POTENZIALI DIPENDENTI DA VELOCITÀ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad (\neq)$$

se $Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h}$ $\qquad L = T - V$

Ci si può ridurre alla forma $(\neq)$ anche nel caso più generale in cui (*) vedi alla fine per definit.

$$Q_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h}$$

con $V = V(\bar q, \dot{\bar q}, t)$

Assumiamo che V dip. LINEARM. da $\dot{\bar q}$

ES | FORZA DI CORIOLIS

$$\bar F = 2m\, \dot{\bar q} \times \bar\omega$$

(Forza apparente in un sist. di rif. rotante con $\bar\omega$ che poi prendiamo COST.)

(Forza centrifuga è puram. posizionale da

$$V_c(\bar q) = -\frac{1}{2} m \omega^2 d^2(\bar q)$$

distanza da asse di rotaz.)

Prodotto vett. in $\mathbb{R}^3$

$$\bar v \times \bar u = \bar e_1 (v_2 u_3 - v_3 u_2) + \bar e_2 (v_3 u_1 - v_1 u_3) + \bar e_3 (v_1 u_2 - v_2 u_1) =$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det \begin{pmatrix} \bar e_1 & v_1 & u_1 \\ \bar e_2 & v_2 & u_2 \\ \bar e_3 & v_3 & u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, \bar e_i\, v_j\, u_k$$

tensore totalm. antisimm.

$(\Rightarrow \epsilon_{iij} = 0)$ $\qquad \epsilon_{123} = 1$

$$\left(\epsilon_{123} = 1 \rightarrow \epsilon_{213} = -1 \rightarrow \epsilon_{231} = 1 \rightarrow \rightarrow \epsilon_{321} = -1 \right)$$

Prop. La forza di Coriolis con $\bar{\omega}$ costante si ricava attraverso la formula

$$F_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V_1}{\partial q_j} \quad \text{con} \quad V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{q}$$

Dim.

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \left(\sum_{ijk} \overset{\epsilon_{ijk}}{\bar{e}_i}\, a_j b_k \right) \cdot \left(\sum_{l} c_l \bar{e}_l \right) =$$

$$= \sum_{i} \left(\sum_{jk} a_j \overset{\epsilon_{ijk}}{b_k} \right) c_i =$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, a_j b_k c_i = \sum_{ijk} \epsilon_{kij}\, b_k c_i a_j =$$

$$= \sum_{j} \left(\sum_{ki} \epsilon_{jki}\, b_k c_i \right) a_j = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} =$$

$$= \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

$$V_1 = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{q} = -m\, \dot{\bar{q}} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{q})$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_h} = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\bar{\omega} \times \bar{q})_h \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\bar{\omega} \times \dot{\bar{q}})_h = m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h$$

$$F_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_1}{\partial q_h} = 2m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h \quad //$$

$$L = \underset{\uparrow}{T} - \underset{\uparrow}{V_c} - V_1 \leftarrow \text{forza di Coriolis}$$

forza centrifuga

Energia cinetica in coordinate $\bar{q}$ solidali al sistema di riferimento rotante

In un sistema di riferimento inerziale con coordinate x, y, z:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad \leftarrow V(x,y,z) = 0$$

Trasformazione di coordinate

$$x = q_1 \cos \omega t - q_2 \sin \omega t \qquad \leftarrow x = x(\bar{q}, t)$$

$$y = q_1 \sin \omega t + q_2 \cos \omega t \qquad \vdots$$

$$z = q_3$$

$$\tilde{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L(x(\bar{q},t), y(\bar{q},t), z(\bar{q},t), \dot{x}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t), \dot{y}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t), \dot{z}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t), t)$$

$$\dot{x} = \dot{q}_1 \cos \omega t - \dot{q}_2 \sin \omega t - q_1 \omega \sin \omega t - q_2 \omega \cos \omega t$$

$$\dot{y} = \dot{q}_1 \sin \omega t + \dot{q}_2 \cos \omega t + q_1 \omega \cos \omega t - q_2 \omega \sin \omega t$$

$$\dot{z} = \dot{q}_3$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)}_{T(\dot{q})\ \text{en. cin. nel sist. rotante}} + \underbrace{\frac{m\omega^2}{2} (\underbrace{q_1^2 + q_2^2}_{\hookrightarrow \text{dist. dall'asse } z})}_{-V_c(\bar{q})} +$$

$$+ m\omega \underbrace{(q_1 \dot{q}_2 - q_2 \cdot \dot{q}_1)}_{(\bar{q} \times \dot{\bar{q}})_3} \qquad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$m\bar{\omega} \cdot (\bar{q} \times \dot{\bar{q}}) = -m\bar{\omega} \cdot (\dot{\bar{q}} \times \bar{q}) =$$

$$= -m (\bar{\omega} \times \dot{\bar{q}}) \cdot \bar{q} = - V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$$

(*) Per $\frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h}$, dato $V_1 = V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$, si intende

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial^2 V_1}{\partial q_\ell \partial \dot{q}_h} \dot{q}_\ell + \frac{\partial^2 V_1}{\partial t \partial \dot{q}_h}$$

Forze Elettromagnetiche

$$\bar{F} = e\left(\bar{E} + \underbrace{\dot{\bar{q}} \times \bar{B}}_{\bar{F}_m}\right)$$

$\bar{F}_m$ forza di Lorentz $\rightsquigarrow$ analoga a Forza di Coriolis

$\bar{E}$ e $\bar{B}$ sono deducibili da potenziale scalare $\phi(\bar{q},t)$ e potenziale vettore $\bar{A}(\bar{q},t)$:

$$\bar{E} = -\left(\bar{\nabla}\phi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) \qquad \bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

Si può dimostrare che $\bar{F}$ si deriva da un potenziale dato da:

$$V(\bar{q},\dot{\bar{q}}) = e\phi - \underbrace{e\,\dot{\bar{q}}}_{\text{corrente generata da moto di carica } e} \cdot \bar{A}$$

Dim.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} = \frac{d}{dt}\left(-e A_h(\bar{q},t)\right) - e\frac{\partial \phi}{\partial q_h} + e\,\dot{\bar{q}} \cdot \frac{\partial \bar{A}}{\partial q_h} =$$

$$= -e\frac{\partial A_h}{\partial t} - e\sum_k \frac{\partial A_h}{\partial q_k}\dot{q}_k - e\frac{\partial \phi}{\partial q_h} + e\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial A_l}{\partial q_h}$$

$$= e\left[-\left(\frac{\partial \phi}{\partial q_h} + \frac{\partial A_h}{\partial t}\right) - \left((\bar{\nabla} \times \bar{A}) \times \dot{\bar{q}}\right)_h\right]$$

$$(\bar{\nabla} \times \bar{A})_i = \sum_{m,l} \epsilon_{iml}\,\partial_m A_l \qquad = \sum_{i,j} \epsilon_{hij} \sum_{m,l} \epsilon_{iml}\,\partial_m A_l\,\dot{q}_j$$

$$= \sum_{j,m,l} (\delta_{hl}\delta_{jm} - \delta_{hm}\delta_{jl})\,\partial_m A_l\,\dot{q}_j =$$

$$= \sum_m \partial_m A_h\,\dot{q}_m - \sum_j \partial_h A_j\,\dot{q}_j \quad //$$

La Lagrangiana di una particella carica in
$\Rightarrow$ un campo elettromagnetico è

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\dot{\bar{q}}^2 + e\phi - e\,\dot{\bar{q}}\cdot\bar{A}}$$

$\rightsquigarrow$ le equazioni di Lagrange corrispondenti sono $m\ddot{\bar{q}} = \bar{F}$.

Prendiamo un caso particolare, cioè $\bar{B}=0$.

$\bar{B}=0 \Rightarrow \bar{\nabla}\times\bar{A}=0 \Rightarrow \bar{A}=\bar{\nabla}\chi$ (almeno localmente)

cioè $A_i = \frac{\partial\chi}{\partial q_i} \Rightarrow -e\,\dot{\bar{q}}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial q_i} =$ "$\frac{d}{dt}(-e\chi)$"

$\rightsquigarrow$ Se $\bar{B}=0$ il termine di accoppiamento col potenziale vettore è una "derivata totale" e quindi non influisce sulle eq. di Lagrange che rimangono q.le della particella libera.

Se $\bar{E}=0 \Rightarrow \phi$ cost., cioè anch'esso è "derivata totale".

Abbiamo ritrovato quanto già sapevamo, cioè che la dinamica (classica) è determinata dai campi elettrico $\bar{E}$ e magnetico $\bar{B}$. Se tali campi sono nulli, non vi è nessuna forza e quindi $m\ddot{\bar{q}}=0$.

(L dipende da ϕ e $\bar{A}$.)