TEORIA dei CIRCUITI

Ingegneria dell'Informazione

– INTRODUZIONE AI CIRCUITI –
– TOPOLOGIA –

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Corso di Teoria dei Circuiti (105IN)

a.a. 2013-14

Bibliografia

- Renzo Perfetti: "Circuiti elettrici", Zanichelli.
- C. K. Alexander, M. N.O. Sadiku, G. Gruosso, G. S. Gajani: "Circuiti elettrici", McGraw Hill.
- M. Repetto, S. Leva, "Elettrotecnica", CittàStudi Edizioni.
- V. Daniele, A. Liberatore, R. Graglia e S. Manetti: "Elettrotecnica", Monduzzi Editore, Bologna.
- A.R. Hambley: "Elettrotecnica", Pearson-Prentice Hall.
- L. O. Chua, C. A. Desoer, e S. Kuh: "Circuiti Lineari e Nonlineari", Gruppo Editoriale Jackson, Milano.
- C. K. Alexander, M. N.O. Sadiku: "Circuiti Elettrici", Mc-Graw-Hill, Milano.
- R. C. Dorf, J. A. Svoboda: "Circuiti Elettrici", Apogeo Editore.
- G. Martinelli, M. Salerno: "Fondamenti di Elettrotecnica, vol. I e II", ed. Siderea, Roma.
- M. H. Rashid, "Fondamenti di Elettronica", Apogeo Editore.
- L. O. Chua, C. A. Desoer, E. S. Kuh: "Linear and Nonlinear Circuits", Mc-Graw-Hill, New York.
- N. Balabanian: "Electric Circuits", Mc-Graw-Hill, New York.

Bibliografia

- R. C. Dorf, J. A. Svoboda: "Electric Circuits", John Wiley & Sons, New York.
- A. Sedra, K. Smith: "Microelectronic Circuits", Oxford University Press, New York.
- P. Horowitz, W. Hill: "The Art of Electronics", Cambridge University Press, New York.
- Editor W. K. Chen, "The Circuits and Filters Handbook", CRC Press (for IEEE press), USA.

LIBRI DI ESERCIZI

- S. A. Nasar: "3000 solved problems in electric circuits", Schaum's solved problems series, Mc-Graw-Hill, New York.
- R. D. Strum, J. R. Ward: "Electric circuits and Networks", Prentice-hall, Englewood Cliffs.
- M. Biey: "Esercitazioni di Elettrotecnica", CLUT, Torino.
- A. Liberatore, S. Manetti, M.C. Piccirilli e A. Reatti: "Circuiti Elettrici ed Elettronici", collana Tutor, ETAS libri, Milano.
- "The Electric Circuits Problem Solver", Research and Education Association (REA), New York.

Circuiti e modelli

- **Circuiti reali**
  (o fisici)

- **Modelli matematici**
  (dei singoli, componenti, delle connessioni, dei circuiti,…)

Studio dei circuiti

- Il processo completo di analisi di un circuito elettrico reale consiste in:

1) Stabilire il modello più appropriato per descrivere i componenti in uso nel circuito, la loro connessione e il campo di applicazione
2) Scrivere e risolvere le equazioni secondo il modello complessivo scelto
3) Verificare la correttezza delle soluzioni ottenute con opportune verifiche sul circuito reale

- In questo corso ci limitiamo al passo 2) limitatamente a certi modelli di circuiti.

Prima classificazione

- Principali classi di modelli:

- **A parametri concentrati (PC)**

- **A costanti distribuite**

Criteri di applicabilità

- Criteri per la scelta tra le due classi di modelli:

1) **Dimensioni del circuito**

2) **Frequenze dei segnali**

3) **Conservatività del campo elettrico**

Esempi

- Circuito integrato con estensione $d = 1$ mm, percorso da segnali con periodo minimo $T = 0.1$ ns $= 10^{-10}$ s. Per attraversare il circuito da un capo all'altro, le onde elettromagnetiche ci mettono: $\Delta t = d/c = 10^{-3}/3\ 10^{8} = 3.3\ 10^{-12}$ s.

  Essendo $\Delta t << T$, il circuito può essere considerato PC.
- Circuito audio che lavora con $f_{max} = 25$ kHz. Ne segue che $\lambda = c/f = 12$ km. Finché $d << \lambda$, il circuito può essere considerato PC.
- Cavo coassiale lungo $l = 10$ m dal ricevitore all'antenna satellitare. Dall'antenna esce un segnale $f_1 = 1$ GHz, dal ricevitore un segnale $f_2 = 20$ KHz (polariz. dell'antenna). $\lambda_1 = c/f_1 = 0.3$ m ($<< l$); $\lambda_2 = c/f_2 = 1.5\ 10^{4}$ m ($>> l$).
- Spira con cui si concatena un campo magnetico variabile che produce una f.e.m. non trascurabile: si deve parlare di tensione e non più di d.d.p.

Modelli PC

- I segnali elettrici variano “lentamente” rispetto alle dimensioni del circuito, quindi il tempo di propagazione dei segnali è nullo
- Non ci sono campi elettromagnetici esterni concatenati con il circuito
- Tutti i fenomeni elettrici sono confinati in certe ben definite regioni dello spazio

Ne consegue che:

- Non ci sono nozioni metriche associate al circuito, i collegamenti tra i componenti non hanno né lunghezza né alcuna estensione
- Il campo elettrico è conservativo (d.d.p.)
- Il circuito è costituito da componenti connessi tra loro ed è isolato completamente dal mondo esterno

Ulteriori classificazioni

1) Lineari
2) Non-lineari

1) Resistivi
2) Dinamici

1) Tempo-invarianti
2) Tempo- varianti

Primo approccio

- Un circuito PC è composto da un insieme di componenti a due o più terminali connessi tra loro in punti chiamati nodi
- I collegamenti tra componenti corrispondono a dei corti circuiti; non ci sono nozioni metriche, quindi la loro lunghezza non influenza il comportamento del circuito
- Tra nodo e nodo si può misurare una differenza di potenziale elettrico ddp (chiamata impropriamente tensione)
- Nei componenti e nei nodi scorre la corrente elettrica formata da cariche positive
- *Nodo*: punto in cui si congiungono due o più terminali
- *Ramo* (o arco o lato): singolo percorso circuitale (tra due nodi)
- *Maglia*: insieme di due o più rami che formano un cammino chiuso

Leggi di Kirchhoff

- Il primo principio di Kirchhoff (KCL, IK) afferma che la somma algebrica delle correnti che entrano o escono da ogni nodo è identicamente nulla in ogni istante di tempo

- Il secondo principio di Kirchhoff (KVL, IIK) afferma che la somma algebrica delle ddp (tensioni) lungo una maglia è identicamente nulla in ogni istante di tempo

  seconda formulazione: Ogni ddp di ramo è data dalla differenza dei relativi potenziali di nodo

Nodi, rami e convenzioni di segno

- Per descrivere con delle equazioni nelle correnti e nelle ddp le connessioni nei circuiti (topologia), occorre uno strumento che permetta di gestire i nodi e i rami del circuito

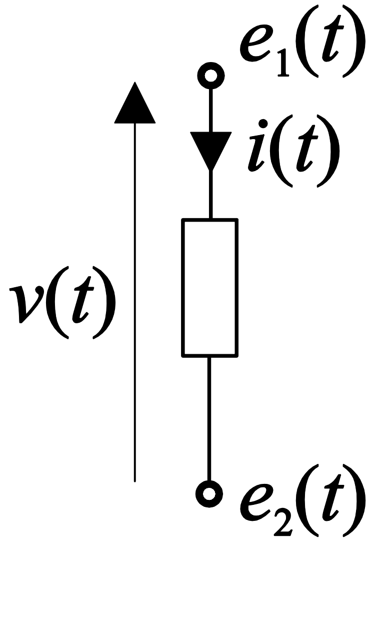
- *Nodi*: *n* → ad ognuno di essi è associato un potenziale
- *Rami*: *b* → ad ogni ramo è associata una corrente e una ddp

- Innanzi tutto, servono delle convenzioni di segno per le correnti e le ddp

Convenzioni di segno

Convenzione normale o degli utilizzatori

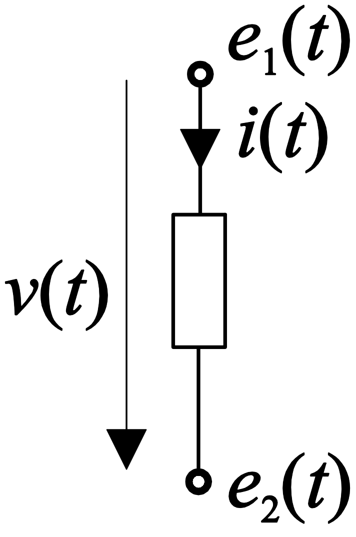
- La freccia della tensione punta verso il terminale dove entra la corrente
- $v(t) = e_1(t) - e_2(t)$
- se $v(t) > 0 \rightarrow e_1(t) > e_2(t)$
- $p = v\, i > 0 \Rightarrow$ potenza dissipata
- $p = v\, i < 0 \Rightarrow$ potenza erogata
  - N.B. Per una resistenza: $v = R\, i$



Convenzioni di segno (2)

Convenzione non-normale o dei generatori

- La freccia della tensione punta verso il terminale dove esce la corrente
- $v(t) = e_2(t) - e_1(t)$
- se $v(t) > 0 \rightarrow e_2(t) > e_1(t)$
- $p = v\, i > 0 \Rightarrow$ potenza erogata
- $p = v\, i < 0 \Rightarrow$ potenza dissipata
  - N.B. Per una resistenza: $v = -R\, i$



Grafi orientati

- Un grafo è un ente matematico formato da *n* nodi, *b* rami e dalla regola che associa gli uni agli altri

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{B}, \mathcal{R}\}$$

- Un grafo orientato ha tutti i rami orientati con una freccia
- Un grafo connesso ha almeno un percorso (formato da rami) che unisce qualunque coppia di nodi del grafo
- Utilizzeremo i grafi per studiare la topologia, ovvero le connessioni dei componenti di un circuito PC

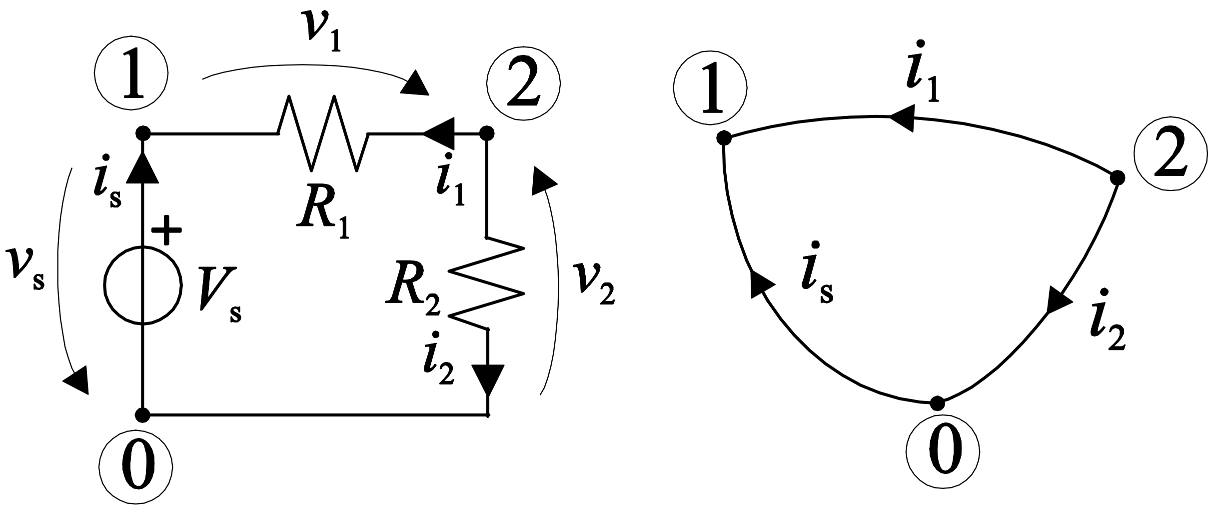
Grafi e circuiti

- Consideriamo un circuito PC formato soltanto da componenti a due terminali.
- Dal momento che un circuito PC viene modellizzato con componenti connessi nei nodi senza nozioni metriche:

  associamo al circuito un grafo orientato $\mathcal{G}$ che abbia: 1) tanti nodi (n) quanti sono i nodi del circuito, 2) tanti rami (b) quanti sono i componenti, 3) le stesse connessioni.
- Ogni ramo sarà pesato con la corrente (con segno) che scorre nel ramo e orientato secondo il verso positivo scelto per la corrente.

IK

- Scriviamo IK per ciascun nodo utilizzando il grafo $\mathcal{G}$ appena definito.
- Esempio:



- $\mathcal{G}$ è formato da $\mathcal{N}$ ={0,1,2} e $\mathcal{B}$ = {i_S, i_1, i_2}

- Possiamo scrivere 3 equazioni, una per ciascun nodo:

$$\begin{array}{l} 0: \\ 1: \\ 2: \end{array} \begin{cases} i_S - i_2 = 0 \\ -i_S - i_1 = 0 \\ i_1 + i_2 = 0 \end{cases}$$

Matrice di incidenza

- In forma matriciale, definendo la matrice di incidenza $\mathbf{A}^n$ $[n \text{ x } b]$, si ottiene

$$\text{nodi}\begin{cases}0\\1\\2\end{cases}\quad\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}^n}\begin{bmatrix}i_S\\i_1\\i_2\end{bmatrix}=0$$

- Le 3 equazioni sono linearmente dipendenti, quindi, scelto un nodo di riferimento a caso, denominato con il simbolo 0, eliminiamo la corrispondente equazione. Otteniamo così la matrice ridotta di incidenza **A** $[n-1 \text{ x } b]$ che questa volta ha rango pieno.

Matrice **A** *e IK*

- In forma matriciale le $n-1$ equazioni in b incognite sono:

$$\text{nodi}\begin{cases}1\\2\end{cases}\quad\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_S\\ i_1\\ i_2\end{bmatrix}=0$$

Ovvero: $\mathbf{A}\,\mathbf{i}=0$

- I coefficienti a_{kj} di $\mathbf{A}$ $[n-1 \text{ x } b]$ sono uguali a
  - +1: se il ramo j esce dal nodo k
  - −1: se il ramo j entra nel nodo k
  - 0: se il ramo j non tocca il nodo k

Matrice **A** *e IIK*

- Utilizzando la convenzione normale, aggiungiamo le ddp a tutti i rami e i potenziali di nodo a tutti i nodi
- Scriviamo IIK (*b* equazioni) utilizzando la seconda formulazione, dopo aver messo a zero il potenziale del nodo di riferimento (0) e denominati con e_1 e e_2 i potenziali dei nodi 1 e 2:

$$\begin{cases} v_S = -e_1 \\ v_1 = -e_1 + e_2 \\ v_2 = e_2 \end{cases}$$

- In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_S \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Matrice **A** *e IIK* (2)

- Si nota facilmente che la matrice relativa a IIK altro non è che $\mathbf{A}^T$.
  - Le regole di scrittura della matrice suddetta $\mathbf{A}^T$ rimangono le stesse che per la matrice **A** in IK.

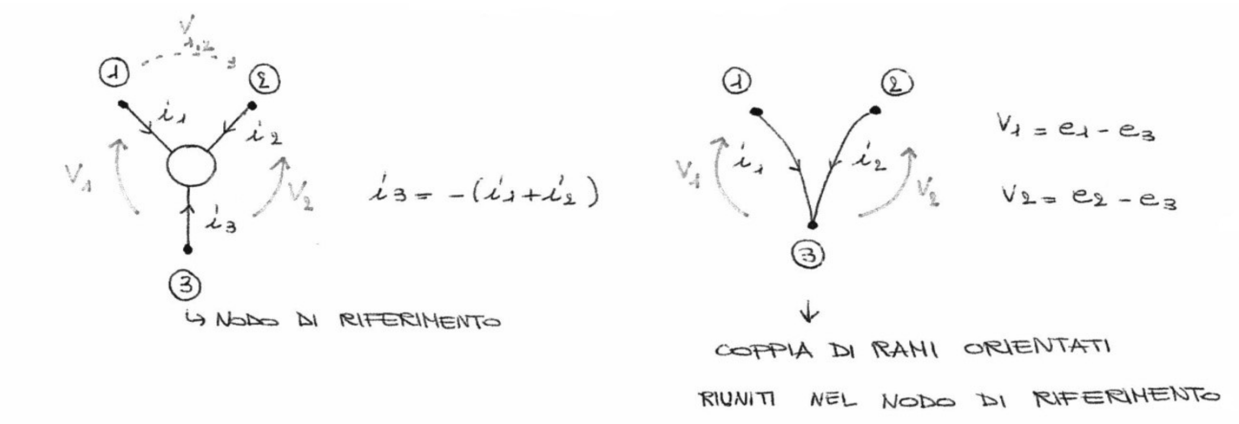
- Quindi: $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$

  (b equazioni in $b + n - 1$ incognite)

- Complessivamente abbiamo, dopo aver scritto IK e IIK:
  - $2\,b + n - 1$ incognite
  - $b + n - 1$ equazioni
- Mancano ancora b equazioni per completare il sistema.

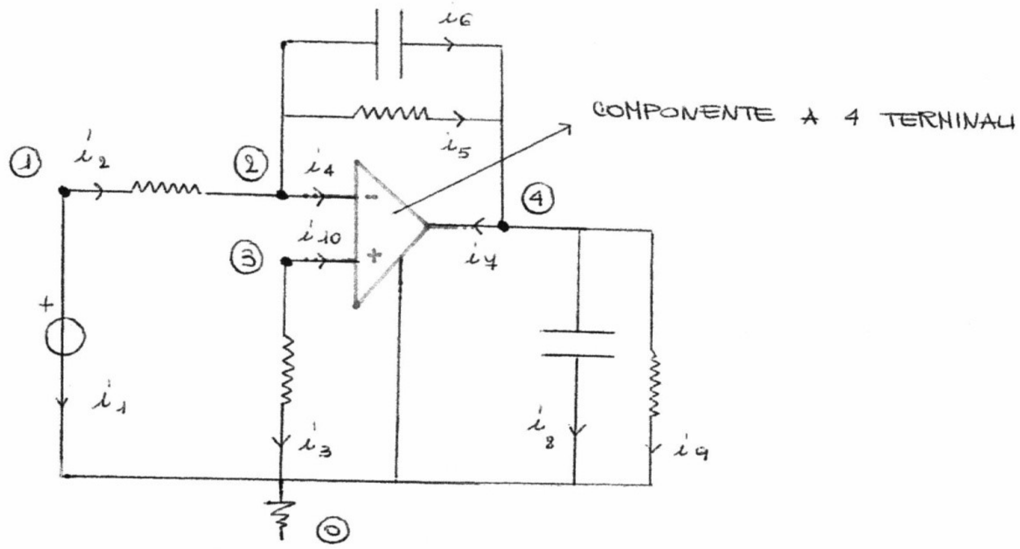
Componenti a tre poli e più

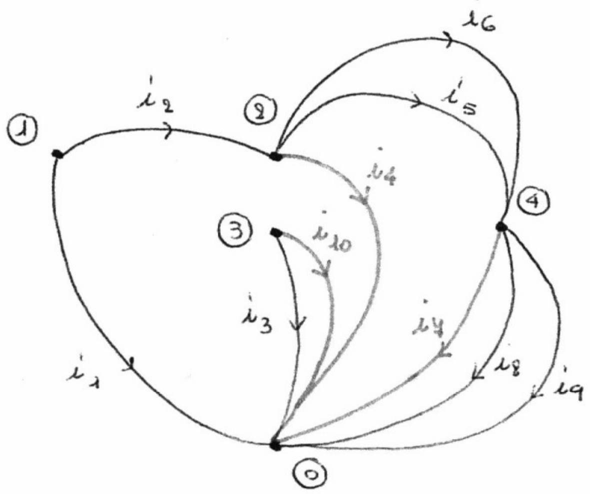
- Per ogni tripolo, possiamo definire 3 correnti, una per polo o terminale, e 3 tensioni, una per ogni coppia di terminali.
- Per IK e IIK, solo due correnti e due tensioni sono indipendenti. Associamo il seguente grafo al tripolo, dopo aver scelto uno qualsiasi dei nodi come riferimento:



- Se il componente ha *n* terminali, ci saranno $n-1$ correnti e $n-1$ tensioni indipendenti. Il grafo sarà composto da $n-1$ rami orientati congiunti nel nodo di riferimento.
- Dei doppi-bipoli parleremo più avanti.

Esempio di grafo





$$
A\,[4 \times 10] = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Teorema di Tellegen

- Potenze virtuali: calcolate con insiemi di correnti e tensioni che soddisfano IK e IIK, ma non sono legate tra loro, ovvero non sono riferite a dei precisi componenti.
- Se eseguiamo il bilancio energetico in un circuito PC, ovvero sommiamo le potenze virtuali di tutti i componenti (rami del grafo), troviamo che questa somma è nulla:

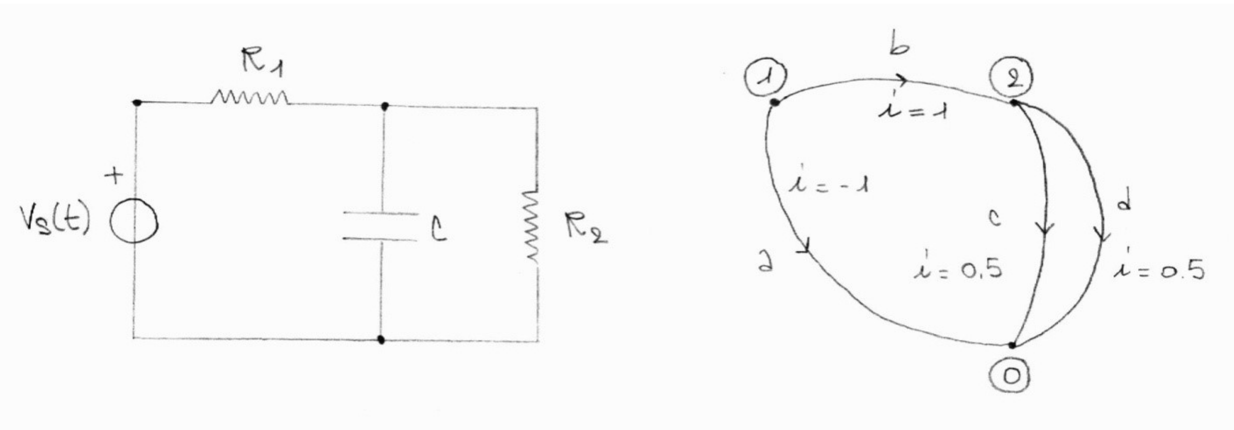
$$\sum_k p_k(t) = \sum_k v_k(t) i_k(t) = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = 0$$

- Dim: considerando $\mathbf{A}\,\mathbf{i} = 0$ e $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{e}$, si ottiene:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = \left(\mathbf{A}^T\,\mathbf{e}\right)^T \mathbf{i} = \mathbf{e}^T\left(\mathbf{A}\mathbf{i}\right) = 0$$

Teorema di Tellegen: esempio

- Non ci sono scambi energetici con l'esterno, il circuito è un sistema chiuso. L'energia creata nel circuito viene dissipata all'interno. Conseguenza: se un circuito è composto da sole resistenze, tutte le tensioni e correnti saranno nulle.



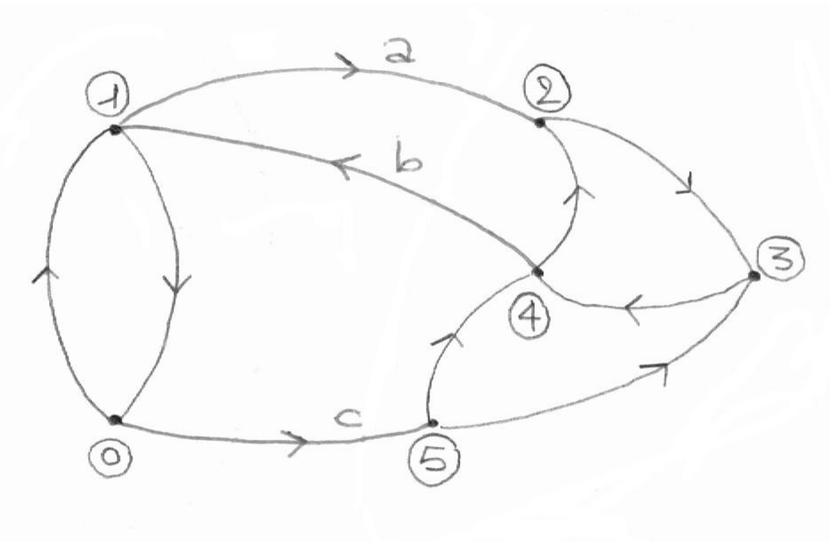
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $e_1 = 5,\ e_2 = 2 \Rightarrow v_\mathrm{a} = 5,\ v_\mathrm{b} = 3,\ v_\mathrm{c} = 2,\ v_\mathrm{d} = 2$

$$\Rightarrow 5\,(-1) + 3\cdot 1 + 2\cdot 0.5 + 2\cdot 0.5 = 0$$

Insiemi di taglio

- Sono una generalizzazione del concetto di nodo. Dividiamo i nodi $\mathcal{G}$ di un grafo in due sottoinsiemi $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$. L'insieme di taglio corrispondente è composto dai rami che collegano tra loro $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$.

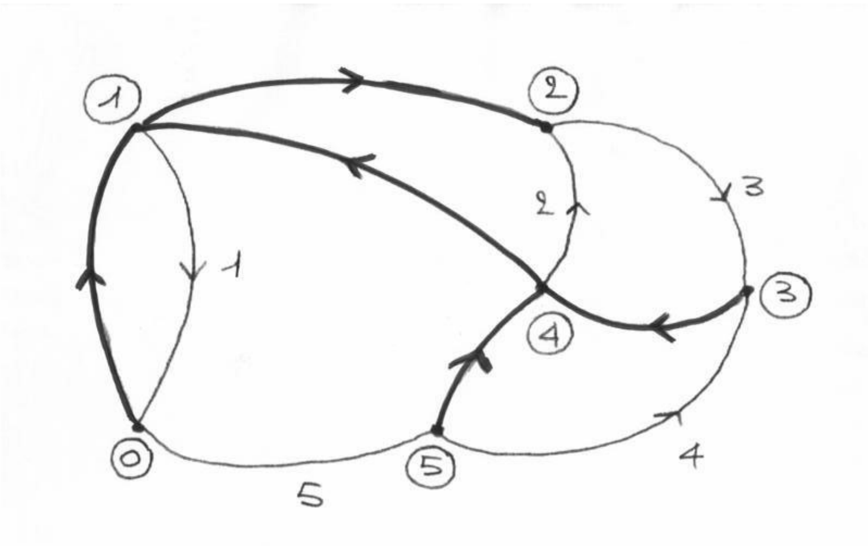


- $\mathcal{G}_1 = \{0,1\}$, $\mathcal{G}_2 = \{2,3,4,5\} \Rightarrow \mathcal{J} = \{a,b,c\}$

- IK può essere scritta su un insieme di taglio, dopo aver fissato una direzione positiva convenzionale: $i_a - i_b + i_c = 0$
- Ci sono $n-1$ tagli indipendenti.

Alberi e coalberi

- Dato un grafo connesso $\mathcal{G}$ con n nodi e b rami, un albero $\mathcal{T}$ di $\mathcal{G}$ è un sottografo connesso di $\mathcal{G}$ contenente tutti i nodi di $\mathcal{G}$ e $n-1$ rami. In tal modo tutti i nodi sono collegati tra loro e non ci sono maglie. I restanti $m = b-(n-1)$ rami formano il coalbero (nella figura i rami 1,2,3,4,5).



- Ci sono diversi alberi per ogni grafo.

Maglie indipendenti

- Ognuno dei rami del coalbero identifica una maglia indipendente (formata dal ramo del coalbero e dai rami dell'albero che chiudono la maglia).
- Sono $m = b-(n-1)$ le maglie indipendenti di un circuito.
- Ci sono tanti insiemi di maglie indipendenti quanti sono gli alberi
- A ogni maglia si può applicare IIK nella prima formulazione. Chiamiamo **B** la matrice corrispondente, di dimensioni $[b-(n-1) \times b]$.

Considerazioni sulle i e v

- Matrice **A**: $[n-1 \text{ x } b]$

  → devo conoscere $b - (n-1)$ correnti indipendenti per risolvere il sistema.

  Una scelta sicura è fissare le correnti di un co-albero. Se almeno due correnti fossero dipendenti, ovvero incidenti esclusive in un nodo, allora quel nodo sarebbe escluso dall'albero, il che contrasterebbe con la definizione di albero.
- Matrice **B**: $[b-(n-1) \text{ x } b]$

  → devo conoscere $(n-1)$ tensioni indipendenti per risolvere il sistema.

  Una scelta sicura è fissare le tensioni di un albero, in questo modo sono sicuro che non possano formare maglie.