SISTEMI DINAMICI

Mappe discrete : $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$I \to I$

$$x_1 = f(x_0)$$
$$x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$$
$$x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$$
$$\vdots$$

$f(x_0) = x_0$ punti fissi.

$f^n(x_0) = x_0$ $\quad x_0, \dots, x_n$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 pto fisso

$|f'(x_0)|$ < 1 attrattivo
 > 1 repulsivo

Biforcazioni → esempio $f_a(x) = a - x^2$

biforcazione "Tangente"

Punti fissi : $x^2 + x - a = 0$ → $x^*_\pm = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{4a+1}\right)$

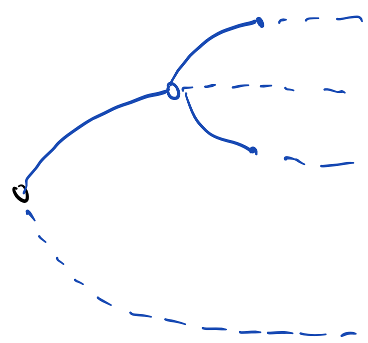
PERIOD DOUBLING BIFORCATION

→ cambia il numero di punti critici della iterata di f

$$f_a^2(x) = a - (a - x^2)^2 = a - a^2 + 2ax^2 - x^4$$

per $a > \frac{3}{4}$ appaiono 2 nuovi punti fissi di f^2

f_a^2 : $a < \frac{3}{4}$ 2 pti fissi , $a > \frac{3}{4}$ 4 pti fissi



Teo Sia f_λ una famiglia a un parametro di funzioni che dipendono in modo liscio da λ.
Se x_0 è un pto fisso per λ_0, $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
e se $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$, allora:
esistono due intervalli $I \ni x_0$, $J \ni \lambda_0$ e una funzione differenziabile $p : J \to I$ t.c.

- $p(\lambda_0) = x_0$
- $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$

Dim $f_\lambda(x)$
Segue dal Teorema della funzione implicita

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$$

Dalle ipotesi : $G(x_0, \lambda_0) = 0 = f_{\lambda_0}(x_0) - x_0$

e $\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x_0, \lambda_0} = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0$

Quindi $\exists \; p(\lambda)$: $G(p(\lambda), \lambda) = 0$ e

$p(\lambda_0) = x_0$

:)

<u>Esempio</u> modello logistico discreto

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \qquad \lambda > 0$$

per semplicità consideriamo solo $I = [0,1]$

$f_\lambda(x) = \lambda x (1-x)$: ho due punti fissi : $x = 0$ $\quad x_\lambda = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$

$$f_\lambda'(x) = \lambda(1 - 2x)$$

vediamo che $x = 0$ è attrattivo per $0 < \lambda < 1$ e repulsivo per $\lambda > 1$

Ad esempio $f_\lambda(1) = 0$ diventa fisso eventualmente.

Secondo punto fisso : $x_\lambda = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$

è attrattivo per $1 < \lambda < 3$ e repulsivo per $\lambda > 3$ (per $\lambda = 3$ cambia il carattere).

In particolare per $\lambda = 3$ $\quad x_{n+1} = 3 x_n (1 - x_n)$

Si può vedere che

$$f^2_\lambda = \lambda^2 x - (\lambda^2 + \lambda^3) x^2 + 2\lambda^3 x^3 - \lambda^3 x^4$$

$f^2_\lambda(x) = x$ ha soluzioni

$x = 0$, $x = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$

$$x = \frac{\lambda + \lambda^2 \pm \lambda \sqrt{\lambda^2 - 3 - 2\lambda}}{2\lambda^2}$$ appaiono 2-cicli

Consideriamo $\lambda = 4$

Notiamo che $f'_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda(1 - 2x)\Big|_{\frac{1}{2}} = 0$

$\forall \lambda$

$x = \frac{1}{2}$ è un max di f

Se $\lambda = 4$, $f_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ e $f_4^2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

Quindi $f_4\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = I$

$f_4\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = I$

entrambi gli intervalli vengono mappati in tutto I. Quindi devono esistere dei valori $y_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $y_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Tali che $f_4(y_0) = f_4(y_1) = \frac{1}{2}$

(esistono due punti che vengono mandati a $\frac{1}{2}$). Siccome $f_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, allora

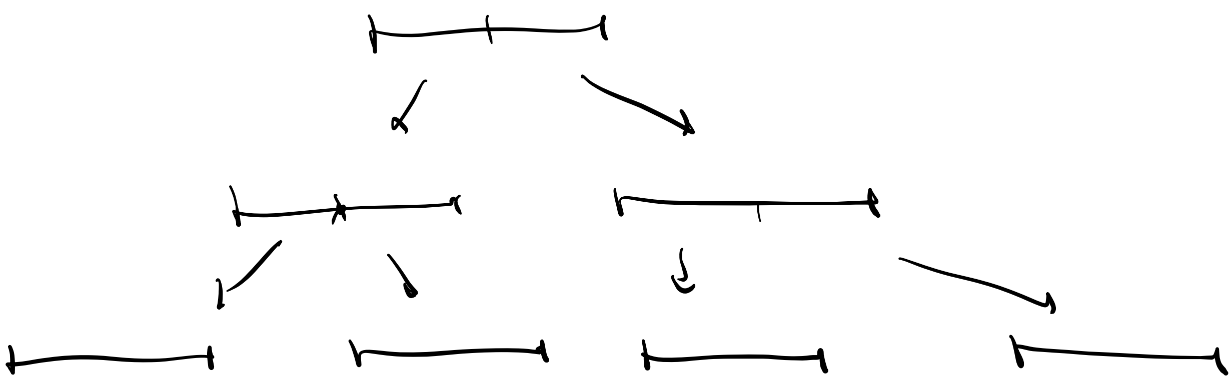
$\left(f_\lambda(x) = \lambda x (1-x) \right)$

$$f_4^2(y_0) = f_4^2(y_1) = 1.$$

Inoltre $f_4^2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Quindi

$$f_4^2([0, y_0]) = f^2\left(\left[y_0, \tfrac{1}{2}\right]\right) = I$$

$$f_4^2\left(\left[\tfrac{1}{2}, y_1\right]\right) = f_4^2([y_1, 1]) = I$$

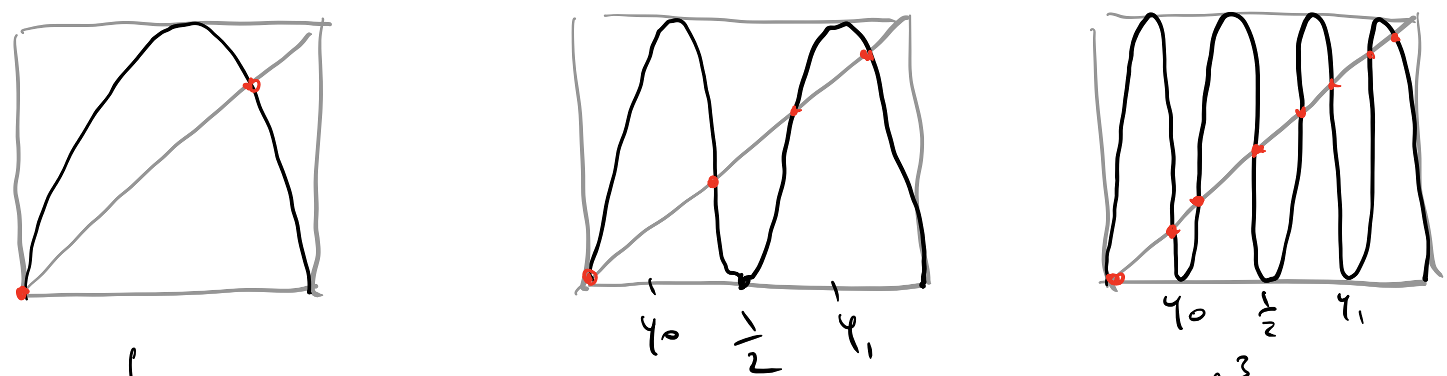


Abbiamo $2^2 = 4$ intervalli che vengono mappati in I.

Al prossimo livello 2^3 intervalli che vengono mandati in I da f_4^3,

2^4 intervalli mappati in I da f_4^4 ...

Si vede che l'n-esima iterazione di f_4 mappa 2^n intervalli in tutto I



f_4 — 2 punti fissi — $0, \frac{3}{4}$

f_4^2 — 4 punti fissi — $0, \frac{3}{4}$ + due 2-cicli per f

f_4^3 — 8 punti fissi — $0, \frac{3}{4}$ + 3 cicli

n-cicli sono punti fissi di f^n che non sono punti fissi di f

Supponiamo di avere una funzione f definita su $I = [\alpha_1, \alpha_2]$, $f : I \longrightarrow I$.

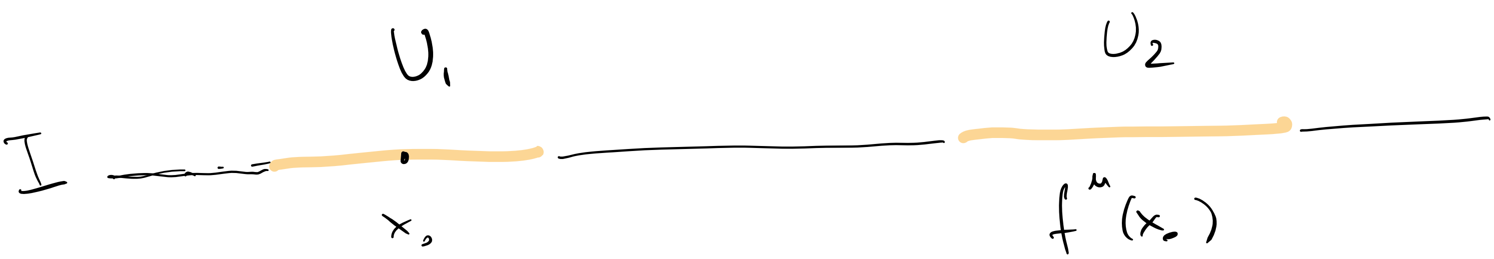
Diciamo che f è caotica se:

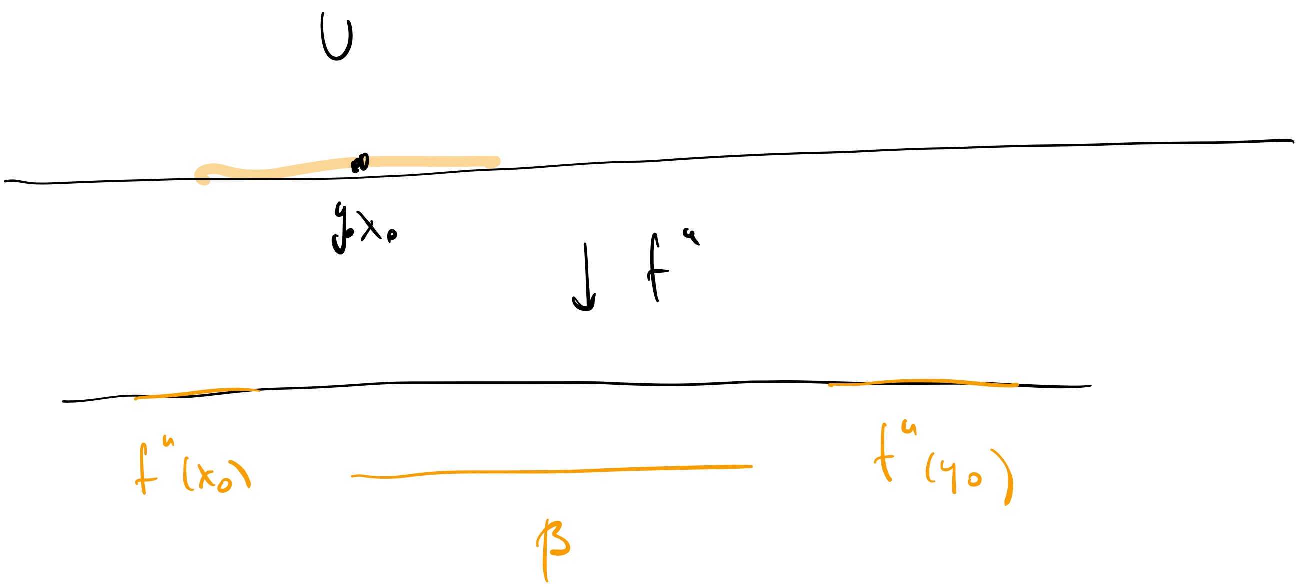
1. punti periodici di f sono densi in I

2. la funzione f è TRANSITIVA :

dati: U_1 e $U_2 \subset I$, $\exists\ x_0 \in U_1$ e $n > 0$ tale che $f^n(x_0) \in U_2$

3. f dipende in modo sensibile dalle condizioni iniziali in I : $\exists$ una costante β t.c. per $x_0 \in U \subset I$, $\exists\ y_0 \in U$ e $n > 0$ tali che $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$



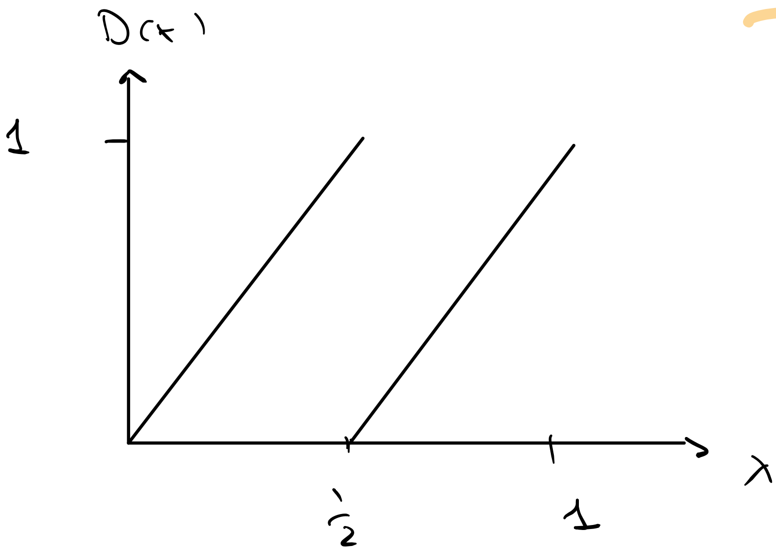


Mappa "doubling"

$$D : [0,1) \longrightarrow [0,1)$$

$$D(x) = 2x \mod 1$$

$$D(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



Punti fissi:

$$D(x) = x$$

$$2x = x \rightarrow x = 0 \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$x = 2x-1 \rightarrow x = 1 \notin \left(\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

Punto fisso $x^* = 0$

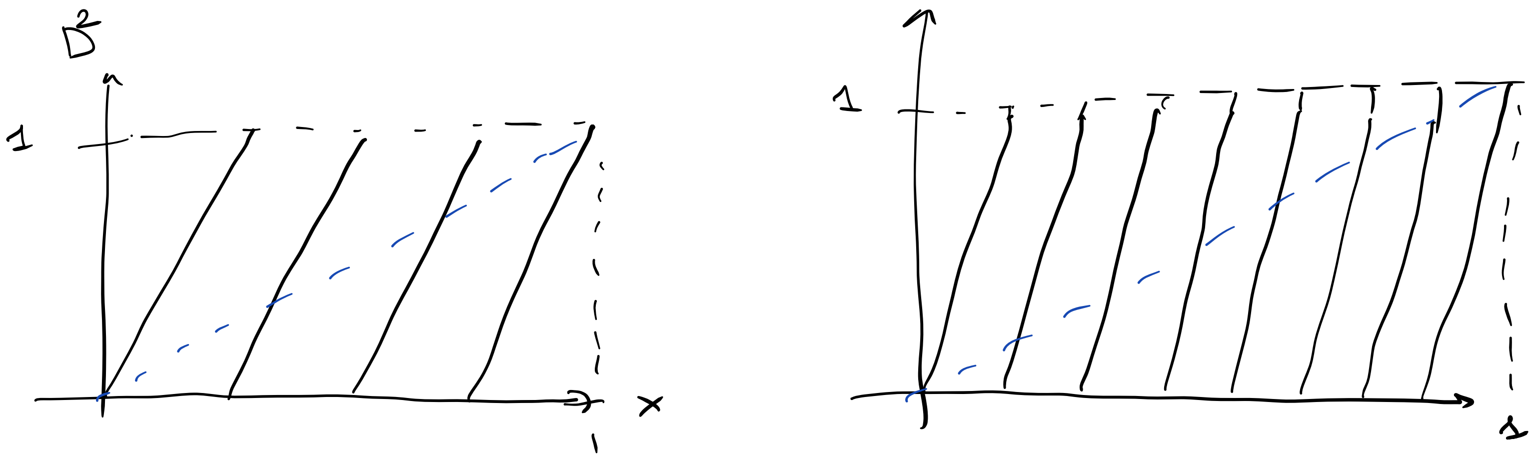
$$D^2(x) = D(D(x)) = \begin{cases} 2(2x) & 0 \leq 2x < \frac{1}{2} \\ 2(2x-1) & 0 \leq 2x-1 < \frac{1}{2} \\ 2(2x)-1 & \frac{1}{2} \leq 2x < 1 \\ 2(2x-1)-1 & \frac{1}{2} \leq 2x-1 < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 4x-1 & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 4x-2 & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 4x-3 & 3/4 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$D^2(x) = x$$

$$x^* = 0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3} \qquad (1)$$

quindi $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$ sono 2-cicli per D



In particolare D manda

$$\left[0, \tfrac{1}{2}\right] \longrightarrow [0, 1)$$

$$\left[\tfrac{1}{2}, 1\right) \longrightarrow [0, 1)$$

D^n manda l'intervallo

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \quad \text{in} \quad [0, 1) \quad \text{per}$$

$k = 0, \dots, 2^n - 2$