LEGGI DI CONSERVAZIONE in meccanica Lagrangiana

Una funzione $I : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$ $\quad (\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

è chiamata **COSTANTE DEL MOTO** (o integrale primo),

per un sistema Lag. a n gradi di lib. con Lagrangiana L,

se la funzione composta $I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$ è cost. in

t per $\bar{q}(t)$ che soddisfa le eq. di Lagrange, cioè

$$\frac{d}{dt}\Big(I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \Big) = 0 \quad \text{per } \bar{q}(t) \text{ che risolve eq. Lag.}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial I}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial I}{\partial t}$$

⇝ Se conosco la funzione $I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ e so che è una cost. del moto, allora posso scrivere l'eq.

$$I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \underset{\text{cost.}}{I_0} \quad \leftarrow \text{famiglia (al variare di } I_0\text{) di eq. diff. del 1° ordine}$$

che il moto reale sicuramente soddisfa

↳ posso utilizzarla per risolvere il problema di integrare le eq. di Lagrange

Conservazione dell' ENERGIA in sistemi Lagrangiani

Def. Per sistemi Lagrangiani a n gradi di lib. e lagrangiana $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ definiamo

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \sum_{h=1}^{n} \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Calcoliamo la derivata $\frac{d}{dt}$ di $E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$

$$\frac{d}{dt} E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \sum_{h=1}^{m} \left(\cancel{\ddot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}} + \dot{q}_h \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) -$$

$$- \sum_{h=1}^{m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} \dot{q}_h + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_{h=1}^{m} \dot{q}_h \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \right)}_{\text{è valutata in } \bar{q}(t)} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

se $\bar{q}(t)$ risolve eq. di Lagr.

$$= - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Invariante della Lagrangiana sotto traslazioni temporali

$\Rightarrow$ Se L NON DIP. ESPLICITAM. dal TEMPO $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \right)$

allora $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ è una COST. del MOTO

Per un sistema meccanico conservativo

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{hk} a_{hk}(q)\, \dot{q}_h \dot{q}_k - V(\bar{q})$$

è una funzione OMOGENEA di grado 2 nelle $\dot{q}_h$

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_{h=1}^{m} \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - L$$

Def. Funzione $f(x_1, \dots, x_N)$ si dice OMOGENEA di grado α se $\forall \lambda > 0$ e ogni scelta di $x_1, \dots, x_N$ si ha

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) = \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_N)$$

ES. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2^2 + x_3 x_1 \qquad \alpha = 2$

$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{x_1}} \qquad \alpha = 1/2$

Lemma f omogenea di grado $\alpha \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f$

Dim. $0 = \frac{d}{d\lambda} \left[f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N) - \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_N) \right] \Big|_{\lambda=1} =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots \lambda x_N)}{\partial x_i} x_i - \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_N) \right) \Big|_{\lambda=1} \quad //$$

$$E = \sum_{k=1}^{m} \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}}_{T \text{ omog. di grado } 2} - \overbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{m} \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}}}^{=0} - T + V =$$

$$= 2T - T + V = T + V$$

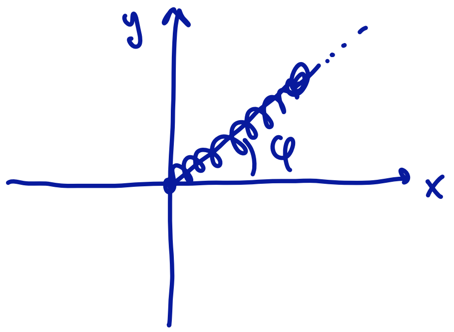
- Nel caso in cui abbiamo forze puramente posizionali E è l'energia totale del sist. meccanico

- Se $V = V_0(\bar{q}) + V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ ← lineare omog. in $\dot{\bar{q}}$ ← $\alpha = 1$

$$\Rightarrow - \sum_{k=1}^{m} \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = -V_1$$

$$E = 2T - V_1 - T + V_0 + V_1 = T + V_0$$

ESEMPIO: oscillatore armonico bidimensionale



$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)$$

$\omega^2 = k/m$

Eq. di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \to \ddot{x} = -\omega^2 x \rightsquigarrow x(t) = A_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \to \ddot{y} = -\omega^2 y \rightsquigarrow y(t) = A_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

Passiamo a coord. polari: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{m}{2}\omega^2 r^2$$

← L non dip. esplicitam. dalla coord. φ

→ eq. Lag.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \to \ddot{r} = -\omega^2 r + r\dot{\varphi}^2$$

$$p_\varphi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} = 0 \to \frac{d}{dt}(m r^2\dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow m r^2 \dot{\varphi} \text{ è una}$$

COST. DEL MOTO

Sapendo che $m r^2 \dot{\varphi} = \ell$ (cost.) $\Rightarrow \dot{\varphi} = \dfrac{\ell}{m r^2}$ che posso sostituire

in prima eq.

$$\underbrace{\ddot{r} = -\omega^2 r + \frac{\ell^2}{m^2 r^3}}$$

Equazione in incognita $r(t)$.

Viene da Lagrangiana $L_{eff.} = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} - \dfrac{m\omega^2}{2}r^2 - \dfrac{\ell^2}{2mr^2}$ ← come si arriva a questa Lagrangiana?

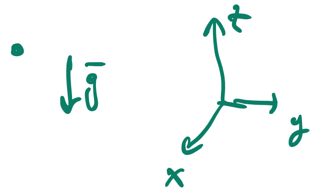
COORDINATE CICLICHE o IGNORABILI

Consideriamo un sist. lagr. a n gradi di lib. e supponiamo che L NON dip. esplicitam. da alcune coordinate (dette COORDINATE CICLICHE), $q_{m+1}, \dots, q_n$

$$L = L(q_1, \dots, q_m, \underbrace{\dot q_1, \dots, \dot q_n}, t)$$

Se L non dipendesse da una $\dot q$, la matrice cinetica avrebbe una riga e una colonna di zeri e non sarebbe strettamente definita positiva

ES. Pto mobile soggetto a forza di gravità.



$$T = \frac{1}{2} m (\underbrace{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}_{\dot q_{1,2,3}}) \qquad V = mgz$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - mgz = L(z, \dot x, \dot y, \dot z)$$

$\longrightarrow$ x e y sono COORD. CICLICHE

OSSERVAZIONE: quando $q_{\hat\imath}$ è coordinata ciclica, la Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione

$$q_h \mapsto q_h \quad h \neq \hat\imath \qquad\qquad \dot q_h \mapsto \dot q_h \quad \forall h$$

$$q_{\hat\imath} \mapsto q_{\hat\imath} + c \qquad c \text{ cost.}$$

[Possiamo definire delle funzioni (VARIABILI DINAMICHE)

$$p_\ell(\bar q, \dot{\bar q}, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q_\ell}(\bar q, \dot{\bar q}, t)$$

dette MOMENTI CONIUGATI.]

Se $q_{m+1}, \dots, q_n$ sono coordinate cicliche, allora

$$\frac{d}{dt} p_\ell(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \qquad \ell = m+1, \dots, n$$

$$= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{se il moto } \bar{q}(t) \\ \text{soddisfa le eq. di Lagr.}}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_\ell}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) \underset{\substack{\uparrow \\ q_\ell \text{ è} \\ \text{ciclica}}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ i momenti coniugati p_ℓ $(\ell = m+1, \dots, n)$, relativi alle coord. cicliche, sono COSTANTI DEL MOTO

[p_ℓ è detto momento coniugato di q_ℓ]

ES) $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

x è ciclica $\quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

y " " $\quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$

$\rightarrow$ quantità di moto lungo x e y è conservata

Usiamo ora queste cost. del moto per "ridurre i gradi di libertà"

- Prendiamo $p_\ell(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

- Scriviamo le relazione

$$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{è una cost.}}}{\tilde{p}_\ell} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \underbrace{\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n}_{\substack{\text{prendiamo queste come} \\ \text{le } n-m \text{ incognite delle} \\ n-m \text{ equazioni}}}) \qquad \ell = m+1, \dots, n$$

- Risolviamo $\uparrow$ nelle $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_\ell = u_\ell(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

- Definiamo una Lagrangiana efficace (o Lagrangiana RIDOTTA)

$$L^*(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t \,; \underbrace{\tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n}_{\text{PARAMETRI}}) \equiv$$

$$\equiv L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, u_{m+1}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

$$\dots u_n(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t))$$

$$- \sum_{\ell=m+1}^{n} \tilde{p}_\ell \, u_\ell(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

$$L^* = \left(L - \sum_{k=m+1}^{n} \tilde{p}_k \dot{q}_k \right) \Bigg|_{\dot{q}_{k=m+1,\dots,n} = u_\ell}$$

Prendiamo L^* e la trattiamo come la Lagrangiana di un sistema (ausiliario) a $\underline{m}$ gradi di libertà.

Eq. di Lagrange per L^* $\quad h = 1, \dots, \underline{m}$

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} + \cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}}_{= p_\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial q_h}} - \cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n} \tilde{p}_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial q_h}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} + \cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell}}_{= p_\ell} \frac{\partial u_\ell}{\partial \dot{q}_h}} - \cancel{\sum_{\ell=m+1}^{n} \tilde{p}_\ell \frac{\partial u_\ell}{\partial \dot{q}_h}} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \quad \Big| \text{ valutati in } q_h(t)$$

$$h = 1, \dots, \underline{m}$$

$\Rightarrow$ Le equazioni di Lagr. di L^* coincidono con le prime $\underline{m}$ eq. di Lagr. di L

$\Rightarrow$ le $q_h(t)$ $(h=1,\dots,m)$ che risolvono le equazioni di Lagrange di L^*, risolvono anche le eq. di Lagr. di L.

Come determiniamo le $q_k(t)$ $k=m+1,\dots,n$?

Le rispettive eq. di Lagrange sono state utilizzate per ricavare le $\dot q_k$ in funz. delle $q_h, \dot q_h$ $h=1,\dots,m$ (u_k)

$$\rightarrow \quad \dot q_k(t) = \underbrace{u_k(q_1(t),\dots,q_m(t),\dot q_1(t),\dots,\dot q_m(t),\tilde p_{m+1},\dots,\tilde p_n,t)}_{\text{Funzione di } t \text{ nota una volta risolte le } m \text{ eq. di Lagr. di } L^* \text{ e invertito } p_\ell(q,\dot q,t)=\tilde p_\ell}$$

$\downarrow$

eq. diff. del 1° ordine per le $q_k(t)$, del tipo $\dot x = f(t)$, cioè sono risolvibili per integrazione (quadratura)

ES) $L=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)-mgz$ $\qquad n=3 \quad m=1$

$\tilde p_x = m\dot x \rightsquigarrow \dot x = \tilde p_x/m \qquad \tilde p_y = m\dot y \rightsquigarrow \dot y = \tilde p_y/m$

$$L^* = L - \tilde p_x \dot x - \tilde p_y \dot y \Big|_{\dot x=\frac{\tilde p_x}{m},\,\dot y=\frac{\tilde p_y}{m}} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\tilde p_x}{m}\right)^2+\left(\frac{\tilde p_y}{m}\right)^2+\dot z^2\right]-mgz-\frac{\tilde p_x\tilde p_x}{m}-\frac{\tilde p_y\tilde p_y}{m}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot z^2 - mgz - \frac{\tilde p_x^2}{2m}-\frac{\tilde p_y^2}{2m} = L^*(z,\dot z,\tilde p_x,\tilde p_y)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot z} = m\ddot z \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg \quad \Rightarrow \quad \ddot z = -g \rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2+v_0^z t + z_0$$

$x(t), y(t)$? usiamo
$$\begin{cases} \dot x = \tilde p_x/m \longrightarrow x(t) = \frac{\tilde p_x}{m}t + x_0 \\ \dot y = \tilde p_y/m \longrightarrow y(t) = \frac{\tilde p_y}{m}t + y_0 \end{cases}$$