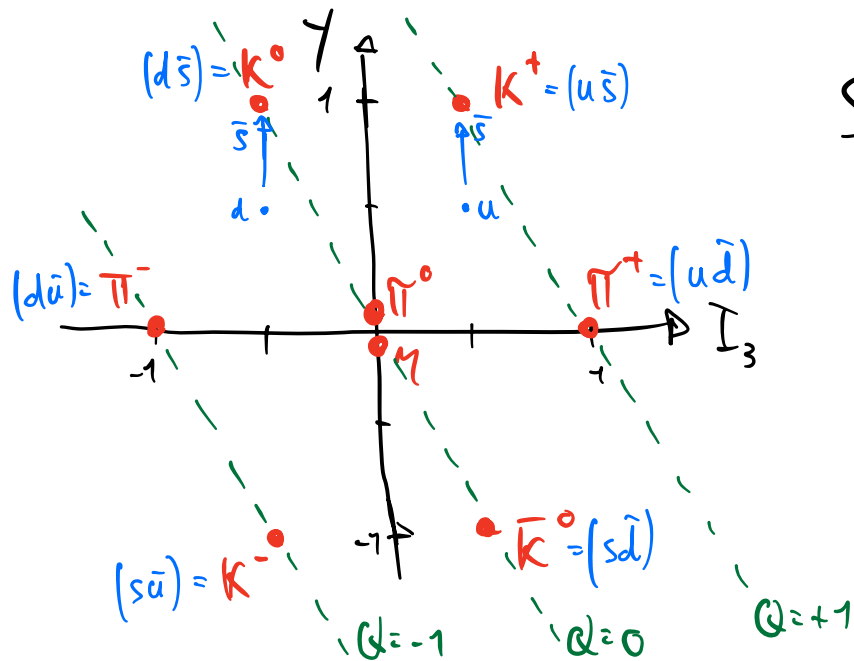
Mesoni:  $(q_i^a \bar{q}_j^b) \propto \delta^{ab} (\eta^i \delta_{ij} + \pi^a \frac{\lambda^a_{ij}}{2})$

RAPP. di colore =  $3 \times \bar{3} = \boxed{1} + 8$  DEVONO ESSERE SINGOLETTI DI COLORE

RAPP. di ISOSPIN (SAPORE) =  $3 \times \bar{3} = \boxed{1} + \boxed{8}$   
 singoletto  $\eta'$  "Eightfold way"

Sono gli 8 Goldstone bosoni di the Goldstone della rottura spontanea di simmetria  $SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_I$

$$\pi^a \frac{\lambda^a}{2}$$



BARYONS are spin =  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  particles made of 3 quarks:

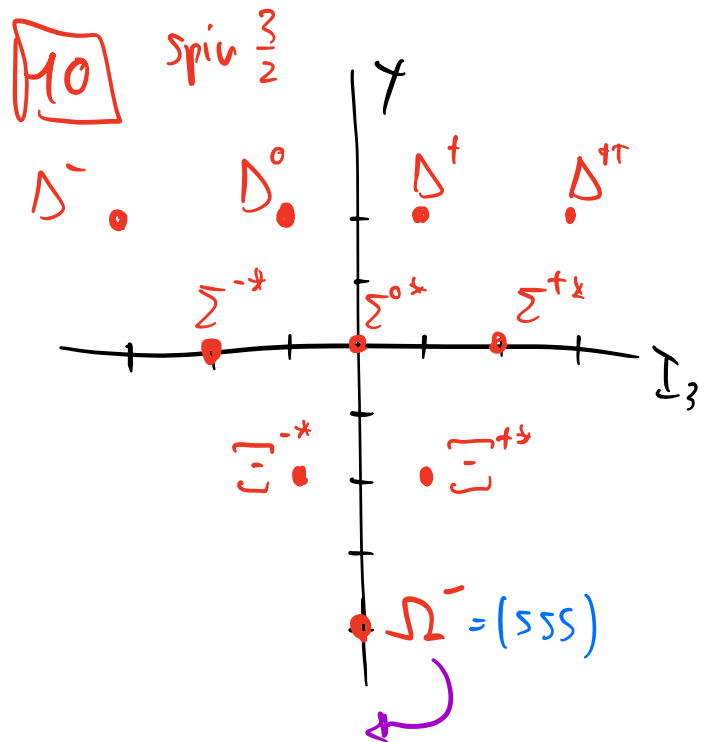
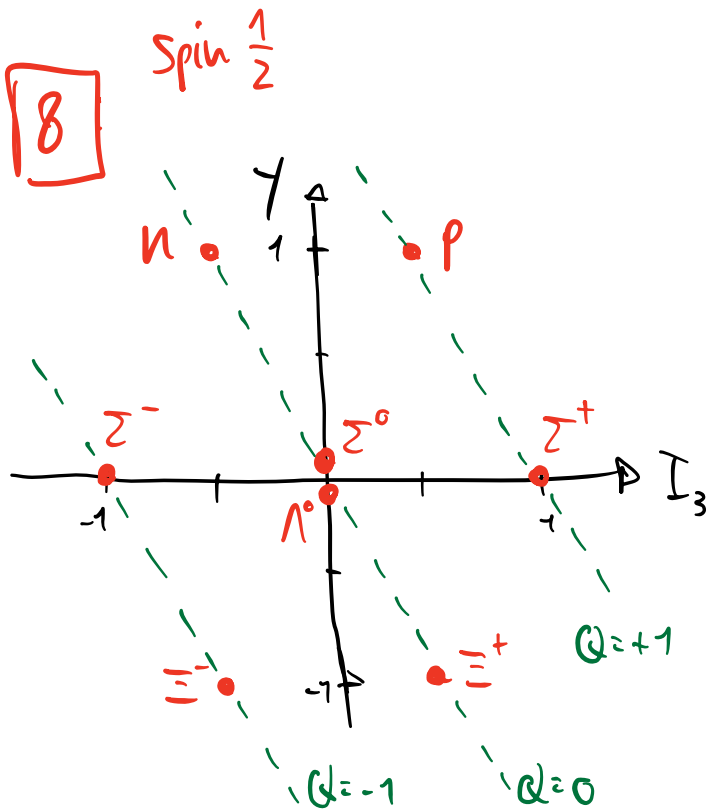
$$B \sim (q_i^a q_j^b q_k^c) = \epsilon^{abc} B_{ijk}$$

SOTTO COLORE:  $3 \times 3 \times 3 = \boxed{1} + 8 + 8' + 10 \rightarrow$  DEVONO ESSERE SINGOLETTI DI COLORE

SOTTO  $SU(3)_F$ :  $3 \times 3 \times 3 = 3 \times (\bar{3}_a + 6_s) = \boxed{1} + \boxed{8}_a + \boxed{8}_s + \boxed{10}$

Avrò barioni in tutte queste irreps di isospin.

Dato che la funzione d'onda finale deve essere antisimmetrica, alcune di queste irreps avranno spin  $\frac{1}{2}$ , altre spin  $\frac{3}{2}$ .



Predicted by Gell-Mann on the basis of  $SU(3)_F$  symmetry and only later discovered.

Se la simmetria chirale fosse esatta, allora gli 8 bosoni di Goldstone  $\pi^\pm, \pi^0, K^0, \bar{K}^0, K^\pm, \eta$  avrebbero massa nulla.

Le **MASSÈ** dei quark però rompono questa simmetria:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -m_u \bar{u}u - m_d \bar{d}d - m_s \bar{s}s = \\ &= -m_u \bar{u}_L u_R - m_d \bar{d}_L d_R - m_s \bar{s}_L s_R + \text{h.c.} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_m$  non è invariante sotto  $SU(3)_I$ .

P.S. È invariante sotto i sottogruppi abeliani:

$$U(1)_u \times U(1)_d \times U(1)_s \leftrightarrow U(1)_d \times U(1)_s \times U(1)_B$$

⇒ Questo implica che i bosoni di Goldstone prendono una massa.

Ad esempio:

$$\begin{aligned} m_\pi^2 &= \langle \pi | m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d | \pi \rangle && \left[ \text{vedi D.G. IV-6,} \right. \\ &= (m_u + m_d) B_0 && \left. \text{(fuori dal corso)} \right] \\ &\rightarrow m_\pi^2 \propto m_{\text{quark}} \end{aligned}$$

Analogamente:

$$m_{K^\pm}^2 = B_0 (m_s + m_u) \quad m_{K^0}^2 = B_0 (m_s + m_d)$$

$$m_\eta^2 = \frac{1}{3} B_0 (4m_s + m_u + m_d)$$

Dato che  $m_s \gg m_{u,d}$  ci si aspetta che  $m_K > m_\pi$ . Infatti:

$$m_{\pi^\pm} \approx 140 \text{ MeV}, \quad m_{\pi^0} \approx 135 \text{ MeV}$$

$$m_{K^\pm} \approx 494 \text{ MeV} \quad m_{K^0} \approx 497 \text{ MeV} \quad m_\eta \approx 548 \text{ MeV}$$

Dato che  $m_s \gg m_{u,d}$ , spesso si può considerare una simmetria più ristretta come il sottogruppo  $SU(2)_I$  di  $SU(3)_I$  che agisce solo su  $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ .

La differenza tra mesoni carichi e neutri è dovuta all'interazione elettromagnetica.

La loro natura di bosoni di Goldstone li rende comunque più leggeri delle altre risonanze:

$(u\bar{u} + d\bar{d})$	$\pi^0$	$f_0(\pi)$	$\rho^0$
	Spin 0	Spin 0	Spin 1
	135 MeV	$\sim 500 \text{ MeV}$	775 MeV

# SM A BASSA ENERGIE : QED + QCD

Mettendo insieme quanto studiato finora possiamo scrivere una Lagrangiana che descrive la fisica a scale di energia ben sotto la scala elettrodebole:  $\Lambda_{\text{QCD}} \ll E \ll M_W$

## INGREDIENTI

- SIMMETRIE DI GAUGE  $SU(3)_c \times U(1)_{em}$   
vettori:  $G_\mu^A$ ,  $A_\mu$
- CAMPI FERMIONICI (MATERIA)

	$u_i$	$d_i$	$e_i$	$\nu_{Li}$
Lorentz $su(2)_L \times su(2)_R$	$(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 0)$
$SU(3)_c$	3	3	1	1
$U(1)_{em}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	0

- $i = 1, 2, 3$  è l'indice di generazione:

$$u_i = (u, c, t) \quad d_i = (d, s, b)$$

$$e_i = (e, \mu, \tau) \quad \nu_{ii} = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$$

Nota:  
Dato che  $M_t \approx 173 \text{ GeV}$ ,  
a basse energie lo possiamo trascurare.

- $U_i, d_i, e_i$  sono fermioni di Dirac:  $(\frac{1}{2}, 0) + (0, \frac{1}{2})$

- I neutrini  $\nu_i$  invece sono fermioni di Weyl left-handed:  $(\frac{1}{2}, 0)$ .

Essendo neutri sotto  $SU(3)_c \times U(1)_{em}$  non hanno interazioni a questo livello.

Le loro masse sono molto minori di quelle degli altri fermioni, per ora consideriamoli a massa nulla e discuteremo le masse dei neutrini più avanti.

## RICETTA

Scriviamo la Lagrangiana **rinormalizzabile** più generale con questi campi di materia, compatibile con le simmetrie di gauge:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{matter}} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} \quad (+ \mathcal{L}_{\text{gauge-fixing}}) \\ & + \sum_i \left[ \bar{u}_i (i\not{D}^{(u)} - m_{u_i}) u_i + \bar{d}_i (i\not{D}^{(d)} - m_{d_i}) d_i + \right. \\ & \left. + \bar{e}_i (i\not{D}^{(e)} - m_{e_i}) e_i + \bar{\nu}_i i\not{D} \nu_i \right] \end{aligned}$$

$$D_{\mu}^{(f)} = \partial_{\mu} + i g_s t_{(f)}^A G_{\mu}^A + i e Q_f A_{\mu}, \quad t_{(f)}^A = \begin{cases} \frac{\lambda^A}{2} & f = u, d \\ 0 & f = e \end{cases}$$



Questa teoria descrive molto bene le interazioni forti ed elettromagnetiche, lo spettro delle particelle fondamentali e degli adroni, e molta altra fenomenologia.

Non spiega però i fenomeni di **RADIOATTIVITA'** o il **DECADIMENTO- $\beta$** :

$$p \rightarrow n e^+ \nu_e$$

$$\bar{\mu} \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$$

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \text{ eccetera.}$$

Per farlo occorre introdurre le **INTERAZIONI DEBOLI**.