Esercizio 1

Considera un problema di meccanica quantistica unidimensionale con azione

$$S = \int dt \left[\frac{m\,\dot{q}^2}{2} - V(q) \right] \ . \tag{1}$$

Nella pittura di Schrödinger per l'evoluzione temporale, dato uno stato $|\alpha, t\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}|\alpha\rangle$ definiamo la sua funzione d'onda $\Psi_\alpha(t,q) = \langle q|\alpha, t\rangle$ come l'overlap con l'autostato $|q\rangle$ dell'operatore posizione $\hat{q}$ (indipendente dal tempo nella pittura di Schrödinger).

(i) Scrivi un'espressione per la funzione $\Psi_\alpha(t,q)$ come integrale sui cammini, nei due casi seguenti: a) $|\alpha\rangle = |\bar{q}\rangle$ autostato dell'operatore posizione all'autovalore $\bar{q}$; b) $|\alpha\rangle = |\Omega\rangle$ stato fondamentale.

(ii) Usa l'espressione in termini di integrale sui cammini, e la definizione di integrale sui cammini come limite di integrali sulle posizioni in tempi successivi, per ottenere

$$\Psi_\alpha(t,q) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{N} \int_{-\infty}^{+\infty} dq'\, e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(q-q')^2}{2\epsilon} - \epsilon V(q)\right]} \Psi_\alpha(t-\epsilon, q') \ . \tag{2}$$

dove $\mathcal{N}$ è un fattore costante di normalizzazione. Espandi $e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon V(q)}\Psi_\alpha(t-\epsilon,q')$ in ϵ fino all'ordine $\mathcal{O}(\epsilon^1)$, e in q' attorno a q fino all'ordine $\mathcal{O}((q'-q)^2)$, quindi calcola l'integrale Gaussiano in q' e deriva che $\Psi_\alpha(t,q)$ soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi_\alpha(t,q) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right] \Psi_\alpha(t,q) \ . \tag{3}$$

(iii) Generalizza al caso di una teoria di campo scalare con azione

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \right] \ . \tag{4}$$

Usando l'integrale sui cammini, scrivi il funzionale d'onda $\Psi_\alpha(t,\phi)$, che dipende da una funzione $\phi(\vec{x})$ di $\vec{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$, nei due casi: a) $|\alpha\rangle = |\bar{\phi}\rangle$ autostato dell'operatore $\hat{\phi}(\vec{x})$ all'autovalore $\bar{\phi}(\vec{x})$; b) $|\alpha\rangle = |\Omega\rangle$ stato fondamentale (vuoto). Quindi segui step analoghi a quelli del punto (ii) per mostrare che il funzionale d'onda soddisfa l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\alpha(t,\phi) = \int d^{d-1}\vec{x} \left[-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi(\vec{x})\delta\phi(\vec{x})} + \frac{1}{2}(\partial_{\vec{x}}\phi(\vec{x}))^2 + V(\phi(\vec{x})) \right] \Psi_\alpha(t,\phi) \ . \tag{5}$$

Esercizio 2

Per le due seguenti teorie di campo si trovino le regole di Feynman per i vertici e i propagatori, e si elenchino tutti i diagrammi di Feynman che contribuiscono alla funzione a due punti $\langle\phi\phi\rangle$ e alla funzione a quattro punti $\langle\phi\phi\phi\phi\rangle$ fino all'ordine indicato nelle costanti di accoppiamento. Si scriva l'espressione per ciascun diagramma sia nello spazio delle posizioni che dei momenti, come integrale sui vertici o sui momenti indeterminati, rispettivamente (non è necessario svolgere gli integrali). Nello spazio delle posizioni si possono lasciare impliciti i propagatori, denotandoli semplicemente come $G_{m^2}(x)$ per uno scalare di massa-quadra m^2, mentre nello spazio dei momenti si può usare l'espressione esplicita per il propagatore.

(i) Per la teoria del campo ϕ con azione

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{6!}\phi^6\right]$$

- $\star$ $\langle\phi\phi\rangle$ fino a $\mathcal{O}(g^2)$;
- $\star$ $\langle\phi\phi\phi\phi\rangle$ fino a $\mathcal{O}(g)$.

(ii) Per la teoria dei campi ϕ e Φ con azione

$$S[\phi,\Phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{M^2}{2}\Phi^2 - \frac{\lambda_1}{4!}\phi^4 - \frac{\lambda_2}{4!}\Phi^4 - \frac{y}{2}\phi^2\Phi\right]$$

- $\star$ $\langle\phi\phi\rangle$ fino a $\mathcal{O}(y^4, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_1 y^2, \lambda_2 y^2, \lambda_1\lambda_2)$;
- $\star$ $\langle\phi\phi\phi\phi\rangle$ fino a $\mathcal{O}(y^2, \lambda_1, \lambda_2)$.