

*Principi di Ingegneria Elettrica*  
*Ingegneria Industriale*

*– INTRODUZIONE AI CIRCUITI –*  
*– TOPOLOGIA –*

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura  
a.a. 2018-19

## *Bibliografia*

- Renzo Perfetti: "Circuiti elettrici", Zanichelli.
- C. K. Alexander, M. N.O. Sadiku, G. Gruosso, G. S. Gajani: "Circuiti elettrici", McGraw Hill.
- M. Repetto, S. Leva, "Elettrotecnica", CittàStudi Edizioni.
- V. Daniele, A. Liberatore, R. Graglia e S. Manetti: "Elettrotecnica", Monduzzi Editore, Bologna.
- A.R. Hambley: "Elettrotecnica", Pearson-Prentice Hall.
- L. O. Chua, C. A. Desoer, e S. Kuh: "Circuiti Lineari e Nonlineari", Gruppo Editoriale Jackson, Milano.
- C. K. Alexander, M. N.O. Sadiku: "Circuiti Elettrici", Mc-Graw-Hill, Milano.
- R. C. Dorf, J. A. Svoboda: "Circuiti Elettrici", Apogeo Editore.
- G. Martinelli, M. Salerno: "Fondamenti di Elettrotecnica, vol. I e II", ed. Siderea, Roma.
- M. H. Rashid, "Fondamenti di Elettronica", Apogeo Editore.
- L. O. Chua, C. A. Desoer, E. S. Kuh: "Linear and Nonlinear Circuits", Mc-Graw-Hill, New York.
- N. Balabanian: "Electric Circuits", Mc-Graw-Hill, New York.

## *Bibliografia*

- R. C. Dorf, J. A. Svoboda: "Electric Circuits", John Wiley & Sons, New York.
- A. Sedra, K. Smith: "Microelectronic Circuits", Oxford University Press, New York.
- P. Horowitz, W. Hill: "The Art of Electronics", Cambridge University Press, New York.
- Editor W. K. Chen, "The Circuits and Filters Handbook", CRC Press (for IEEE press), USA.

## LIBRI DI ESERCIZI

- S. A. Nasar: "3000 solved problems in electric circuits", Schaum's solved problems series, Mc-Graw-Hill, New York.
- R. D. Strum, J. R. Ward: "Electric circuits and Networks", Prentice-hall, Englewood Cliffs.
- M. Biey: "Esercitazioni di Elettrotecnica", CLUT, Torino.
- A. Liberatore, S. Manetti, M.C. Piccirilli e A. Reatti: "Circuiti Elettrici ed Elettronici", collana Tutor, ETAS libri, Milano.
- "The Electric Circuits Problem Solver", Research and Education Association (REA), New York.

## *Circuiti e modelli*

- **Circuiti reali**  
(o fisici)
- **Modelli matematici**  
(dei singoli, componenti, delle connessioni, dei circuiti,...)

## *Studio dei circuiti*

- Il processo completo di analisi di un circuito elettrico reale consiste in:
  - 1) Stabilire il modello più appropriato per descrivere i componenti in uso nel circuito, la loro connessione e il campo di applicazione
  - 2) Scrivere e risolvere le equazioni secondo il modello complessivo scelto
  - 3) Verificare la correttezza delle soluzioni ottenute con opportune verifiche sul circuito reale
- In questo corso ci limitiamo al passo 2) limitatamente a certi modelli di circuiti.

## *Prima classificazione*

- Principali classi di modelli:
- **A parametri concentrati (PC)**
- **A costanti distribuite**

## *Criteria di applicabilità*

- Criteri per la scelta tra le due classi di modelli:

**1) Dimensioni del circuito**

**2) Frequenze dei segnali**

**3) Conservatività del campo elettrico**

## Esempi

- Circuito integrato con estensione  $d = 1$  mm, percorso da segnali con periodo minimo  $T = 0.1$  ns  $= 10^{-10}$  s. Per attraversare il circuito da un capo all'altro, le onde elettromagnetiche ci mettono:  $\Delta t = d/c = 10^{-3}/3 \cdot 10^8 = 3.3 \cdot 10^{-12}$  s. Essendo  $\Delta t \ll T$ , il circuito può essere considerato PC.
- Circuito audio che lavora con  $f_{\max} = 25$  kHz. Ne segue che  $\lambda = c/f = 12$  km. Finché  $d \ll \lambda$ , il circuito può essere considerato PC.
- Cavo coassiale lungo  $l = 10$  m dal ricevitore all'antenna satellitare. Dall'antenna esce un segnale  $f_1 = 1$  GHz, dal ricevitore un segnale  $f_2 = 20$  KHz (polariz. dell'antenna).  $\lambda_1 = c/f_1 = 0.3$  m ( $\ll l$ );  $\lambda_2 = c/f_2 = 1.5 \cdot 10^4$  m ( $\gg l$ ).
- Spira con cui si concatena un campo magnetico variabile che produce una f.e.m. non trascurabile: si deve parlare di tensione e non più di d.d.p.

## *Modelli PC*

- I segnali elettrici variano “lentamente” rispetto alle dimensioni del circuito, quindi il tempo di propagazione dei segnali è nullo
- Non ci sono campi elettromagnetici esterni concatenati con il circuito
- Tutti i fenomeni elettrici sono confinati in certe ben definite regioni dello spazio

### *Ne consegue che:*

- Non ci sono nozioni metriche associate al circuito, i collegamenti tra i componenti non hanno né lunghezza né alcuna estensione
- Il campo elettrico è conservativo (d.d.p.)
- Il circuito è costituito da componenti connessi tra loro ed è isolato completamente dal mondo esterno

## *Ulteriori classificazioni*

1) Lineari

2) Non-lineari

1) Resistivi

2) Dinamici

1) Tempo-invarianti

2) Tempo-varianti

## *Primo approccio*

- Un circuito PC è composto da un insieme di componenti a due o più terminali connessi tra loro in punti chiamati nodi
- I collegamenti tra componenti corrispondono a dei corti circuiti; non ci sono nozioni metriche, quindi la loro lunghezza non influenza il comportamento del circuito
- Tra nodo e nodo si può misurare una differenza di potenziale elettrico  $ddp$  (chiamata impropriamente tensione)
- Nei componenti e nei nodi scorre la corrente elettrica formata da cariche positive
- *Nodo*: punto in cui si congiungono due o più terminali
- *Ramo* (o arco o lato): singolo percorso circuitale (tra due nodi)
- *Maglia*: insieme di due o più rami che formano un cammino chiuso

## *Leggi di Kirchhoff*

- Il primo principio di Kirchhoff (KCL, IK) afferma che la somma algebrica delle correnti che entrano o escono da ogni nodo è identicamente nulla in ogni istante di tempo
- Il secondo principio di Kirchhoff (KVL, IIK) afferma che la somma algebrica delle ddp (tensioni) lungo una maglia è identicamente nulla in ogni istante di tempo  
*seconda formulazione:* Ogni ddp di ramo è data dalla differenza dei relativi potenziali di nodo

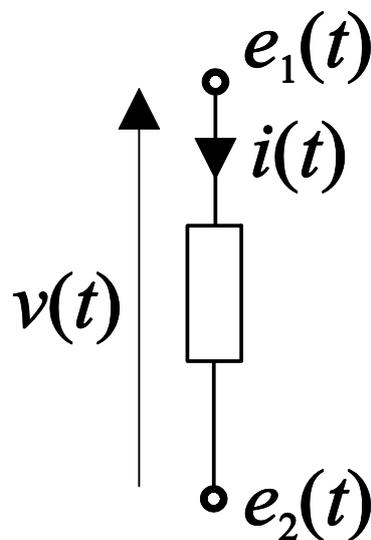
## *Nodi, rami e convenzioni di segno*

- Per descrivere con delle equazioni nelle correnti e nelle ddp le connessioni nei circuiti (topologia), occorre uno strumento che permetta di gestire i nodi e i rami del circuito
- *Nodi*:  $n \rightarrow$  ad ognuno di essi è associato un potenziale
- *Rami*:  $b \rightarrow$  ad ogni ramo è associata una corrente e una ddp
- Innanzi tutto, servono delle convenzioni di segno per le correnti e le ddp

## Convenzioni di segno

### *Convenzione normale o degli utilizzatori*

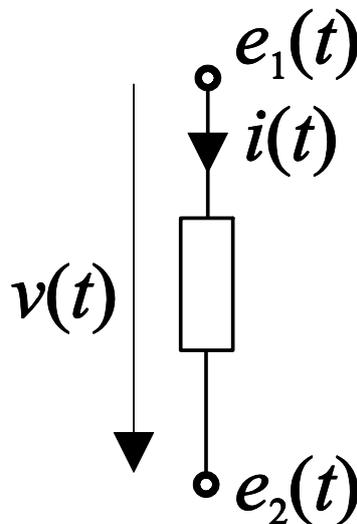
- La freccia della tensione punta verso il terminale dove entra la corrente
- $v(t) = e_1(t) - e_2(t)$
- se  $v(t) > 0 \rightarrow e_1(t) > e_2(t)$
- $p = v i > 0 \Rightarrow$  potenza dissipata
- $p = v i < 0 \Rightarrow$  potenza erogata
  - N.B. Per una resistenza:  $v = R i$



## Convenzioni di segno (2)

### *Convenzione non-normale o dei generatori*

- La freccia della tensione punta verso il terminale dove esce la corrente
- $v(t) = e_2(t) - e_1(t)$
- se  $v(t) > 0 \rightarrow e_2(t) > e_1(t)$
- $p = v i > 0 \Rightarrow$  potenza erogata
- $p = v i < 0 \Rightarrow$  potenza dissipata
  - N.B. Per una resistenza:  $v = -R i$



## *Grafi orientati*

- Un grafo è un ente matematico formato da  $n$  nodi,  $b$  rami e dalla regola che associa gli uni agli altri

$$\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{B}, \mathcal{R}\}$$

- Un grafo orientato ha tutti i rami orientati con una freccia
- Un grafo connesso ha almeno un percorso (formato da rami) che unisce qualunque coppia di nodi del grafo
- Utilizzeremo i grafi per studiare la topologia, ovvero le connessioni dei componenti di un circuito PC

## *Grafi e circuiti*

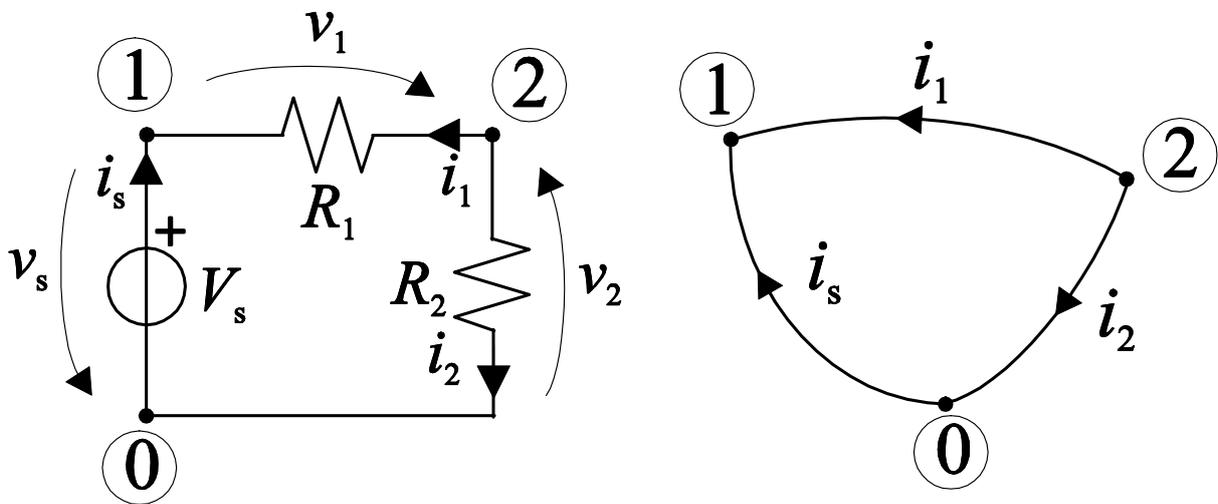
- Consideriamo un circuito PC formato soltanto da componenti a due terminali.
- Dal momento che un circuito PC viene modellizzato con componenti connessi nei nodi senza nozioni metriche:

associamo al circuito un grafo orientato  $\mathcal{G}$  che abbia: 1) tanti nodi ( $n$ ) quanti sono i nodi del circuito, 2) tanti rami ( $b$ ) quanti sono i componenti, 3) le stesse connessioni.

- Ogni ramo sarà pesato con la corrente (con segno) che scorre nel ramo e orientato secondo il verso positivo scelto per la corrente.

# IK

- Scriviamo IK per ciascun nodo utilizzando il grafo  $\mathcal{G}$  appena definito.
- Esempio:



- $\mathcal{G}$  è formato da  $\mathcal{N} = \{0,1,2\}$  e  $\mathcal{B} = \{i_s, i_1, i_2\}$
- Possiamo scrivere 3 equazioni, una per ciascun nodo:

$$\begin{array}{l}
 0: \\
 1: \\
 2:
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 i_s - i_2 = 0 \\
 -i_s - i_1 = 0 \\
 i_1 + i_2 = 0
 \end{array} \right.$$

## Matrice di incidenza

- In forma matriciale, definendo la matrice di incidenza  $\mathbf{A}^n [n \times b]$ , si ottiene

$$\text{nodi} \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \begin{matrix} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_S \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^n \end{matrix} = 0$$

- Le 3 equazioni sono linearmente dipendenti, quindi, scelto un nodo di riferimento a caso, denominato con il simbolo 0, eliminiamo la corrispondente equazione. Otteniamo così la matrice ridotta di incidenza  $\mathbf{A} [n-1 \times b]$  che questa volta ha rango pieno.

## Matrice $\mathbf{A}$ e $IK$

- In forma matriciale le  $n-1$  equazioni in  $b$  incognite sono:

$$\text{nodi} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0$$

Ovvero:  $\mathbf{A} \mathbf{i} = 0$

- I coefficienti  $a_{kj}$  di  $\mathbf{A} [n-1 \times b]$  sono uguali a
  - +1: se il ramo  $j$  esce dal nodo  $k$
  - -1: se il ramo  $j$  entra nel nodo  $k$
  - 0: se il ramo  $j$  non tocca il nodo  $k$

## Matrice $\mathbf{A}$ e $\mathbf{IK}$

- Utilizzando la convenzione normale, aggiungiamo le ddp a tutti i rami e i potenziali di nodo a tutti i nodi
- Scriviamo  $\mathbf{IK}$  ( $b$  equazioni) utilizzando la seconda formulazione, dopo aver messo a zero il potenziale del nodo di riferimento (0) e denominati con  $e_1$  e  $e_2$  i potenziali dei nodi 1 e 2:

$$\begin{cases} v_S = -e_1 \\ v_1 = -e_1 + e_2 \\ v_2 = e_2 \end{cases}$$

- In forma matriciale:

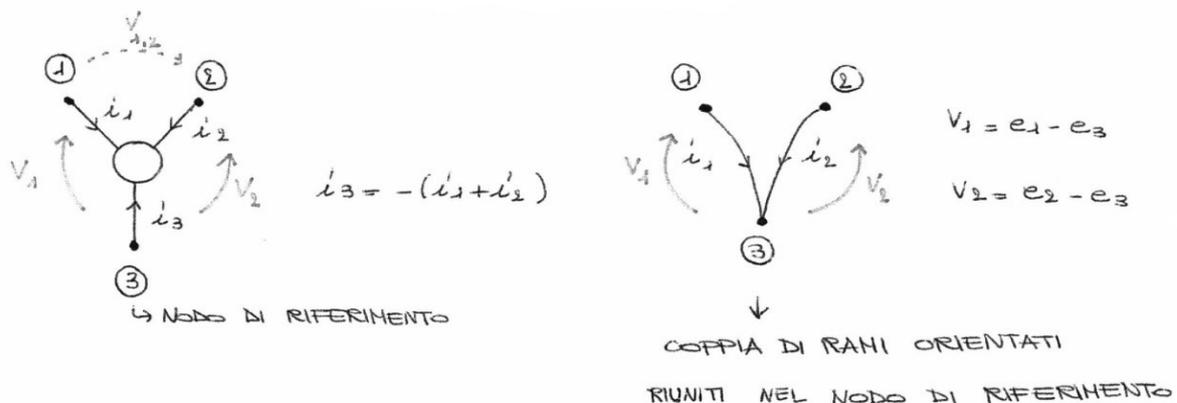
$$\begin{bmatrix} v_S \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

## Matrice $\mathbf{A}$ e IIK (2)

- Si nota facilmente che la matrice relativa a IIK altro non è che  $\mathbf{A}^T$ .
  - Le regole di scrittura della matrice suddetta  $\mathbf{A}^T$  rimangono le stesse che per la matrice  $\mathbf{A}$  in IK.
- Quindi:  $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$   
( $b$  equazioni in  $b + n - 1$  incognite)
- Complessivamente abbiamo, dopo aver scritto IK e IIK:
  - $2b + n - 1$  incognite
  - $b + n - 1$  equazioni
- Mancano ancora  $b$  equazioni per completare il sistema.

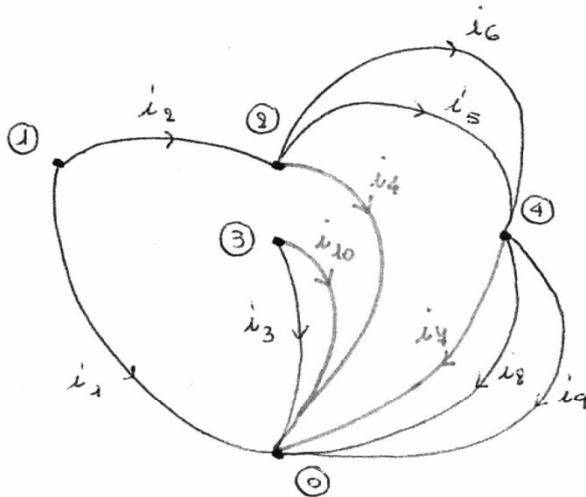
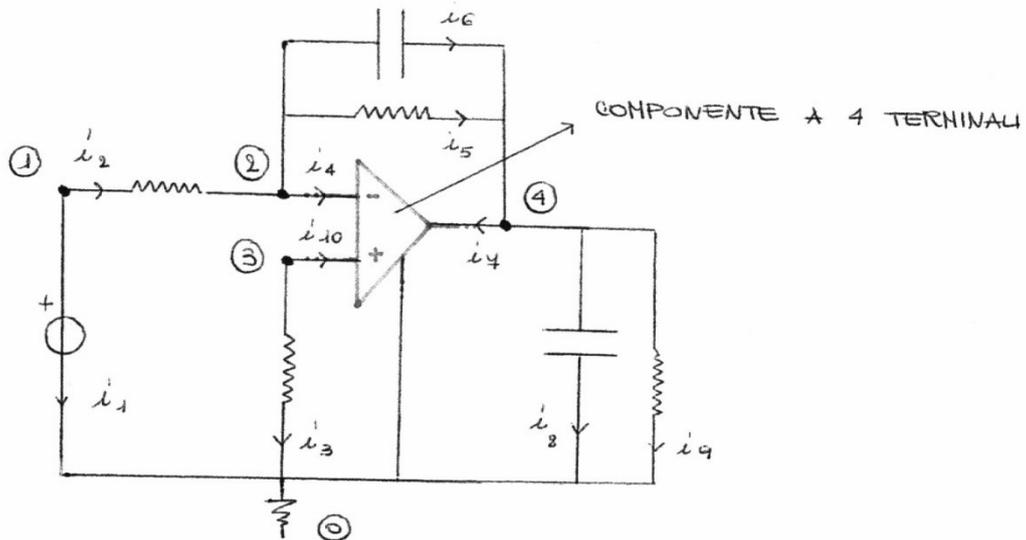
## Componenti a tre poli e più

- Per ogni tripolo, possiamo definire 3 correnti, una per polo o terminale, e 3 tensioni, una per ogni coppia di terminali.
- Per IK e IIK, solo due correnti e due tensioni sono indipendenti. Associamo il seguente grafo al tripolo, dopo aver scelto uno qualsiasi dei nodi come riferimento:



- Se il componente ha  $n$  terminali, ci saranno  $n-1$  correnti e  $n-1$  tensioni indipendenti. Il grafo sarà composto da  $n-1$  rami orientati congiunti nel nodo di riferimento.
- Dei doppi-bipoli parleremo più avanti.

# Esempio di grafo



$$A [4 \times 10] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## *Teorema di Tellegen*

- Potenze virtuali: calcolate con insiemi di correnti e tensioni che soddisfano IK e IIK, ma non sono legate tra loro, ovvero non sono riferite a dei precisi componenti.
- Se eseguiamo il bilancio energetico in un circuito PC, ovvero sommiamo le potenze virtuali di tutti i componenti (rami del grafo), troviamo che questa somma è nulla:

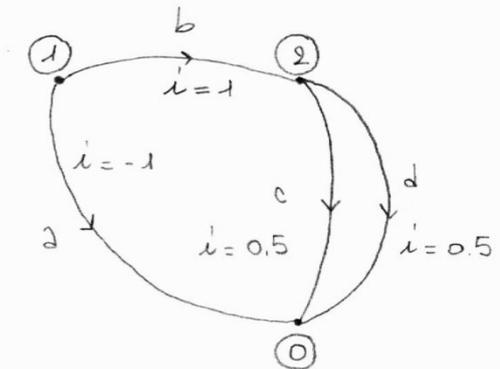
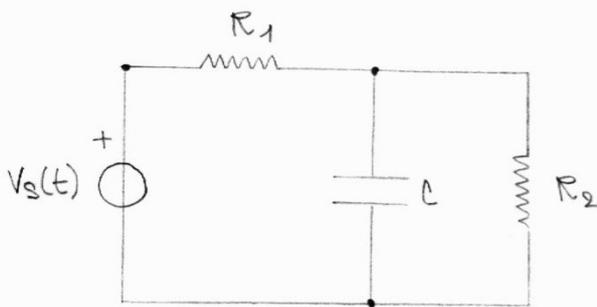
$$\sum_k p_k(t) = \sum_k v_k(t) i_k(t) = \mathbf{v}^T \mathbf{i} = 0$$

- Dim: considerando  $\mathbf{A} \mathbf{i} = 0$  e  $\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{e}$ , si ottiene:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = (\mathbf{A}^T \mathbf{e})^T \mathbf{i} = \mathbf{e}^T (\mathbf{A} \mathbf{i}) = 0$$

## Teorema di Tellegen: esempio

- Non ci sono scambi energetici con l'esterno, il circuito è un sistema chiuso. L'energia creata nel circuito viene dissipata all'interno. Conseguenza: se un circuito è composto da sole resistenze, tutte le tensioni e correnti saranno nulle.



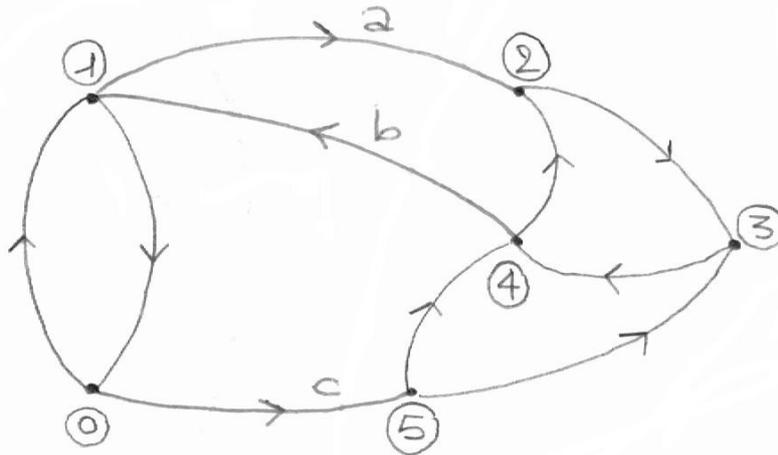
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $e_1 = 5, e_2 = 2 \Rightarrow v_a = 5, v_b = 3, v_c = 2, v_d = 2$

$$\Rightarrow 5(-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 0$$

## Insiemi di taglio

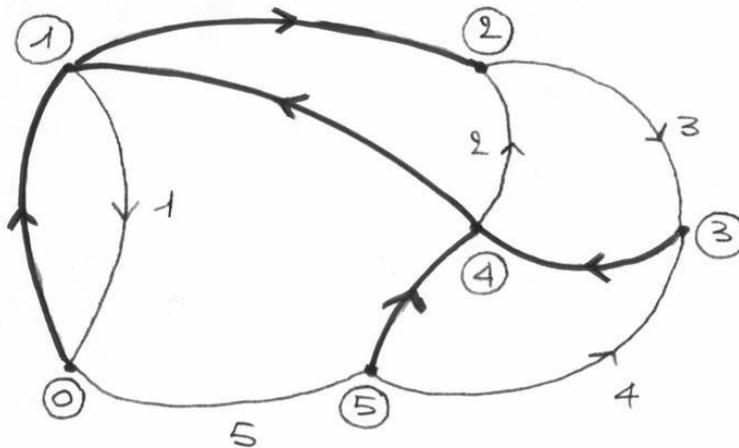
- Sono una generalizzazione del concetto di nodo. Dividiamo i nodi  $\mathcal{G}$  di un grafo in due sottoinsiemi  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ . L'insieme di taglio corrispondente è composto dai rami che collegano tra loro  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ .



- $\mathcal{G}_1 = \{0,1\}$ ,  $\mathcal{G}_2 = \{2,3,4,5\} \Rightarrow \mathcal{J} = \{a,b,c\}$
- IK può essere scritta su un insieme di taglio, dopo aver fissato una direzione positiva convenzionale:  $i_a - i_b + i_c = 0$
- Ci sono  $n-1$  tagli indipendenti.

## Alberi e coalberi

- Dato un grafo connesso  $\mathcal{G}$  con  $n$  nodi e  $b$  rami, un albero  $\mathcal{T}$  di  $\mathcal{G}$  è un sottografo connesso di  $\mathcal{G}$  contenente tutti i nodi di  $\mathcal{G}$  e  $n-1$  rami. In tal modo tutti i nodi sono collegati tra loro e non ci sono maglie. I restanti  $m = b - (n-1)$  rami formano il coalbero (nella figura i rami 1,2,3,4,5).



- Ci sono diversi alberi per ogni grafo.

## *Maglie indipendenti*

- Ognuno dei rami del coalbero identifica una maglia indipendente (formata dal ramo del coalbero e dai rami dell'albero che chiudono la maglia).
- Sono  $m = b - (n - 1)$  le maglie indipendenti di un circuito.
- Ci sono tanti insiemi di maglie indipendenti quanti sono gli alberi
- A ogni maglia si può applicare IIK nella prima formulazione.

## *Considerazioni sulle $i$ e $v$*

- Matrice **A**:  $[n-1 \times b]$ 
  - devo conoscere  $b - (n-1)$  correnti indipendenti per risolvere il sistema.
  - Una scelta sicura è fissare le correnti di un co-albero. Se almeno due correnti fossero dipendenti, ovvero incidenti esclusive in un nodo, allora quel nodo sarebbe escluso dall'albero, il che contrasterebbe con la definizione di albero.
- Matrice **B**:  $[b-(n-1) \times b]$ 
  - devo conoscere  $(n-1)$  tensioni indipendenti per risolvere il sistema.
  - Una scelta sicura è fissare le tensioni di un albero, in questo modo sono sicuro che non possano formare maglie.