

FISICA NUCLEARE (7)

Decadimenti nucleari

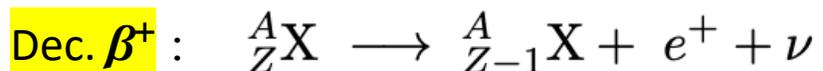
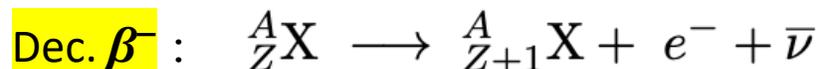
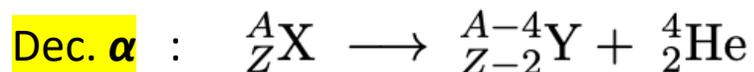
- Generalità
- Radioattività α
 - Energetica dei decadimenti α
 - Soglia di instabilità
 - Teoria del decadimento α

Generalità

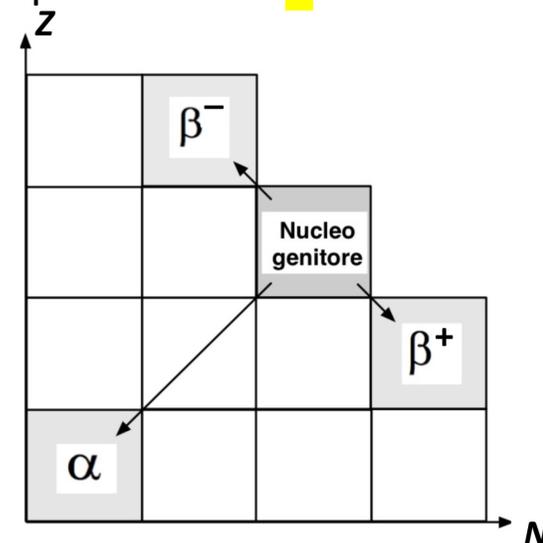
- Un nucleo stabile rispetto decadimento ${}^A_Z\text{X} \longrightarrow {}^{A-A'}_{Z-Z'}\text{X} + \sum_{i=1}^n {}^{A^i}_{Z^i}\text{b}$ se

$$\Delta M_b(A, Z) = M_X(A, Z) - M_X(A - A', Z - Z') - \sum_{i=1}^n M_b(A^i, Z^i) < 0$$

- Se invece $\Delta M_b > 0 \Rightarrow$ decadimento può avvenire **spontaneamente**
Energia rilasciata $\propto Q\text{-valore} = \Delta M_b \times c^2$: decadimento spontaneo solo se $Q > 0$
- $Q < 0$ per emiss. spontanea di **p**, **n** o **d** da ogni nuclide **naturale**
Talora **emissione ritardata n** o **p**, ma dopo emissione e^- o e^+ da decadimento β , o dopo **cattura K**
- Per alcuni nuclei pesanti $Q_\alpha(A, Z) > 0 \Rightarrow$ energeticamente possibile emissione spontanea di α



Legge dello **spostamento radioattivo** di Soddy-Fajans



Radioattività α _ Energetica

Decadimento $\alpha \sim$ **fissione spontanea** nucleo genitore **G**, a riposo in **SL** che coincide in questo caso con **CM**

- Importanza cresce con **A** \Rightarrow rep. coulomb. cresce più rapidamente del legame nucleare che satura al crescere di **A**
- $E_{k,\alpha} < 10$ MeV, e dato che $M_\alpha c^2 \simeq 3.73$ GeV \Rightarrow trattazione **non relativistica**

Conservazione energia:

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + E_{k,Y} + M_\alpha c^2 + E_{k,\alpha} \quad \text{da cui:}$$

$$E_{k,Y} + E_{k,\alpha} = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2 = \Delta M c^2 \equiv Q_\alpha \quad ; \quad E_{k,Y} = \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 \quad , \quad E_{k,\alpha} = \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2$$

Conservazione impulso:

$$M_Y v_Y = -M_\alpha v_\alpha \quad \text{da cui,} \quad v_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha$$

$$\begin{aligned} E_{k,Y} + E_{k,\alpha} &= \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} M_Y \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} v_\alpha \right)^2 + \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 = \\ &= \frac{1}{2} M_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = E_{k,\alpha} \left(\frac{M_\alpha}{M_Y} + 1 \right) = Q_\alpha \end{aligned}$$

e ancora

$$E_{k,\alpha} = \frac{M_Y}{M_\alpha + M_Y} Q_\alpha$$

ed

$$E_{k,Y} = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{k,\alpha}$$

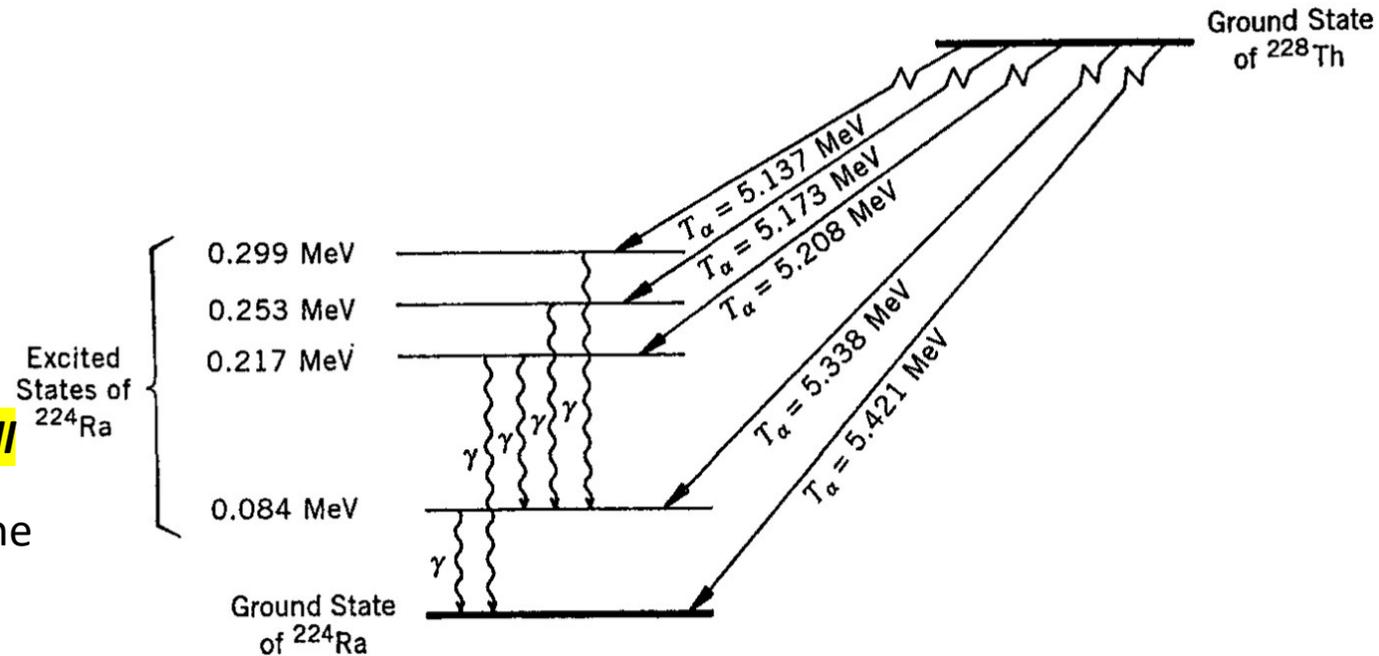
$E_{k,\alpha}$ **non** può essere < 0 , quindi **decadimento esotermico** ($Q_\alpha \geq 0$)

- Decadimento è in **due corpi** ma spettro α ha una **struttura fine**

- α del picco a massima energia prodotte **da sole**, le altre sempre **accompagnate da γ**

Presenza livelli energetici nel nucleo _ struttura a shell

- α più energetiche da **G** eccitato, α meno energetiche con **F** eccitato



Soglia di instabilità

- Nel decadimento α **nucleoni non cambiano natura** \Rightarrow può avvenire solo se aumenta energia di legame per nucleone $B(A)$ nei prodotti finali
- Da $\langle B(A) \rangle \Rightarrow$ decadimento α possibile solo dove $\partial \langle B \rangle / \partial A < 0$ e contemporaneamente $A > 60$

[$56(\text{Fe}) + 4(\text{He}) = 60$]

Q_α in termini di energie medie legame per nucleone $\langle B \rangle_{X,Y,\alpha}$ dei nuclei coinvolti

$$Q \equiv [M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M_\alpha] c^2 = A(\langle B_Y \rangle - \langle B_X \rangle) - 4(\langle B_Y \rangle - \langle B_\alpha \rangle) > 0$$

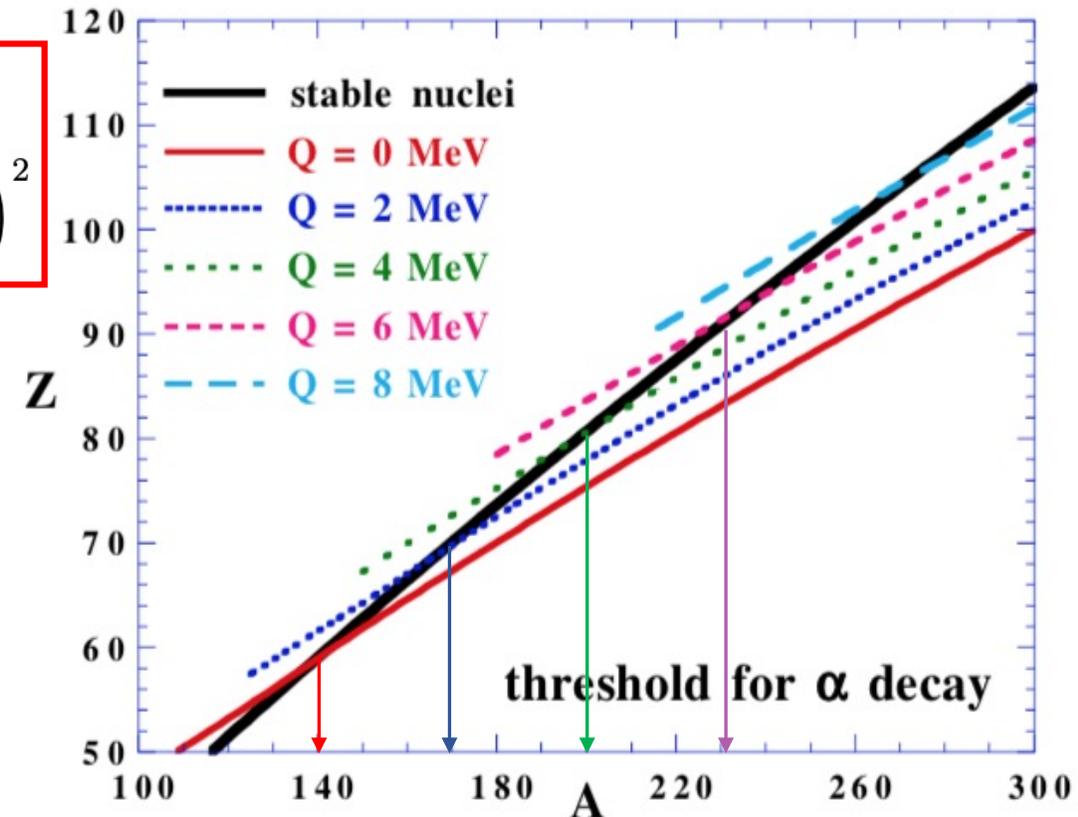
$\langle B_\alpha \rangle \approx 7.1 \text{ MeV} <$ dei nuclei pesanti coinvolti
 \Rightarrow secondo termine > 0 , e soglia di instabilità è per $A > 60$

- Da Weizäcker trascurando accoppiamento, con $Z(Z-1) \approx Z^2$, e sviluppando in serie al 1° term

$$Q = 4\langle B_\alpha \rangle - [A\langle B_X \rangle - (A - 4)\langle B_Y \rangle] = B(\alpha) - [B(X) - B(Y)] \simeq B(\alpha) + 4b_V + 4\left[\frac{2}{3}b_S + b_C Z \left(1 - \frac{Z}{3A}\right)\right] A^{-1/3} - 4b_{sim} \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2$$

Sostituendo valori b_k , sul piano (Z, A) **linee a $Q = \text{cost.}$** che individuano **soglie di instabilità** del emissione di α con energia $E_{k,\alpha} \approx Q$

- Decadimento α per $140 < A < 200$ possibile, ma con lunghissime vite medie \sim inosservabile



Geiger Nuttal

- **Dati sperim.** $\Rightarrow \lambda_\alpha$ di **G** funz. rapidamente crescente di $E_{k,\alpha}$, quindi del Q_α

Geiger e Nuttal suggerirono (1911) relazione empirica fra λ_α ed en. totale ($\approx Q_\alpha$), per ogni **catena isotopica**

$$\log \lambda_\alpha = A(Z) Q_\alpha^{-1/2} + B(Z)$$

con $A(Z)$ e $B(Z)$ determinate da **fit sui dati**

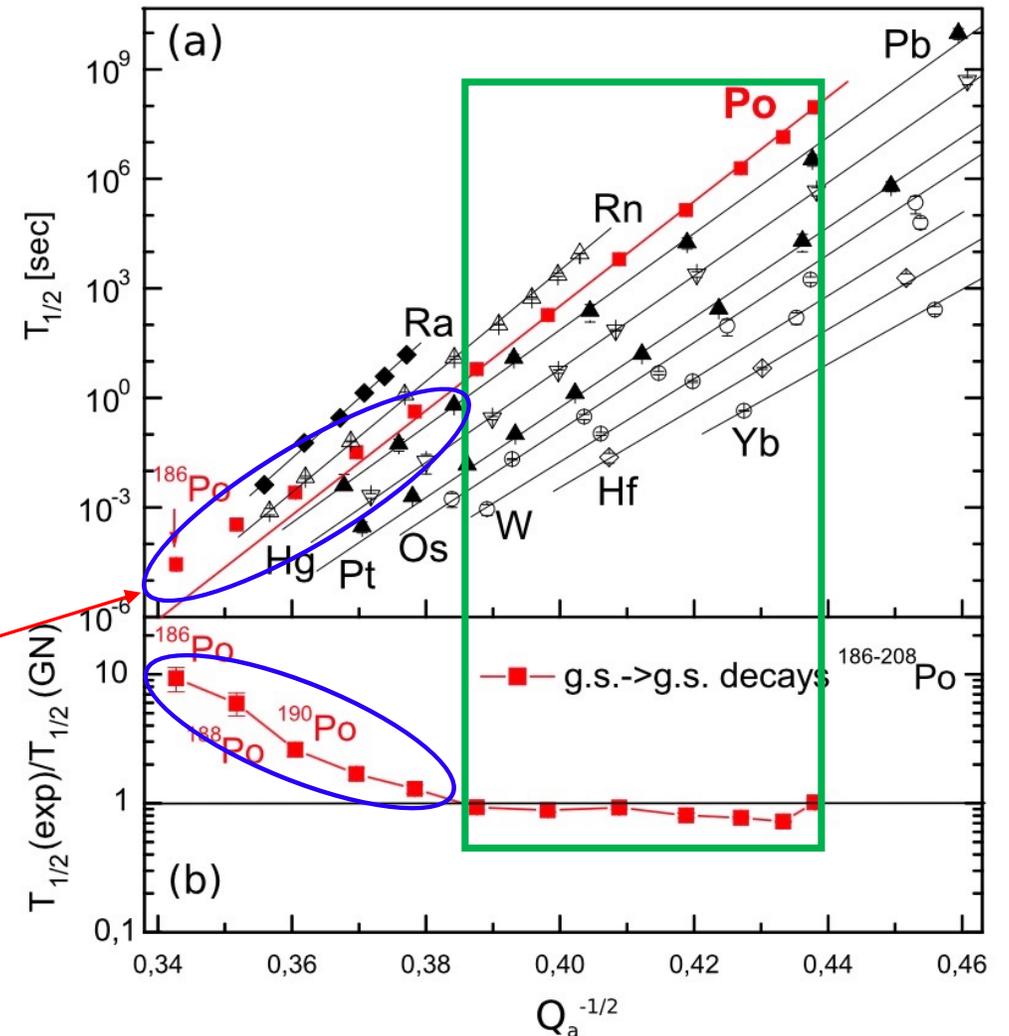
Prendendo l'esponente si ha

$$\lambda_\alpha(Q_\alpha) \propto e^{D(Z) Q_\alpha^{-1/2}}$$

descrive \sim bene dati finché dipendenza di $\log \lambda_\alpha$ dal numero di neutroni \sim **lineare**, e per A e Z pari

Teoria decadimento α deve riprodurlo

Isotopi con $T_{1/2}$ diversi anche o. di g., emettono α d'energia molto simile



Teoria del decadimento α

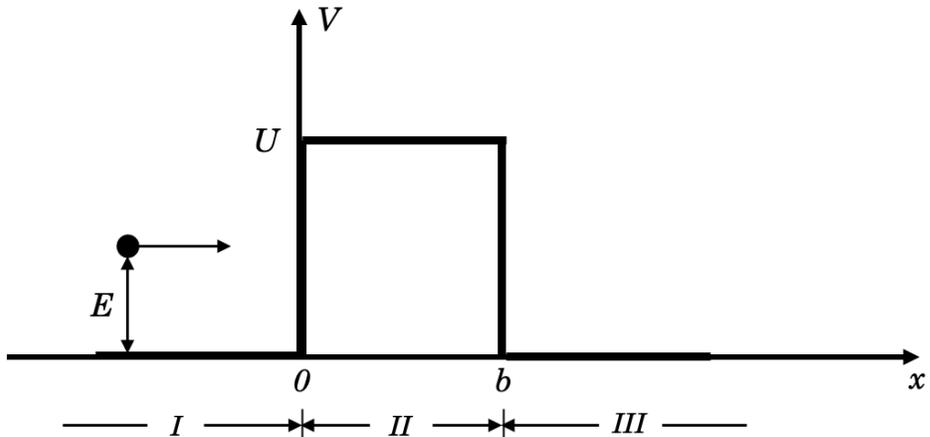
Gamow _ 1928 α non esiste nel nucleo prima del decadimento, si forma a inizio processo

A sufficiente distanza dal **CM**, poco prima del decadimento, **G** descrivibile come un sistema **$\alpha + F$** , con α che si muove in buca di potenziale

– Barriera coulombiana per **$A \simeq 200$** è **$\sim 20 \div 25$ MeV**: α con **$E_{k,\alpha}$ di pochi MeV**, non dovrebbero superarla

- Emissione α è fenomeno **squisitamente quantistico**, legato all'**effetto tunnel**

Trasmissione attraverso barriera rettangolare



Attraversamento barriera **2-dim**, **rettangolare** estesa da **0 a b**.

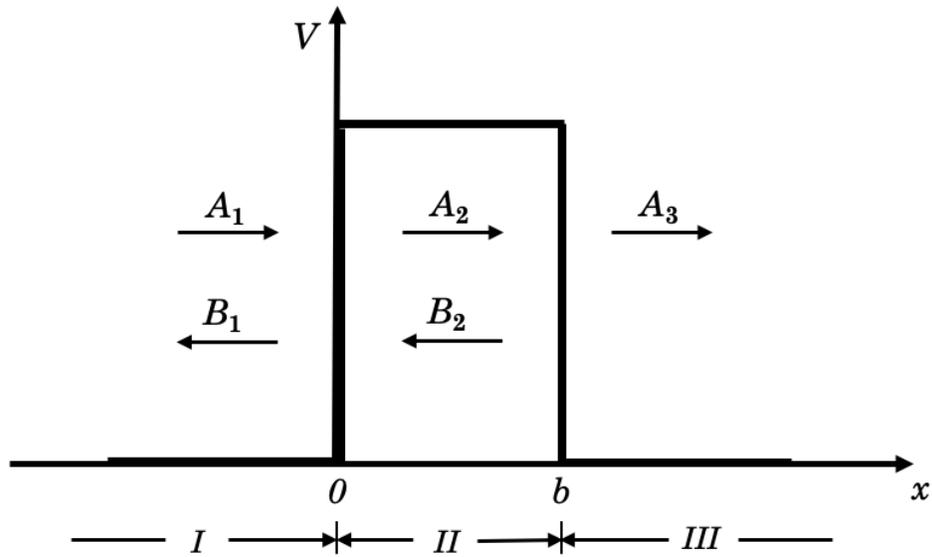
Particella descritta con f. d'onda di ampiezza **A_1** e lunghezza ridotta

$$\lambda = \hbar / mv = \hbar / \sqrt{2mE}$$

m = massa ridotta

In **$x = 0$** parte della funz. d'onda con ampiezza **$B_1 < A_1$** è riflessa nella zona **I** e parte con ampiezza **$A_2 < A_1$** è trasmessa nella zona **II**

Similmente in **$x = b$**



- **Fattore di penetrazione** e **trasparenza** barriera:

$$P = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$$

$$T = \frac{|A_3|^2 k_{III}}{|A_1|^2 k_I}$$

con $k_i = 1/\lambda_i$

Numeri d'onda da soluzione eq. di Schrödinger:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0$$

Funz. d'onda in regione I:

$$\psi_I = A_1 e^{ik_I x} + B_1 e^{-ik_I x}$$

Similmente in regione III: $\psi_{III} = A_3 e^{ik_{III} x}$, con $k_{III} = k_I \Rightarrow$ (diminuisce intensità ma non caratteristiche)

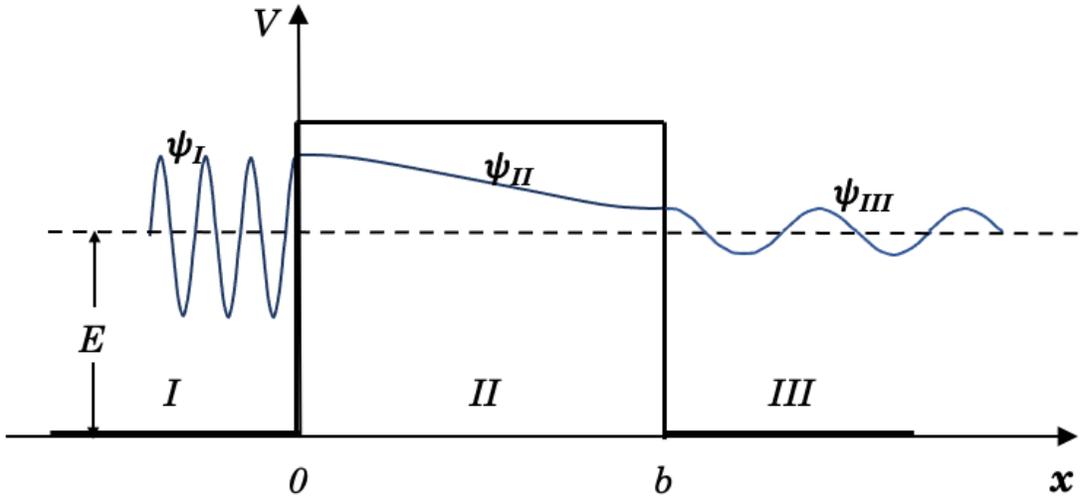
In regione II: $(E - V) = (E - U) = -E_B$, gioca ruolo **en. di legame** con $E_B > 0$

Anche in zona II funz. d'onda è sovrapp. di onde progressive e regressive

$$\psi_{II} = A_2 e^{ik_{II} x} + B_2 e^{-ik_{II} x}, \quad \text{con} \quad k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E - U)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{-2mE_B}}{\hbar}$$

Funz. d'onda contengono ampiezza nota (A_1) e quattro da determinare (B_1, A_2, B_2, A_3), per ottenere T

- **Continuità per le funz. d'onda e le loro derivate prime in $x = 0$ e in $x = b$**



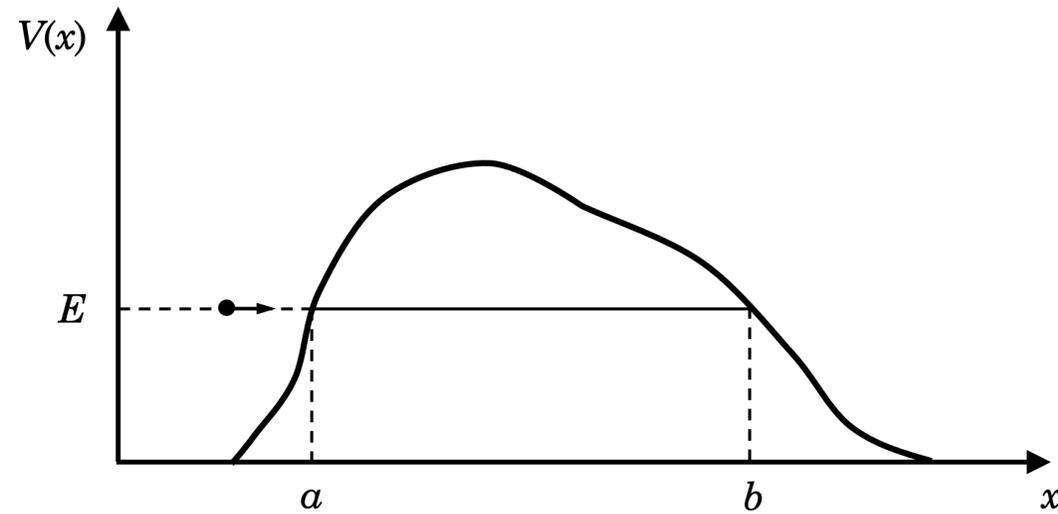
Si ha: $T = \left\{ 1 + \frac{U^2}{4E(U-E)} \left[\frac{1}{4} \left(e^{2k'_{II}b} + e^{-2k'_{II}b} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\}^{-1}$

- Per una **barriera spessa** $k'_{II}b \gg 1$, si ha

$$T \approx \frac{16E(U-E)}{U^2} e^{-2b\sqrt{2m(U-E)}/\hbar} \quad (\text{Gamow})$$

Per barriera di **forma arbitraria**, la si sostituisce con una rettangolare equivalente d'altezza U_{eff} e larghezza $(b-a)$ in modo che

$$T \approx e^{-2\sqrt{\frac{2m(U_{eff}-E)}{\hbar^2}}(b-a)} = e^{-2\int_a^b \sqrt{\frac{2m[V(x)-E]}{\hbar^2}} dx}$$



Trasmissione attraverso barriera di potenziale nucleare

- Particelle confinate da barriera a simmetria sferica**

Si fattorizza funzione d'onda $\psi(r, \vartheta, \varphi) = f(r) \Theta(\vartheta) \Phi(\varphi) = f(r) Y(\vartheta, \varphi)$

Eq. Schrödinger \Rightarrow parte radiale e angolare, come per atomo di idrogeno

Soluzioni parte angolare: armoniche sferiche

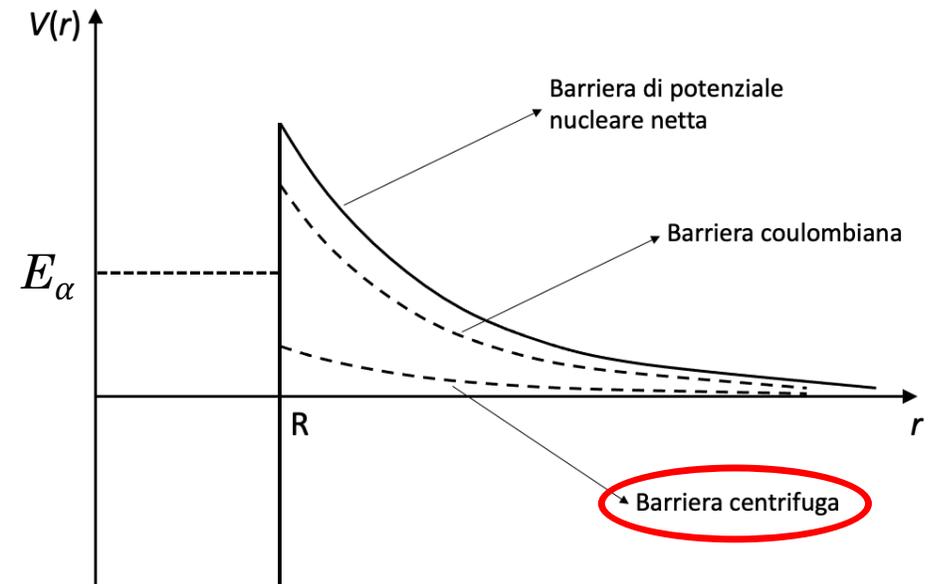
$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + |m|)!}} P_\ell^m(\cos\vartheta) e^{im\varphi}$$

Fisica sta in equazione radiale che con $u(r) = rf(r)$

diventa

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[(E_{tot} - V) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u = 0$$

c'è anche **potenziale centrifugo** che concorre ad accrescere barriera se $l \neq 0$ e **vale anche per particelle neutre**



Costante di decadimento α

- **Relazione fra T e $\lambda_\alpha = 1/\tau_\alpha$**

Si considerino molti nuclei pronti a decadere $\alpha \leftrightarrow$ moltitudine α confinate da barriera descrivibile come onda di intensità I_0

Si suppone che a $t = 0$ ogni α incida su barriera e una frazione T di esse la attraversi

- Intensità onda riflessa da barriera al primo tentativo d'attraversamento è $(1-T)I_0$

Dopo n tentativi nel tempo t

$$I_n = (1 - T)^n I_0 = I_0 e^{n \ln(1-T)} \quad \text{con} \quad \lim_{T \rightarrow 0} I_n = I_0 e^{-nT} \quad (1^\circ \text{ ord.})$$

Se $v =$ velocità media di α in nucleo di raggio $R \Rightarrow$ tempo medio fra due successivi tentativi d'attraversamento è $\Delta t = 2R/v$, e numero medio n di tentativi nel tempo t è $n = t/\Delta t = vt/2R$. Quindi:

$$I_n = I_0 e^{-T \frac{v}{2R} t}$$

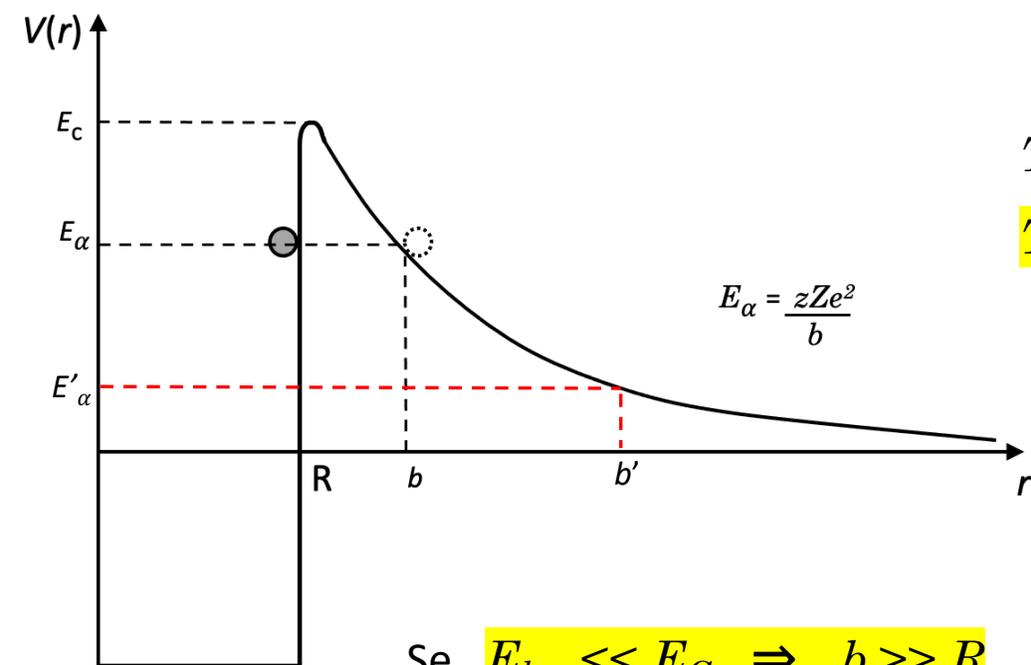
Con energia realistica di ~ 8 MeV per le $\alpha \Rightarrow dn/dt = v/2R \approx 10^{21}$ e si può esprimere I_n come **funz. continua** di t

$$I_n \longrightarrow I(t) = I_0 e^{-\lambda_\alpha t}$$

con

$$\lambda_\alpha = T \frac{v}{2R} = T \frac{dn}{dt} = T \lambda_0$$

λ_0 cambia poco da nucleo a nucleo, mentre la trasparenza T cambia sensibilmente



T per potenziale come in figura, integrando da R a b si ottiene $T = e^{-G}$ con fattore G di Gamow

$$G = \sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \left(\arccos\sqrt{\frac{R}{b}} - \sqrt{\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2}} \right)$$

da cui: $\lambda_\alpha = \lambda_0 e^{-G}$

Se $E_{k,\alpha} \ll E_C \Rightarrow b \gg R$ e si può porre:

$$G \simeq \sqrt{\frac{2mzZe^2b}{\pi\epsilon_0\hbar^2}} \sim (E_{k,\alpha})^{-1/2}, \quad \text{con } b = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 E} \quad \text{da cui la legge di Geiger-Nuttal}$$

- Per la vita media α del ^{232}Th , che emette α da 4.05 MeV con τ misurata di 1.39×10^{10} y, si ottiene dal calcolo $\tau = 1.3 \times 10^{10}$ y
- Probabilità emissione **dipende da $1/m_\alpha$** , come mostra fattore di Gamow (da ricordare per fissione)

	Q_α (MeV)	r_s (fm)	r_c (fm)	G	τ_{exp} (s)	τ_{th} (s)
${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th}$	4.27	8.52	60.7	0.53	2.0×10^{17}	3.3×10^{17}
${}^{234}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{230}_{90}\text{Th}$	4.86	8.49	53.3	0.51	1.1×10^{13}	1.1×10^{13}
${}^{230}_{90}\text{U} \rightarrow {}^{226}_{88}\text{Ra}$	4.77	8.45	53.1	0.51	3.5×10^{12}	3.9×10^{12}
${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn}$	4.87	8.41	50.9	0.50	7.4×10^{10}	7.4×10^{10}
${}^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po}$	5.59	8.37	43.3	0.46	4.8×10^5	4.2×10^5
${}^{218}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\text{Pb}$	6.11	8.33	38.7	0.43	2.6×10^2	1.6×10^2 (*)
${}^{214}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{210}_{82}\text{Pb}$	7.84	8.28	30.1	0.36	2.3×10^{-4}	1.1×10^{-4} (*)
${}^{210}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\text{Th}$	5.41	8.24	43.7	0.47	1.7×10^7	5.8×10^5 (*)

(*) Isotopi leggeri del Polonio si scostano molto dalle predizioni della teoria di Gamow, per la asimmetria dei loro stati fondamentali ...