SISTEMI DINAMICI

$f : I \longrightarrow I$ f è CAOTICA

- punti periodici di f sono densi
- f è transitiva
- f dipende in modo sensibile dalle condizioni iniziali

$x_0 \in U$, $\exists\, y_0 \in U$ t.c.

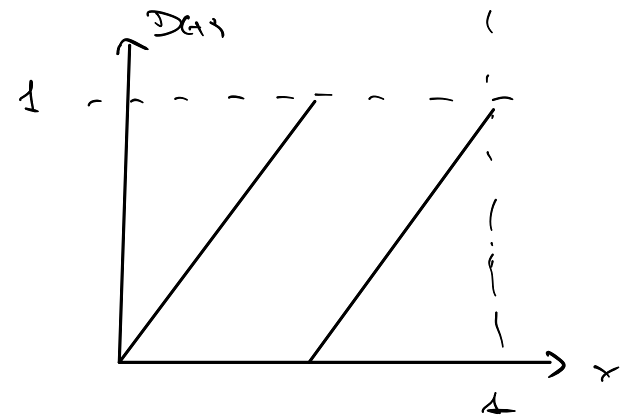
$$\left| f^n(x_0) - f^n(y_0) \right| > \beta$$

per n abbastanza grande

Vorremmo dire che $f_{\lambda=4}$ (mappa logistica discreta) è caotica.

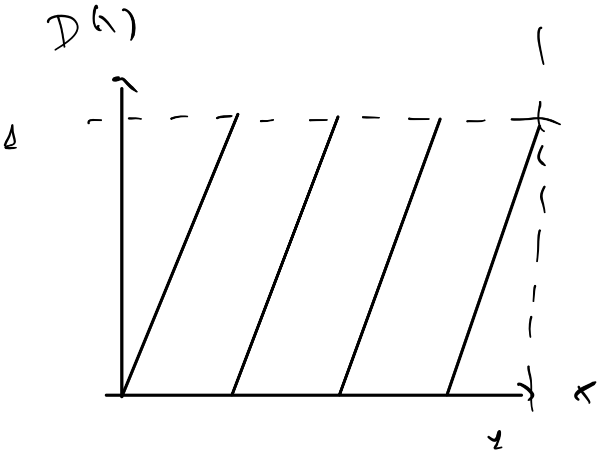
DOUBLING MAP $D : [0,1) \longmapsto [0,1)$

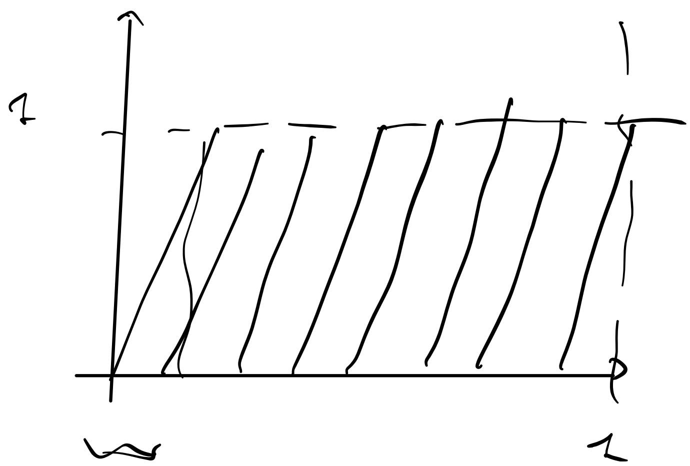
$$D(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



D ha un punto fisso in $x^* = 0$

$$D^2(x) = D\left(D(x)\right) = \cdots = \begin{cases} 4x & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 4x-1 & \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ 4x-2 & \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4} \\ 4x-3 & \frac{3}{4} \le x < 1 \end{cases}$$





D manda l'intervallo

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \text{ in } [0,1)$$

$k = 0, \ldots, 2^n - 2$

$n = 2 \quad k = 0, 1, 2 \qquad \left[0, \frac{1}{4}\right] \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right] \ldots$

Ogni intervallo ha lunghezza $\frac{1}{2^n}$

D^n interseca $y = x$ in qualche punto

visto che manda ogni intervallo in

Tutto I.

Quindi ci sarà un punto $D^4 x = x$

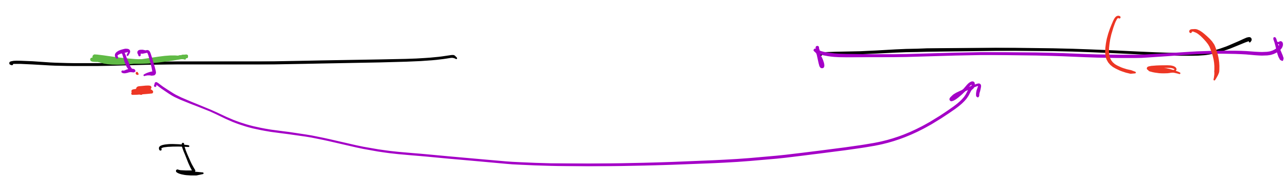
$\Rightarrow \exists$ punto periodico per D

Questo vale per ogni intervallo, e siccome gli intervalli hanno lunghezza $\frac{1}{2^n}$ $\Rightarrow$ i punti periodici sono densi in $I = [0,1)$.

$\frac{1}{2^n}$ per $n \to \infty$

TRANSITIVITA': prendiamo un aperto J, per n grande abbastanza troviamo un intervallo $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \subset J$

D^n manda J in tutto $I = [0,1)$



DATI INIZIALI: x_0, $x_0 \in U$, D^n manda questo aperto in tutto I

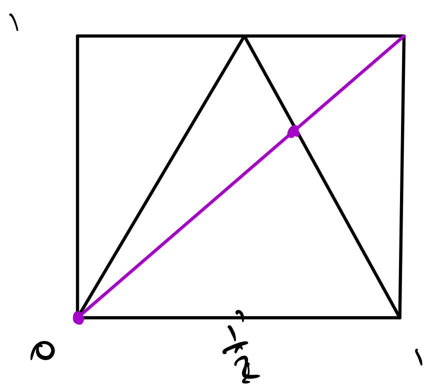
$\exists\, y_0 \in U$ t.c. $\left| D^n(x_0) - D^n(y_0) \right| \geq \beta = \frac{1}{2}$

per n grande abbastanza.

$\Rightarrow$ D è caotica.

MAPPA A TENDA

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x + 2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

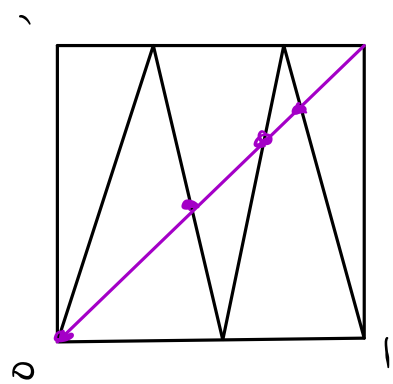


$x \in [0, \frac{1}{2}]$ $\quad 2x = x \Rightarrow x^* = 0$

$x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $\quad x = 2(1-x) \Rightarrow x^* = \frac{2}{3}$

$$T^2(x) = T(T(x)) = \begin{cases} 2(2x) & 0 \leq 2x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-2x) & \frac{1}{2} \leq 2x \leq 1 \\ 2 \cdot 2(1-x) & 0 \leq 2(1-x) \leq 1 \\ 2 - 2(2-2x) & \frac{1}{2} \leq 2(1-x) \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2 - 4x & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2 + 4x & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 4 - 4x & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



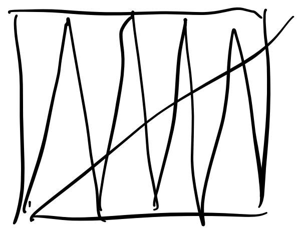
$4x = x \longrightarrow x^* = 0$

$2 - 4x = x \longrightarrow x^* = \frac{2}{5} \longrightarrow$

$-2 + 4x = x \longrightarrow x^* = \frac{2}{3}$

$4 - 4x = x \longrightarrow x^* = \frac{4}{5} \longrightarrow$

pti periodici di periodo 2 per T



$\longrightarrow$ T^n ha 2^n punti fissi

Per esercizio: dimostrare che T è caotica.

$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \longrightarrow I$ lunghezza $\frac{1}{2^n}$

$[\quad] \longrightarrow I$

Consideriamo due intervalli I, J. Prendiamo $f: I \to I$, $g: J \to J$. Diciamo che f e g sono coniugate, se $\exists$ h omeomorfismo [= continua, biunivoca & con inversa continua] $h: I \to J$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"] \\ J \arrow[r, "g"] & J \end{tikzcd}$$

commuta.

$$\left[\ h \circ f = g \circ h\ \right]$$

In particolare: h porta orbite di f in orbite di g: siccome $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"'] \cdots \\ J \arrow[r, "g"'] & J \arrow[r, "g"'] & J \arrow[r, "g"'] & J \end{tikzcd}$$

Teorema Siano $f: I \to I$, $g: J \to J$ coniugate da $h: I \to J$. Allora se f è caotica in I, g è caotica in J.

Dim Prendiamo $U \subset J$ aperto, e $h^{-1}(U) \subset I$.

1) Siccome f è caotica $\to$ punti periodici sono densi in I. Quindi possiamo trovare un punto periodico $x \in h^{-1}(U)$ per f.

Chiamiamo n il periodo

Dalle proprietà di h:

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x)$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"] \\ J \arrow[r, "g"] & J \end{tikzcd}$$

→ i punti periodici di g sono densi.

2) Prendiamo U e V aperti di J.

f transitiva: $\exists\, x_1 \in h^{-1}(U)$, e $m > 0$ t.c.

$f^m(x_1) \in h^{-1}(V)$

Tuttavia $h(x_1) \in U$ e $g^m(h(x_1)) = h(f^m(x_1)) \in V$

e quindi g è transitiva

3) f dipende in modo sensibile dai dati iniziali con costante β. Possiamo $I = [\alpha_0, \alpha_1]$ → possiamo assumere che $\beta < \alpha_1 - \alpha_0$

Prendiamo $x \in [\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$ e consideriamo la funzione $|h(x+\beta) - h(x)|$.

È una funzione continua ed è positiva

Allora ha un valore minimo β'.

→ prende intervalli di lunghezza β in I e li manda in intervalli lunghi almeno β' in J. → scegliamo β' come costante per g

In molti casi, non riusciamo a trovare h come l' abbiamo definita: diremo che h è una semi-coniugazione se invece di essere 1 a 1 è una funzione al più m a 1, che soddisfa la stessa proprietà.

Preserva il comportamento caotico, con la differenza che mappa cicli in cicli senza preservare il periodo

<u>Teorema</u>: La funzione logistica $f_4(x) = 4x(1-x)$ è caotica.

<u>Dim</u> Costruiamo h semi-coniugazione fra la mappa $f_4(x)$ e la mappa $T(x)$

$$h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x)$$

è 2:1 in $[0,1]$ tranne che in $x = \frac{1}{2}$, $h(\frac{1}{2}) = 1$

$$h(T(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos 4\pi x) & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi[-2x+2])) & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 4\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2\cos^2 2\pi x - 1)$$

$$= 1 - \cos^2 2\pi x = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)$$

$= f_4(h(x))$ $\qquad (f_4(x) = 4x(1-x))$

:)

L'esponente di Liapunov

Consideriamo $x_{n+1} = f(x_n)$ e prendiamo due punti

x_0, $x_0+\varepsilon$

Definiamo
$$\lambda = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{N} \ln \frac{|f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon}$$

Intuitivamente
$$\lim_{N\to\infty} e^{\lambda N} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{|f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N}{dx}\Big|_{x_0} \right| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \left|(f^N)'_{(x_0)}\right|$$

Prendiamo la derivata:

$$(f^N)'_{(x_0)} = (f(f^{N-1}))'_{(x_0)}$$

$$= (f'(f^{N-1}))_{(x_0)} \; (f^{N-1})'_{(x_0)}$$

↑ derivata della funzione composta

$$= f'(f^{N-1})_{(x_0)} \; (f'(f^{N-2}))_{(x_0)} \; (f^{N-2})'_{(x_0)}$$

↑ derivata della funz composta

⋮

$$= f'(f^{N-1})_{(x_0)}\, f'(f^{N-2})_{(x_0)}\, f'(f^{N-3})_{(x_0)} \cdots$$

$$\cdots f'(\underbrace{f(x_0)}_{x_1})\; f'(x_0)$$

$$= \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i)$$

x_0
$f(x_0) = x_1$
$f(x_1) = x_2$
$\vdots$

Allora

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right|$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|$$

implicitamente λ dipende da x_0

Esempio: Prendiamo un k-ciclo stabile

(x_0 stabile se $|f'(x_0)| < 1$; allo stesso modo un k-ciclo è stabile o attrattivo se $|(f^k)'_{(x_0)}| < 1$)

Quindi $\ln |(f^k)'_{(x_0)}| < \ln 1 = 0$

Allora: $\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)|$$

Usiamo: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i =$

$$= \frac{1}{n}\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{j=1}^{n \bmod p} x_j \right)$$

$$= \underbrace{\frac{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}{\frac{n}{p}}}_{\downarrow \; 1} \underline{\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{p}} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n \bmod p} x_j}_{\to 0, \; n \to +\infty}$$

numero finito di termini pari a $n \bmod p$

$$\lambda = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)| = \frac{1}{k} \underline{\ln |(f^k)'(x_0)|}$$

$$< 0$$

L'esponente di Liapunov è negativo

<u>Mappa a Tenda</u>

$$T(x) = \begin{cases} 2r x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2r(1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$|T'(x)| = 2r \quad \forall x \in [0,1] \text{ tranne } x = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |T'(x_i)| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=2}^{N-1} \ln 2r$$

$x_i \neq \frac{1}{2}$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} N \cdot \ln 2r =$$

$$= \ln 2r > 0 \qquad \text{per } r > \frac{1}{2}$$

Per $r = 1 \longrightarrow$ esponente di Liapunov positivo

Cosa succede per $\lambda > 4$

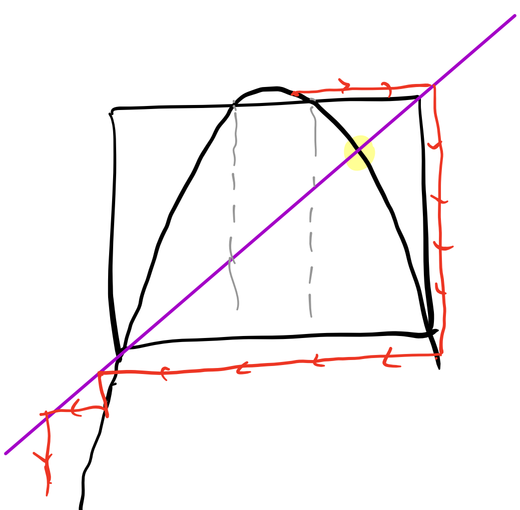
$\longrightarrow$ <u>DINAMICA SIMBOLICA</u>

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) \qquad \text{con} \quad \lambda > 4$$

In questo caso $I = [0,1]$ non è più invariante

$\rightarrow$ orbite che scappano a $-\infty$

Infatti: se $\lambda > 4$, esiste un intervallo A_0 tale che $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) > 1$ (centrato in $\frac{1}{2}$)



$$f^2_\lambda(x) = f_\lambda\Big(\underbrace{x'}_{\substack{\text{che è} \\ > 1}}\Big) =$$

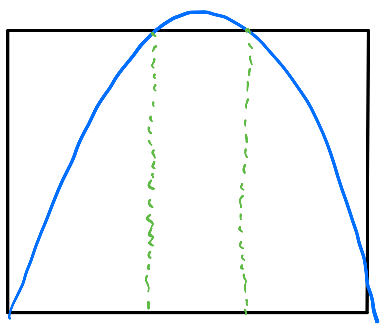
$$= \lambda x'(1-x') < 0$$

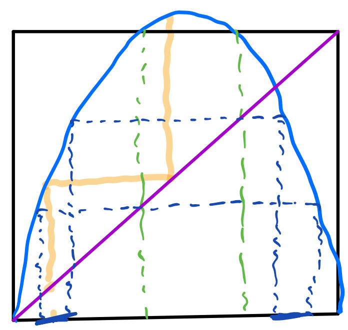
Invece gli estremi di A_0 (quando $f_\lambda(x) = 1$) vanno in zero

Vogliamo capire come è fatto

$\Lambda = \{$ Tutti i punti di I tali che le orbite non escono da I $\}$

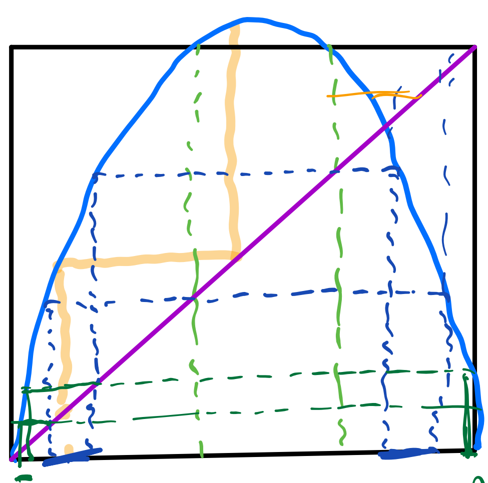
Andiamo all'indietro: A_1 è la preimmagine di A_0, cioè $f_{\lambda>4}$ mando A_1 in A_0





A_1 sono due intervalli.

A_2 : preimmagine di A_1 $\longrightarrow$ 4 intervalli



Così via

A_n sono 2^n intervalli

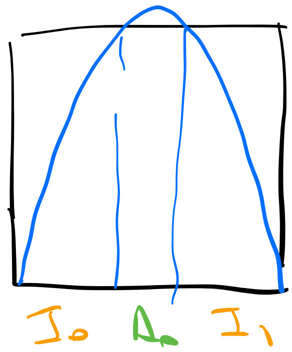
dove eliterate n-esima giorn in A_0

Quindi i punti che NON escono da I

sono $\Lambda = I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

Dividiamo $I - A_0 = I_0 \cup I_1$

sinistra destra



Se prendiamo $x_0 \in \Lambda$ l'intera orbita di x_0 sta dentro $I_0 \cup I_1$

Gli associamo una sequenza

$$S(x_0) = (s_0\, s_1\, s_2 \dots)$$

dove $s_j = k \iff f_\lambda^j(x_0) \in I_k \qquad k=0,1$

Gli associamo 0 e 1 se $f_\lambda^j(x_0)$ sta in I_0 o I_1

ad esempio 0 è p.to fisso

quindi $S(0) = (0000 \dots)$

x^* l'altro punto fisso : $S(x^*) = (111 \dots)$

Il punto $x_0 = 1$: $S(1) = (100000 \dots)$

Definizione : Σ_1 è l'insieme di tutte le sequenze di 0 e 1. Cioè un punto di Σ_1 è $s = (s_0 s_1 s_2 s_3 \dots)$

$s_i = 0, 1$

(o distante)

Su Σ_1 definiamo la metrica $d(S,T)$ t.c.

1. $d(S,T) \geq 0$, $d(S,T) = 0 \iff S = T$

2. $d(S,T) = d(T,S)$

3. $d(S,u) \leq d(S,T) + d(T,u)$ disuguaglianza triangolare

Definiamo $d(S,T) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$ $\quad S = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ $\quad T = (t_0 t_1 t_2 \dots)$

Converge: i numeratori sono o 0 o 1.

$$d(S,T) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$