

G.V. MARGAGLIOTTI

**Appunti di
Fisica Nucleare
a.a. 2022/23**

2022

©2021 G.V.Margagliotti

email: giacomo.margagliotti@ts.infn.it

Tel: 040-5583376

Indice

1	Introduzione	7
1.1	I costituenti fondamentali della materia	7
1.2	Elementarità	7
1.3	Il nucleo atomico	8
1.4	Tabella dei nuclidi	12
1.5	Unità di misura e scale dimensionali	14
2	Proprietà del nucleo atomico	17
2.1	Masse dei nuclei	17
2.2	Misura di masse nucleari	19
2.2.1	Metodi spettrometrici	19
2.2.2	Misura di masse tramite reazioni nucleari	20
2.3	Dimensioni dei nuclei	23
2.4	Misura delle dimensioni dei nuclei	23
2.4.1	Raggio di carica: atomi muonici	23
2.4.2	Raggio di carica: nuclei speculari	28
2.4.3	Raggio di carica: diffusione diffrattiva	30
2.5	Natura delle forze nucleari e dimensioni dei nuclei	34
2.5.1	Distribuzione della materia in un nucleo	35
2.5.2	Energia di legame nucleare	36
2.5.3	Neutron drip line	43
2.6	La misura di Rutherford	45
2.6.1	I risultati dell'esperimento di Rutherford	51
3	Struttura dei nuclei e modelli nucleari	55
3.1	Modello a gas di Fermi	55
3.2	Il modello a Shell	60
3.2.1	Ipernuclei	61
3.2.2	Il potenziale del modello a Shell	65
3.2.3	Nucleoni di valenza	69
3.2.4	Spin dei nuclei	71
3.2.5	Parità e nuclei	73
3.2.6	Momenti elettrici e magnetici dei nuclei	74

3.2.7	Misure dei momenti elettrici e magnetici dei nuclei	79
3.2.8	Isospin	81
4	Instabilità dei nuclei	87
4.1	Decadimento radioattivo di una sola sostanza	89
4.1.1	Misure di vite medie	92
4.2	Decadimento radioattivo di più sostanze	94
4.3	Tecniche radioattive di datazione	101
5	Decadimenti nucleari	107
5.1	Generalità	107
5.2	Radioattività α	109
5.2.1	Energetica dei decadimenti α	110
5.2.2	Soglia di instabilità	112
5.2.3	Teoria del decadimento α	114
5.3	Radioattività β	127
5.3.1	Conversione interna	127
5.3.2	Decadimento β	128
5.3.3	Regole di Sargent	135
5.3.4	Teoria di Fermi dell'interazione debole	136
5.3.5	Il calcolo di Fermi	137
5.3.6	Emissione ritardata di nucleoni	144
5.4	Radioattività γ	146
5.4.1	Energetica dei decadimenti γ	146
5.4.2	Regole di selezione per decadimenti γ	147
6	Processi d'urto	151
6.1	Sezioni d'urto	151
6.1.1	Lunghezza di attenuazione	154
6.1.2	Luminosità	155
6.1.3	Sezione d'urto in funzione dell'impulso	155
6.1.4	Sezione d'urto invariante	156
6.1.5	Probabilità di transizione e sezione d'urto	157
6.2	Approccio quantistico al concetto di sezione d'urto	157
7	Reazioni nucleari in regime non relativistico	159
7.1	Leggi di conservazione	160
7.2	Energetica delle reazioni nucleari	161
7.3	Diffusione da potenziale Coulombiano	166
7.3.1	Sezione d'urto di Mott	170
7.4	Diffusione da potenziale nucleare	173
7.5	Diffusione in onde parziali	176
7.6	Modello ottico	180
7.7	Reazioni con formazione del nucleo composto	183

7.8	Reazioni dirette	185
7.9	Reazioni di risonanza	186
8	Fisica dei neutroni	193
8.1	Sorgenti di neutroni	194
8.2	Assorbimento e moderazione dei neutroni	197
8.3	Reazioni con neutroni e sezioni d'urto	202
9	Radioisotopi e medicina nucleare	207
9.1	Diagnostica per immagini	208
9.2	Produzione di radioisotopi	212
10	Termodinamica nucleare	217
10.1	Descrizione termodinamica di un nucleo	219
10.2	Fasi della materia nucleare	223
11	La forza nucleare	233
11.1	La diffusione nucleone-nucleone	234
11.2	Sistema legato nucleone-nucleone	239
11.2.1	Il deutone	240
11.3	Il potenziale di Yukawa	243
11.4	Analogia atomico-molecolare	248
12	Interazioni fra ioni pesanti relativistici	253
12.1	Vedi anche <i>Valentina Zaccolo</i>	253
13	Fissione nucleare	255
13.1	Teoria elementare della fissione	256
13.2	Sezioni d'urto di fissione	263
13.3	Reazione a catena controllata	264
13.4	Il reattore nucleare preistorico di Oklo	268
14	Fusione nucleare	273
14.1	Caratteristiche della fusione	275
14.1.1	Rilascio energetico	275
14.1.2	Rateo di fusione	275
A	Richiami di Relatività ristretta	283
A.1	Coordinate parallele e trasverse	286
A.2	Legge relativistica del moto di una particella	288
B	Cinematica relativistica del decadimento in due corpi	291
C	La scoperta del neutrone	295
D	Struttura iperfine	297

E Applicazioni decadimento α	299
E.0.1 Convertitore termoelettrico a plutonio	299
F γ-camera	305
G Esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni	307
H Instabilità di un nucleo prolato	311
I Leggi di conservazione e loro violazioni	315
J I raggi cosmici	317
J.1 Alcune caratteristiche dei raggi cosmici	319
J.2 Meccanismi d'accelerazione alla Fermi	322

Capitolo 7

Reazioni nucleari in regime non relativistico

Le prime reazioni nucleari indotte sono state prodotte nel laboratorio di Rutherford con particelle α da sorgenti radioattive. In alcuni di questi primissimi esperimenti le particelle α semplicemente rimbalzavano elasticamente sui nuclei bersaglio. In esperimenti successivi Rutherford osservò la modificazione o "trasmutazione" di specie nucleari come nella reazione studiata nel 1919



Il primo acceleratore di particelle in grado di indurre reazioni nucleari fu realizzato da Cockroft e Walton che nel 1930 osservarono la reazione



Le reazioni con energie fino a poche decine di MeV nel canale di reazione vengono dette a *bassa energia*. Quelle nell'intervallo $100 \text{ MeV} \div 1 \text{ GeV}$ sono dette di *media energia* e comportano anche la produzione di mesoni e la trasformazione di protoni in neutroni e viceversa. A energie superiori si possono produrre anche altre particelle più massive e determinare riarrangiamenti dei quark che costituiscono i nucleoni interagenti.

Una tipica reazione nucleare $a + X \rightarrow Y + b$ si scrive anche



con a il proiettile, X il nucleo bersaglio, eventualmente a riposo nel SL, Y e b i prodotti di reazione. Spesso Y è un prodotto pesante che si ferma nella struttura del bersaglio e non viene osservato direttamente, mentre b è leggero e può essere rivelato.

Se a è un raggio γ la reazione è detta *foto-nucleare*, se b è un raggio γ la reazione viene detta *cattura radiativa*.

Se a e b coincidono, e così pure X e Y , si ha diffusione *elastica* se Y e b sono nel loro stato fondamentale, *anelastica* se Y o b o entrambi sono in uno stato eccitato.

Talvolta a e b sono la stessa particella ma la reazione produce un ulteriore nucleone nel canale d'uscita, espulso dal nucleo X per effetto dell'urto; questo meccanismo di reazione è detto di *knockout*.

Vi sono *reazioni di trasferimento* in cui uno o più nucleoni vengono scambiati fra proiettile e bersaglio, come nel caso in cui un deutone incidente si trasforma in un protone o in un neutrone in uscita con la cessione di un neutrone o di un protone al bersaglio X per trasformarlo in Y .

Le reazioni possono essere classificate anche in base al meccanismo che le governa. Le reazioni di trasferimento appartengono ad esempio alle cosiddette *reazioni dirette*, nel corso delle quali solo pochi nucleoni, tipicamente del bersaglio, prendono effettivamente parte al processo, con la restante parte dei nucleoni del bersaglio che svolgono un ruolo di sostanziali spettatori passivi.

Questo tipo di reazioni porta alla rimozione o all'inserimento di singoli nucleoni, permettendo di studiare direttamente la struttura a shell dei nuclei. C'è poi l'altro caso estremo, detto meccanismo del *nucleo composto*, in cui proiettile e bersaglio si fondono per un breve lasso di tempo durante il processo, ripartendosi completamente l'energia disponibile prima che il sistema così costituito, detto appunto *nucleo composto*, si disecchi emettendo uno o più nucleoni in un modo che ricorda l'evaporazione di una molecola da un liquido caldo.

Fra questi due casi estremi trovano posto le cosiddette *reazioni di risonanza*, nel corso delle quali il proiettile forma col bersaglio uno stato *quasi-legato* prima dell'emissione del prodotto leggero della reazione.

7.1 Leggi di conservazione

La conservazione dell'*energia totale* e dell'*impulso totale* sono utilizzate per correlare le energie misurabili dei prodotti di reazione alle energie note delle particelle incidenti.

L'energia misurata di b permette di dedurre l'energia d'eccitazione degli stati di Y o la differenza di massa tra X e Y .

Nei processi a bassa energia, nel corso dei quali non hanno luogo produzione di pioni e/o riarrangiamenti dei quark costituenti, vale la conservazione separata del *numero di protoni e di neutroni*, che deriva dalla più generale conservazione del *numero barionico*.

Le interazioni deboli hanno un ruolo trascurabile sulla scala temporale caratteristica delle reazioni nucleari, che è dell'ordine di $10^{-16} \div 10^{-22}$ s.

La conservazione del *momento angolare* aiuta nel correlare gli spin delle particelle del canale d'ingresso col momento angolare orbitale dei prodotti dei

canali d'uscita delle reazioni, deducibili da misure delle loro distribuzioni angolari. Si può così risalire agli spin degli specifici stati nucleari.

La conservazione della *parità* permette, noto il momento angolare orbitale dei prodotti di reazione, tramite la regola $(-1)^\ell$ e dalla conoscenza degli altri valori di parità, di risalire alle parità incognite degli eventuali stati eccitati.

7.2 Energetica delle reazioni nucleari

La conservazione dell'energia totale per una reazione del tipo [7.3](#) si scrive

$$m_X c^2 + E_{k,X} + m_a c^2 + E_{k,a} = m_Y c^2 + E_{k,Y} + m_b c^2 + E_{k,b} \quad (7.4)$$

Dove E_k indica le energie cinetiche per le quali a basse energie si può utilizzare l'approssimazione non relativistica.

Si definisce il Q -valore di una reazione analogamente a quanto fatto per i decadimenti radioattivi

$$Q = (m_X + m_a - m_Y - m_b) c^2 \equiv E_{k,Y} + E_{k,b} - E_{k,X} - E_{k,a} \quad (7.5)$$

Il Q -valore può risultare positivo, negativo o nullo.

Se $Q > 0$ la reazione si dice *eso-energetica* o *esotermica* e parte della massa del sistema iniziale, ovvero della sua energia di legame, è stata trasformata in energia cinetica dei prodotti di reazione.

Se $Q < 0$ la reazione si dice *endoenergetica* o *endotermica* e in tal caso parte dell'energia cinetica presente nel canale d'ingresso è stata convertita in massa o in energia di legame dei prodotti di reazione.

Le relazioni [7.4](#) e [7.5](#) valgono qualunque sia il sistema di riferimento scelto. Ci si pone nel Sistema del Laboratorio (SL), in cui i nuclei bersaglio sono a riposo, trascurando il moto termico.

Si definisce un "piano di reazione" tramite la direzione dell'asse del fascio incidente e quella della traiettoria di uno dei prodotti uscenti. Dalla conservazione delle componenti dell'impulso ortogonali a tale piano discende immediatamente che anche la traiettoria dell'altro prodotto uscente giace sullo stesso piano. La geometria della reazione è illustrata in figura [7.1](#). La conservazione dell'impulso dà

$$\begin{aligned} p_a &= p_b \cos\vartheta + p_Y \cos\xi \\ 0 &= p_b \sin\vartheta + p_Y \sin\xi \end{aligned} \quad (7.6)$$

Supponendo noto Q , con $E_{k,a}$ e quindi p_a parametri controllabili dallo sperimentatore, le [7.5](#) e [7.6](#) costituiscono un insieme di tre equazioni in quattro incognite (ϑ , ξ , $E_{k,b}$, $E_{k,Y}$) che non possiede quindi un'unica soluzione.

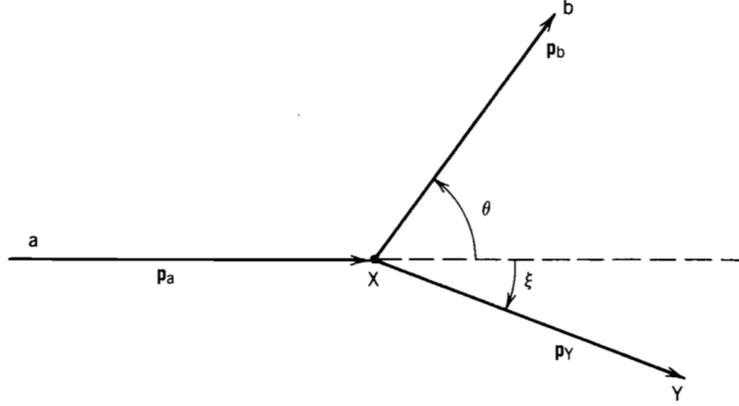


Figura 7.1: Geometria base di una reazione $a + X \rightarrow Y + b$.

Se il nucleo residuo Y non viene osservato, si possono eliminare dalle equazioni le quantità ξ ed $E_{k,Y}$, trovando dunque la relazione tra $E_{k,b}$ e ϑ

$$\sqrt{E_{k,b}} = \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a}} \cos \vartheta}{m_Y + m_b} \pm \frac{\sqrt{m_a m_b E_{k,a} \cos^2 \vartheta + (m_Y + m_b) [m_Y Q + (m_Y - m_a) E_{k,a}]}}{m_Y + m_b} \quad (7.7)$$

In figura 7.2 è mostrato l'andamento di $E_{k,b}$ verso $E_{k,a}$ per la reazione ${}^3\text{H}(p,n){}^3\text{He}$, con Q -valore $Q = -763.75$ keV. Tranne che per un piccolo intervallo energetico $1.019 \text{ MeV} \leq E_{k,a} \leq 1.147 \text{ MeV}$, c'è corrispondenza biunivoca fra $E_{k,b}$ e ϑ , fissato un valore di $E_{k,a}$.

Dal grafico in figura 7.2 si nota anche che $E_{k,a}$ ha un valore minimo assoluto E_{th} al di sotto del quale la reazione non può aver luogo e ciò corrisponde a valori negativi del Q -valore

$$E_{th} = (-Q) \frac{m_Y + m_b}{m_Y + m_b - m_a} \quad (7.8)$$

La condizione di soglia si manifesta sempre per $\vartheta = 0$ e quindi $\xi = 0$, e corrisponde ai prodotti di reazione Y e b che si muovono assieme in direzione e verso comuni, sempre però restando due entità separate. Si tratta di un urto perfettamente centrale in cui non vi è stata trasformazione d'energia nella creazione di impulsi trasversi rispetto alla direzione dell'asse del fascio. Se $Q > 0$ non ci sono condizioni di soglia al procedere della reazione, anche se bisogna tener conto della possibile barriera coulombiana, oltre alle forze nucleari a corto range.

La condizione di non-biunivocità ha luogo per valori di energia compresi tra E_{th} ed E'_a , con

$$E'_a = (-Q) \frac{m_Y}{m_Y - m_a} \quad (7.9)$$

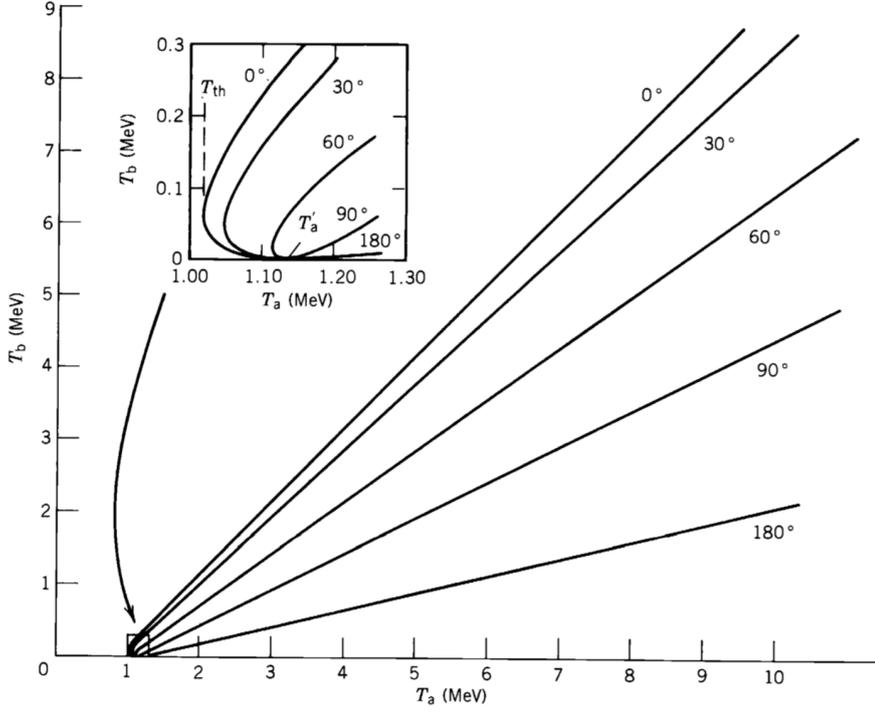


Figura 7.2: $E_{k,b}$ verso $E_{k,a}$ per la reazione ${}^3\text{H}(p, n){}^3\text{He}$. Nel riquadro è evidenziata la zona di non biunivocità.

e si presenta chiaramente solo per $Q < 0$, rivestendo un ruolo importante esclusivamente per reazioni che coinvolgano nuclei di masse confrontabili. Dalle [7.8](#) e [7.9](#) si ottiene

$$E'_a - E_{th} \simeq E_{th} \frac{m_a m_b}{m_Y (m_Y - m_a)} \left(1 - \frac{m_b}{m_Y} + \dots \right) \quad (7.10)$$

da cui si nota che se a e b sono nuclei con $A \leq 4$ e Y è un nucleo pesante o medio pesante, allora l'intervallo $(E'_a - E_{th})$ di non-biunivocità è inferiore all'1% dell'energia di soglia della reazione. Un secondo esempio per la reazione ${}^{14}\text{C}(p, n){}^{14}\text{N}$ è mostrato in figura [7.3](#).

Si osserva che la zona di non-biunivocità si manifesta fino ad un valore angolare massimo possibile ϑ_m che equivale alla condizione di annullamento dell'argomento della seconda radice quadrata presente nella [7.7](#)

$$\cos^2 \vartheta_m = - \frac{(m_Y + m_b) [m_y Q + (m_Y - m_a) E_{k,a}]}{m_a m_b E_{k,a}} \quad (7.11)$$

Per $E_{k,a} = E'_{k,a}$ la zona di non-biunivocità si estende da $\vartheta = 0$ sino a $\vartheta_m = 90^\circ$; in prossimità di $E_{k,a} = E_{th}$ ha invece luogo soltanto per $\theta_m \simeq 0$. Se una reazione è invece caratterizzata dall'aver $Q > 0$, come detto non

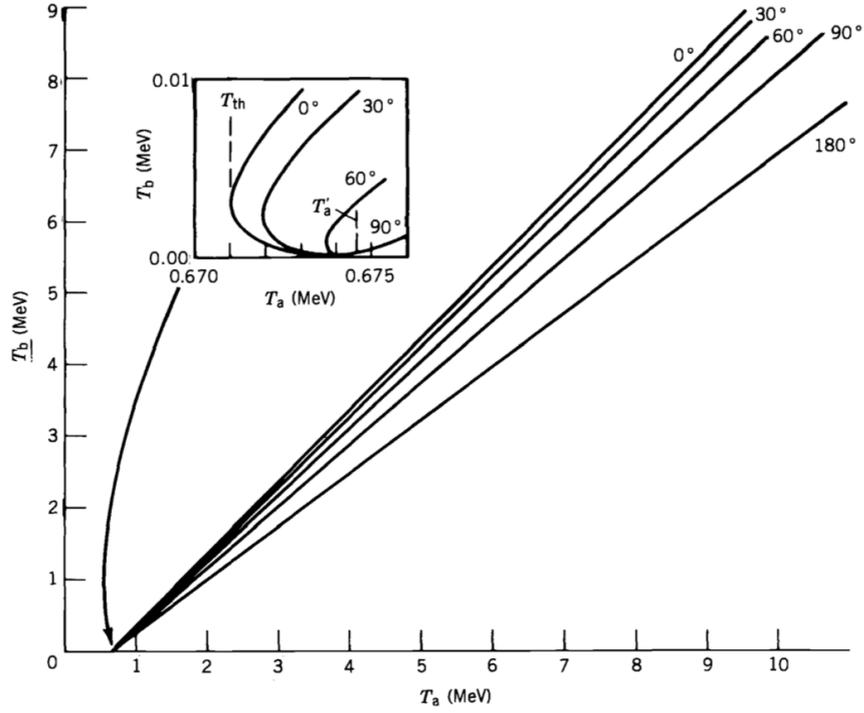


Figura 7.3: $E_{k,b}$ verso $E_{k,a}$ per la reazione $^{14}\text{C}(p, n)^{14}\text{N}$. Nel riquadro la zona di non biunivocità.

vi sono nè un valore di soglia energetica nè intervalli angolari per i quali si abbiano doppi valori dell'energia. Considerando ad esempio le reazioni inverse delle due viste sopra, ovvero $^3\text{He}(n, p)^3\text{H}$ e $^{14}\text{N}(n, p)^{14}\text{C}$, si ha $-Q \rightarrow +Q$, e la nuova situazione è illustrata in figura [7.4](#)

Dalla misura di $E_{k,b}$, noti ϑ ed $E_{k,a}$, si deducono il Q della reazione e la relazione fra le masse. Note m_a , m_b ed m_X si deduce m_Y .

Risolviendo la [7.7](#) rispetto al Q -valore si ha

$$Q = E_{k,b} \left(1 + \frac{m_b}{m_Y}\right) - E_{k,a} \left(1 - \frac{m_a}{m_Y}\right) - 2\sqrt{\frac{m_a}{m_Y} \frac{m_b}{m_Y}} E_{k,a} E_{k,b} \cos\vartheta \quad (7.12)$$

A rigori questa procedura non è corretta in quanto nel termine a destra dell'uguaglianza compare anche m_Y , spesso si possono però ottenere risultati sufficientemente accurati sostituendo ad m_Y il valore intero che ne rappresenta il numero di massa, e ciò in particolare se si hanno risultati di misure effettuate a $\vartheta = 90^\circ$, per cui si annulla l'ultimo termine della [7.12](#)

Se la reazione conduce a stati eccitati del nucleo risultante Y , allora il Q -valore deve tenerne conto

$$Q_{ecc} = (m_X + m_a - m_Y^* - m_b) c^2 = Q_0 - E_{ecc} \quad (7.13)$$

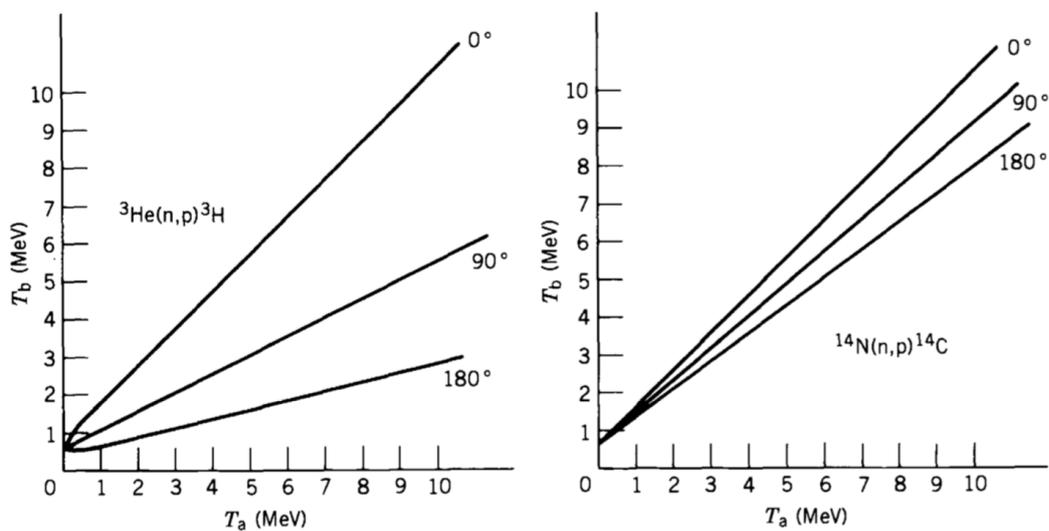


Figura 7.4: $E_{k,b}$ verso $E_{k,a}$ per le reazioni ${}^3\text{He}(n,p){}^3\text{H}$ e ${}^{14}\text{N}(n,p){}^{14}\text{C}$.

con Q_0 il Q -valore corrispondente allo stato fondamentale di Y , E_{ecc} l'energia d'eccitazione rispetto allo stato fondamentale di Y , da cui la massa m_Y^* dello stato eccitato

$$m_Y^* = \frac{m_Y c^2 + E_{ecc}}{c^2} \quad (7.14)$$

Solitamente il valore massimo osservato sperimentalmente per $E_{k,b}$ corrisponde al caso della reazione con nucleo finale Y nello stato fondamentale, per cui dalla [7.12](#) si può ottenere Q_0 . I valori via via inferiori di $E_{k,b}$ corrispondono agli stati eccitati per i quali si possono dedurre E_{ecc} e Q_{ecc} dalle misure di $E_{k,b}$.

7.3 Diffusione da potenziale Coulombiano

Si calcola ora la sezione d'urto differenziale per l'interazione coulombiana fra una particella incidente puntiforme di carica Z_1e e un bersaglio anche puntiforme di carica Z_2e , non tenendo conto degli spin delle particelle interagenti. Si suppone che l'equivalente energetico della massa del bersaglio sia grande se confrontato con l'energia cinetica del proiettile, così da poter trascurare il rinculo. In tal caso si può utilizzare il tri-impulso e se Z_2e è piccolo, dunque se $Z_2\alpha \simeq Z_2/137 \ll 1$, il che equivale a dire che il potenziale agente non è troppo intenso, ci si trova nelle condizioni di poter applicare l'approssimazione perturbativa di Born. L'effetto del potenziale a distanza ∞ è allora trascurabile e le particelle del fascio incidente, nei loro stati iniziale e finale, sono considerate come libere; le funzioni d'onda che le descrivono sono autofunzioni dell'impulso, cioè onde piane

$$\psi_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad , \quad \psi_f(\mathbf{p}_f, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (7.15)$$

Le difficoltà eventualmente connesse alla normalizzazione delle funzioni d'onda possono essere superate considerando un opportuno volume finito V , che sia sufficientemente grande rispetto alla zona direttamente coinvolta nel processo d'urto tanto da poter confondere gli stati di energia discreta presenti in esso con un quasi continuo di stati. Le dimensioni di V devono essere inoltre tali da comprendere anche materia e strutture circostanti il volume strettamente legato al processo d'interazione, così da poter considerare uno schermaggio conseguente efficace della carica Z_2e del bersaglio verso ogni particella incidente/deflessa oltre una certa distanza. Il risultato finale non deve inoltre dipendere da tale volume V .

Preso un fascio di particelle incidenti con densità n_a particelle per unità di volume e scelto come detto sufficientemente grande il volume d'integrazione, si ha per la condizione di normalizzazione

$$\int_V |\psi_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{r})|^2 dV = n_a V \quad \text{con} \quad V = \frac{N_a}{n_a} \quad (7.16)$$

dove N_a rappresenta la totalità delle particelle a del fascio che hanno inciso sul bersaglio. V è quindi un ben preciso volume di normalizzazione che va opportunamente scelto per ogni singolo fascio incidente; si indichino con $R \propto V^{1/3}$ le dimensioni lineari caratterizzanti tale volume.

Il tasso W di interazioni è allora dato dal prodotto della sezione d'urto σ con il modulo v_a della velocità di ogni particella incidente, diviso per il volume V . Applicando quindi la regola d'oro di Fermi

$$\frac{\sigma v_a}{V} = W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f} \quad (7.17)$$

dove E_f rappresenta l'energia totale, cinetica più equivalente in massa, dello stato finale. Poichè si considera un problema d'urto elastico, non avendo

supposto alcun assorbimento d'energia da parte del bersaglio (ad esempio rinculo) o trasformazioni massa/energia, ne consegue $dE_f = dE' = dE$. Dato inoltre che si trascura l'effetto del potenziale per gli stati iniziale e finale a grande distanza dal centro diffusivo, ne consegue che si conservano i moduli degli impulsi, ovvero $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$. Il solo effetto della diffusione da parte del potenziale coulombiano si risolve quindi in una deflessione di un angolo ϑ fra i due impulsi iniziale e finale della particella incidente. La

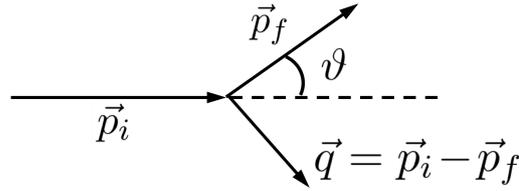


Figura 7.5: Relazione fra \mathbf{p}_i e \mathbf{p}_f conseguente al processo di diffusione.

densità nello spazio delle fasi degli stati finali possibili è data da

$$dn(|\mathbf{p}_f|) = \frac{4\pi |\mathbf{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} d|\mathbf{p}_f| \quad (7.18)$$

e conseguentemente la sezione d'urto per la diffusione di una particella incidente entro l'elemento $d\Omega$ di angolo solido è data da

$$d\sigma \frac{v_a}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \frac{|\mathbf{p}_f|^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d|\mathbf{p}_f|}{dE_f} d\Omega \quad (7.19)$$

Per energie molto alte delle particelle incidenti si può porre $v_a \simeq c$ e anche $|\mathbf{p}_f| \simeq E_f/c$, da cui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 E_f^2}{4\pi^2 c^4 \hbar^4} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle|^2 \quad (7.20)$$

L'Hamiltoniano d'interazione per una particella incidente di carica $Z_1 e$ ha in questo caso la forma $\mathcal{H}_{int} = Z_1 e \cdot \Phi(r)$, con

$$\Phi(r) = \frac{Z_2 e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7.21)$$

L'elemento della matrice di transizione è quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle &= \mathcal{M}(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{-i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x = \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x = \mathcal{M}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (7.22)$$

dove $\mathbf{q} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f$ è l'impulso trasferito. Si ha: $|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}|$, e $(1 - \cos\vartheta) = 2 \operatorname{sen}^2\vartheta/2$, quindi

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_f|^2 - 2|\mathbf{p}_i||\mathbf{p}_f|\cos\vartheta = 2|\mathbf{p}|^2(1 - \cos\vartheta) = 4|\mathbf{p}|^2 \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2} \quad (7.23)$$

Si calcola l'integrale nella [7.22](#) passando a coordinate polari¹ e si ottiene

$$\int \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x = 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 \int_0^\infty \operatorname{sen}x dx \quad (7.25)$$

L'integrando mostra infinite oscillazioni della medesima ampiezza, quindi l'integrale non converge. Per ottenere qualcosa di sensato bisogna definirlo in modo da tener conto del significato fisico del problema. L'origine della divergenza risiede nel fatto che per il potenziale si è usato l'andamento proporzionale ad r^{-1} fino a distanza ∞ , ma come si è già osservato ciò non ha significato fisico in quanto, indipendentemente dalle dimensioni dell'apparato sperimentale, vi sarà sempre una distanza a partire dalla quale le strutture fisiche presenti schermano il potenziale. Quindi bisogna tenerne conto facendo in qualche modo tendere a zero il potenziale molto più rapidamente di r^{-1} , oltre una opportuna distanza $R \propto V^{1/3}$ che al termine del calcolo verrà fatta tendere ad ∞ .

Si realizza ciò considerando un potenziale di tipo Yukawa, ovvero della forma $\Phi(r) = e^{-\lambda r}/r$, dove $\lambda \sim 1/R$ rappresenta una quantità piccola che si farà alla fine tendere a 0. Si ha così

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \operatorname{sen}x dx &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty [e^{(i-\lambda)x} - e^{-(i+\lambda)x}] dx = \\ &= -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{i-\lambda} + \frac{1}{i+\lambda} \right) = \frac{1}{1+\lambda^2} \quad \text{con,} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{1+\lambda^2} = 1 \end{aligned} \quad (7.26)$$

Si ottiene dunque, per l'elemento della matrice di transizione

$$\mathcal{M}(\mathbf{q}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} 4\pi \left(\frac{\hbar}{|\mathbf{q}|}\right)^2 = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 V |\mathbf{q}|^2} \quad (7.27)$$

¹Si prende come angolo polare α quello fra \mathbf{q} ed \mathbf{r} e:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{r} d_3x &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \operatorname{sen}\alpha d\alpha \int_0^\infty r^2 e^{\frac{iqr \cos\alpha}{\hbar}} dr = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\alpha) \int_0^\infty r^2 e^{\frac{iqr \cos\alpha}{\hbar}} dr = 2\pi \int_0^\infty r \frac{\hbar}{iqr} (e^{iqr/\hbar} - e^{-iqr/\hbar}) dr = \\ &= 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 \int_0^\infty \operatorname{sen}x dx \quad \text{posto,} \quad x = qr/\hbar. \end{aligned} \quad (7.24)$$

da cui infine la sezione d'urto

$$\begin{aligned}\sigma(\vartheta) &= \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}(\mathbf{q})|^2 = \frac{E_f^2}{(2\pi)^2 c^4} \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{\epsilon_0^2 |\mathbf{q}|^4} \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4E_f^2}{p^4 c^4} \frac{1}{\text{sen}^4\vartheta/2}\end{aligned}\quad (7.28)$$

Se si considera ora il limite relativistico di questo risultato, ovvero si assume $E_f \simeq pc$, si ha

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\epsilon_0 E_f} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\vartheta/2} \quad (7.29)$$

Se invece ci si pone nel limite non relativistico, per cui $E_k = p^2/(2m)$ ed $E_f \approx mc^2$, allora il termine $4E_f^2/(pc)^4$ si approssima con $1/E_k^2$, per cui la sezione d'urto diventa

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0 E_k} \right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\vartheta/2} \quad (7.30)$$

con lo stesso risultato ottenuto nell'approccio classico, e ciò non dipende dall'aver utilizzato l'approssimazione di Born, in quanto si può dimostrare che il risultato vale per tutti gli ordini perturbativi.

Fattore di forma

Se più realisticamente si considera la carica diffondente $Z_2 e$ non puntiforme ma distribuita con simmetria sferica, il potenziale, conglobando in esso anche la carica $Z_1 e$ della particella incidente, è esprimibile come

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (7.31)$$

con $\int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 1$, ricordando che $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ è invariante per traslazione, con l'integrale che si estende a tutto il volume V' contenente le cariche bersaglio.

La matrice di transizione diventa in questo caso, ponendo $\mathbf{D} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbf{q}) &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} d\mathbf{r} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \\ &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{D}/\hbar}}{D} d\mathbf{D} \int \rho(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'/\hbar} d\mathbf{r}'\end{aligned}\quad (7.32)$$

Essa è il prodotto di tre fattori: il secondo corrisponde al primo dei due integrali e come visto, vale $4\pi(\hbar/|\mathbf{q}|)^2$; il terzo, indicato con $F(\mathbf{q})$, coincide con la *trasformata di Fourier* della distribuzione della densità di carica

elettrica

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}') e^{\frac{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'}{\hbar}} d\mathbf{r}' \quad (7.33)$$

$F(\mathbf{q})$ è detto *fattore di forma* della distribuzione di carica elettrica. La normalizzazione della distribuzione di carica dà

$$F(0) = \int \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = 1 \quad (7.34)$$

La sezione d'urto di diffusione coulombiana per una carica estesa si scrive dunque come

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{16\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{4E_f^2}{(pc)^4} \frac{1}{\text{sen}^4 \frac{\vartheta}{2}} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (7.35)$$

Il risultato trovato vale però ora solo in approssimazione di Born e non si mantiene se si includono gli ordini perturbativi più elevati.

Differentemente dal caso classico, in cui le sezioni d'urto da carica puntiforme e da carica estesa coincidevano per ogni angolo $\vartheta < \vartheta_0$, nel caso quantistico esse coincidono soltanto per $\vartheta = 0$, ovvero $|\mathbf{q}| = 0$ 2.

7.3.1 Sezione d'urto di Mott

Si può verificare che tener conto anche dello spin porta, per la sezione d'urto da diffusione coulombiana di leptoni relativistici su nuclei massivi e puntiformi, a un risultato, detto sezione d'urto di Mott che trascurando il rinculo del nucleo bersaglio si scrive

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \left(1 - \beta^2 \text{sen}^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (7.36)$$

Al crescere della velocità del proiettile la sezione d'urto di Mott cala dunque più rapidamente di quella di Rutherford, con l'angolo ϑ di diffusione. Nei casi fortemente relativistici, in cui $\beta = v/c \rightarrow 1$, si ha

$$\frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} \simeq \frac{d\sigma_{Ruth}(\vartheta)}{d\Omega} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (7.37)$$

²Il motivo è nella natura quantistica del fenomeno. Classicamente si possono definire contemporaneamente l'impulso \mathbf{p} e il parametro d'urto b . Quantisticamente fissare $v = v_z$ equivale all'aver fissato $v_x = v_y = 0$. Non si possono quindi più definire le componenti delle coordinate nel piano (x, y) , ovvero il parametro d'urto b che altro non è se non un vettore su tale piano. Fissata quindi la velocità \mathbf{v} , sono ammessi tutti i valori del parametro d'urto, quindi anche quelli per cui è $b < l_0$, corrispondenti a $\vartheta > \vartheta_0$.

La sezione d'urto $d\sigma_{Coul}(\vartheta)/d\Omega$ di diffusione coulombiana per una carica estesa va quindi scritta come

$$\frac{d\sigma_{Coul}(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{Mott}(\vartheta)}{d\Omega} |F(\mathbf{q})|^2 \quad (7.38)$$

La necessità del fattore aggiuntivo che la sezione d'urto di Mott introduce rispetto a quella di Rutherford può essere capita se si considera il caso limite della diffusione a π radianti. Nel caso in cui si abbiano particelle relativistiche, per le quali $\beta \rightarrow 1$, dall'equazione di Dirac si deduce che la proiezione del loro spin \mathbf{s} lungo la direzione del moto, rappresentata dal versore $\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, è una quantità che si conserva. In pratica come quantità che si conserva si introduce

$$H = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{s}| |\mathbf{p}|} \quad (7.39)$$

detta *elicità*. L'elicità vale $+1$ per particelle con spin orientato nel verso del moto e vale -1 per particelle con spin orientato in verso opposto al moto.

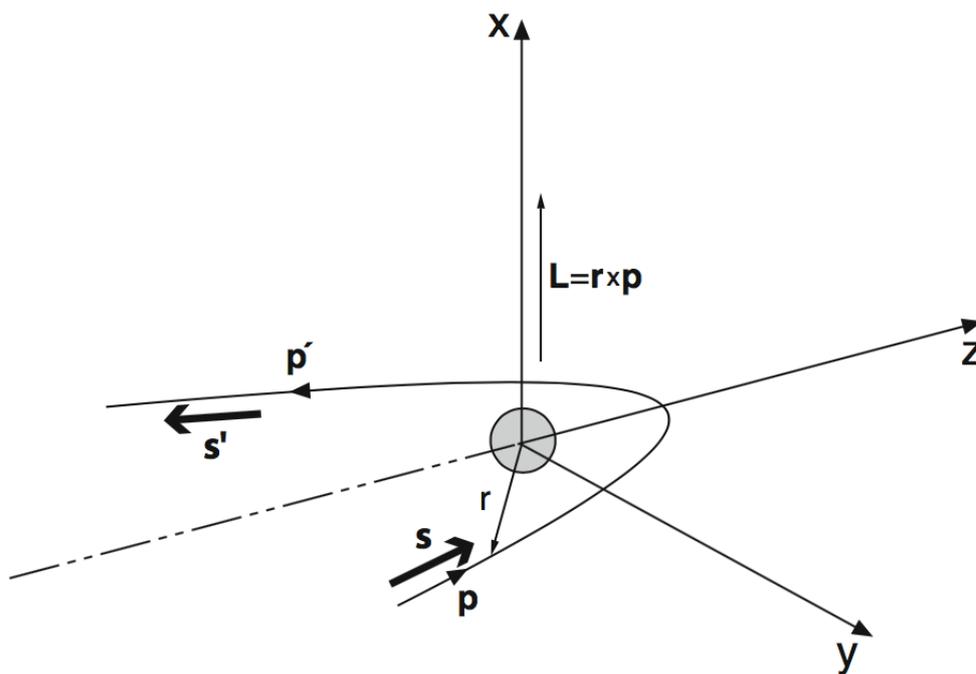


Figura 7.6: Diffusione a π radianti.

In figura [7.6](#) è mostrata una possibile configurazione di diffusione all'indietro, anche se non esattamente a π radianti, dove si è scelto come asse z di quantizzazione quello parallelo all'impulso \mathbf{p} dell'elettrone incidente. Per la conservazione dell'elicità, la proiezione dello spin \mathbf{s} sull'asse z dovrebbe cambiare segno con l'urto, ma ciò è impossibile con un bersaglio di spin

nullo, a causa della conservazione del momento angolare totale. Il momento angolare orbitale \mathbf{L} è infatti perpendicolare alla direzione z del moto e non può quindi determinare alcun cambiamento nella componente lungo z del momento angolare. Ciò significa che per particelle relativistiche la diffusione a π radianti dovrebbe essere totalmente soppressa.

Se invece il bersaglio possiede un valore non nullo di spin allora la proiezione dello spin dell'elettrone può essere modificata durante la diffusione a π radianti, in quanto la conservazione del momento angolare può trovare compensazione nel concomitante cambiamento della direzione dello spin del bersaglio. In questo caso la diffusione a π radianti è possibile.

Questa previsione trova riscontro nei risultati sperimentali.

Nel seguito, senza con ciò togliere generalità agli argomenti trattati, a meno di specificare diversamente si considereranno soltanto fattori di forma a simmetria sferica, relativi dunque a sistemi che non presentano direzioni preferenziali nello spazio. In tal caso i fattori di forma dipendono esclusivamente dall'impulso trasferito \mathbf{q} e per sottolinearlo si scriverà il fattore di forma come $F(\mathbf{q}^2)$.

7.4 Diffusione da potenziale nucleare

L'intensità dell'interazione non permette di utilizzare la teoria delle perturbazioni e non si può dunque applicare l'approssimazione di Born.

Usando proiettili con energie sufficientemente alte però, la loro lunghezza d'onda di De Broglie $\lambda = h/p$ può risultare inferiore alle dimensioni nucleari tipiche da pensare di utilizzare un approccio di tipo "ottico", confortati in questo dal fatto che le sezioni d'urto sperimentali elastiche mostrano forti analogie con gli andamenti tipici dei fenomeni diffrattivi ottici da parte di un disco opaco.

In ottica la diffrazione da un bordo netto produce una figura di massimi e minimi il cui primo minimo si presenta a un'angolo ϑ tale che $\text{sen}\vartheta \simeq \lambda/R$, con R il raggio del disco. I successivi minimi si presentano quasi ugualmente spaziatati e i massimi intermedi calano d'ampiezza al progredire di ϑ .

Un nucleo può assorbire efficacemente nucleoni incidenti, per cui ha senso l'analogia con un disco opaco. Nel caso di proiettili carichi bisogna tener conto della concorrenza fra meccanismi d'interazione coulombiana e nucleare. Per osservare la diffusione elastica di nucleoni nella forma *diffrattiva* bisogna quindi riuscire ad eliminare gli effetti coulombiani e ciò può essere ottenuto in due modi. Il primo consiste nell'utilizzare proiettili privi di carica elettrica come i neutroni, che però sentono la forza nucleare.

Le sezioni d'urto differenziali in questi casi mostrano dei minimi sempre superiori a zero, in quanto la superficie nucleare non è equiparabile a un bordo netto, ma piuttosto a una struttura diffusa. Per ridurre gli effetti coulombiani con proiettili carichi si ricorre a due passi successivi, il primo dei quali consiste nell'utilizzare proiettili di energia sufficiente a contrastare la barriera coulombiana, onde permettere il raggiungimento di piccoli valori di massimo avvicinamento fra proiettile e bersagli; quindi si osservano in particolare gli andamenti ad angoli grandi, dove la sezione d'urto coulombiana decresce molto e rapidamente. Uno dei risultati della diffusione elastica di nucleoni su nuclei è la determinazione dei raggi nucleari; anche se i valori ottenuti dipendono in una certa misura dal modello di potenziale utilizzato per descrivere l'interazione, si ottiene comunque che i risultati sono generalmente consistenti con l'ipotesi che per un nucleo simmetrico si possa considerare una forma sferica con raggio espresso dalla $R = R_0 A^{1/3}$, con $R_0 \simeq 1.25$ fm.

Una diffusione anelastica coulombiana implica che il nucleo, dopo l'interazione, viene lasciato in una condizione eccitata a carico di parte dell'energia cinetica del proiettile e anche quest'ultimo potrebbe essere in una condizione d'eccitazione, dopo l'urto.

Se in questi casi si misura la distribuzione in energia delle particelle diffuse a un angolo solido definito, si osserva la presenza di un singolo picco elastico, alla più alta energia, e di picchi a energie inferiori ognuno dei quali corrisponde a interazioni anelastiche associate a specifici stati eccitati del

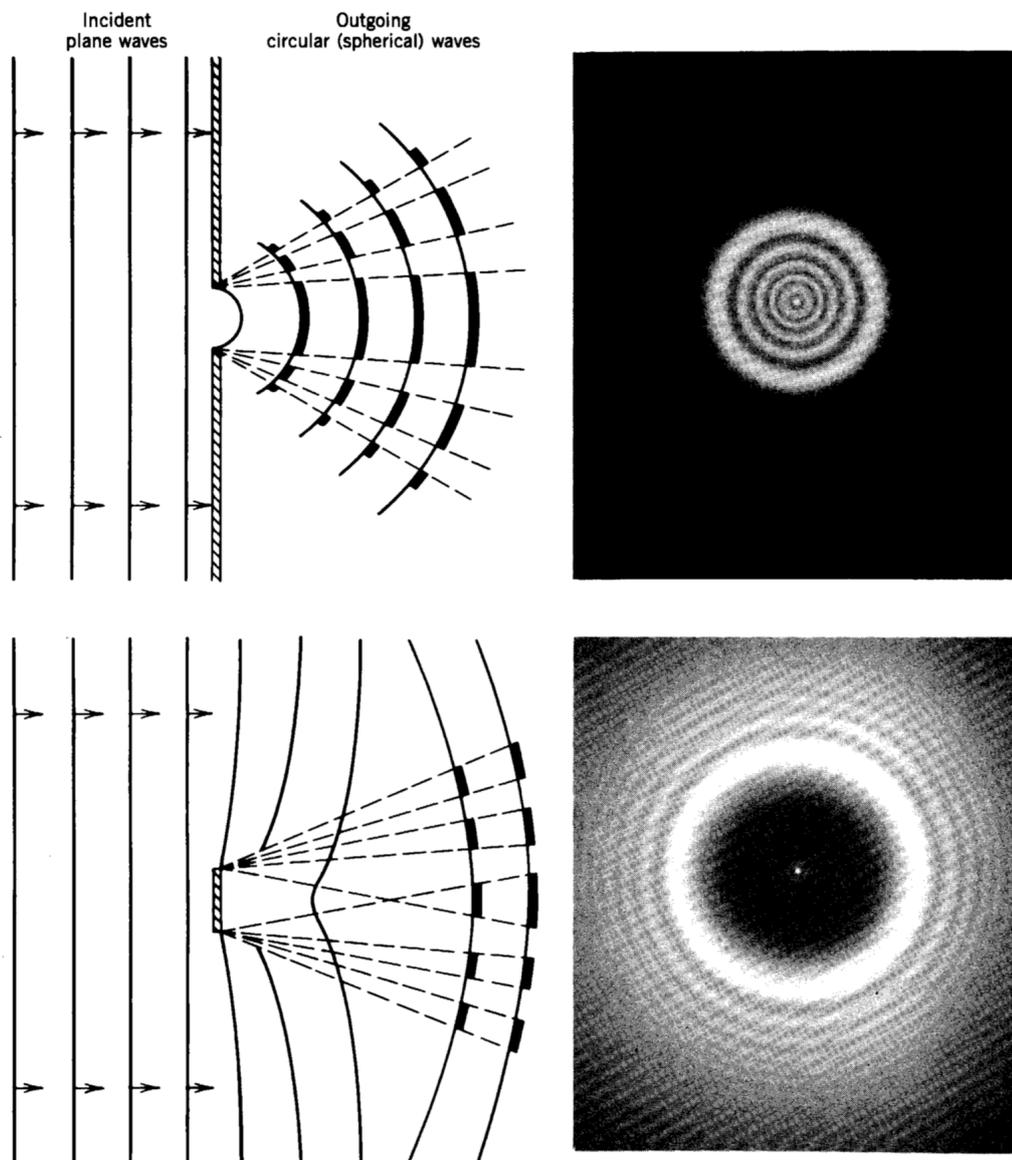


Figura 7.7: In alto la rappresentazione della diffrazione della luce prodotta da una piccola apertura circolare; in basso quella prodotta da un piccolo disco opaco circolare (Atlas of Optical Phenomena - 1962).

nucleo bersaglio. La posizione di ognuno di questi picchi permette di risalire all'energia dello stato eccitato che lo ha generato, e la sua popolazione è proporzionale alla sezione d'urto per la reazione d'eccitazione dello stato ad esso associato.

Le misure delle distribuzioni angolari delle particelle diffuse dai vari stati eccitati permettono di risalire ai valori di spin-parità degli stessi.

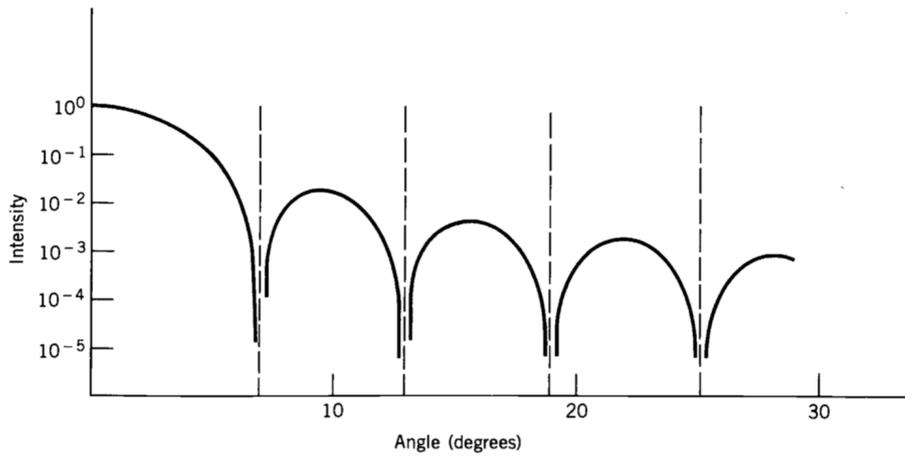


Figura 7.8: Figura di diffrazione prodotta da luce incidente su un foro circolare. L'andamento è calcolato per una lunghezza d'onda dieci volte superiore al diametro dell'apertura circolare. I minimi hanno intensità zero.

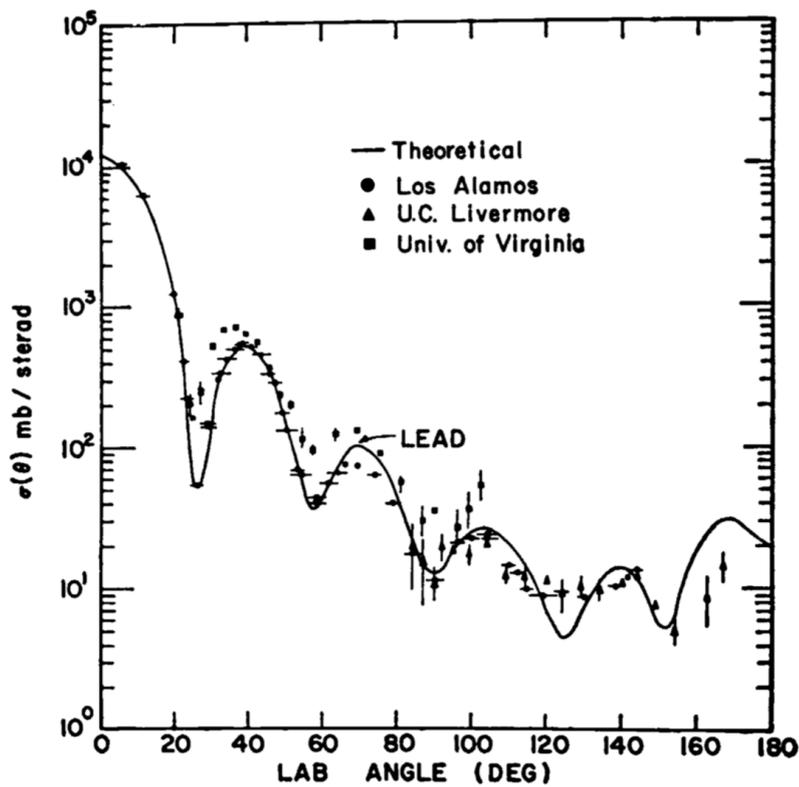


Figura 7.9: Diffusione elastica di neutroni da 14 MeV su piombo (S.Fernbach - Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 415).

7.5 Diffusione in onde parziali

Si veda un approccio con cui dedurre espressioni per le sezioni d'urto confrontabili con quelle sperimentali.

Si consideri un fascio di particelle incidenti lungo l'asse z di un sistema di riferimento (x, y, z) e si supponga di avere un centro diffusore di massa $\approx \infty$ posizionato nell'origine del sistema di riferimento. Si assuma di poter rappresentare ogni particella del fascio incidente come un'onda piana e^{ikz} con impulso di modulo $p = \hbar k$, e le particelle in uscita siano rappresentate da onde sferiche.

L'analisi del problema diventa quindi più agevole se si esprime l'onda piana incidente anch'essa come sovrapposizione di onde sferiche

$$\psi_{inc} = A e^{ikz} = A \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell + 1) j_{\ell}(kr) P_{\ell}(\cos\vartheta) \quad (7.40)$$

con A costante di normalizzazione.

Le funzioni radiali $j_{\ell}(kr)$ sono le *funzioni sferiche di Bessel*, soluzioni della parte radiale dell'equazione di Schrödinger in una regione lontanata dal bersaglio, dove il potenziale nucleare è ormai trascurabile. Le funzioni angolari $P_{\ell}(\cos\vartheta)$ sono i *polinomi di Legendre*

$$\begin{aligned} P_0(\cos\vartheta) &= 1 \\ P_1(\cos\vartheta) &= \cos\vartheta \\ P_2(\cos\vartheta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2\vartheta - 1) \end{aligned} \quad (7.41)$$

ecc.

Si dice in questo caso di aver sviluppato l'onda incidente e quella diffusa in *onde parziali*, ognuna delle quali corrispondente a uno specifico valore ℓ del momento angolare. La procedura è possibile se il potenziale d'interazione nucleare è di tipo "centrale". Questo approccio si rivela utile finché risulta sufficiente considerare l'effetto del potenziale nucleare soltanto sulle onde parziali di ordine ℓ più basso.

Semiclassicamente, se una particella di impulso $p = 2\pi\hbar/\lambda$ interagisce con parametro d'urto b , allora il momento angolare relativo è dato da

$$\ell \hbar = p b \quad \text{da cui:} \quad b = \ell \frac{\hbar}{p} = \ell \frac{\lambda}{2\pi} = \ell \lambda \quad (7.42)$$

Siccome ℓ può assumere soltanto valori interi, semiclassicalmente si può dire che particelle con momento angolare compreso tra $0\hbar$ e $1\hbar$ interagiscono con parametri d'urto compresi fra $b = 0$ e $b = \lambda$, e quindi attraversano un'area circolare efficace (sezione d'urto) pari a $\pi\lambda^2$.

Per $\hbar \leq \ell \leq 2\hbar$ la sezione d'urto risulta un anello circolare di raggio interno

λ , raggio esterno 2λ , e area $3\pi\lambda^2$.

Si può dunque immaginare di suddividere l'area d'interazione in zone, ognuna corrispondente a un definito valore di momento angolare ℓ e di area

$$\pi [(\ell + 1) \lambda]^2 - \pi (\ell \lambda)^2 = (2\ell + 1) \pi \lambda^2$$

Si può, in modo semiclassico, ragionevolmente stimare il massimo valore di b come $b_{max} = R_1 + R_2$, ovvero la somma del raggio del nucleo incidente con quello del nucleo bersaglio, deducendo quindi che il massimo valore di ℓ può essere in tal caso $\ell_{max} = b_{max}/\lambda$, e la sezione d'urto corrispondente

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{R/\lambda} (2\ell + 1) \pi \lambda^2 = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.43)$$

che seppur semiclassica è una stima ragionevole, tenendo conto, tramite il termine λ , dell'indeterminazione spaziale quantisticamente associata al proiettile.

Asintoticamente, ovvero lontano dal bersaglio, le funzioni di Bessel si approssimano a

$$\begin{aligned} j_\ell(kr) &\simeq \frac{\text{sen}(kr - \ell\pi/2)}{kr} \quad \text{per } (kr \gg \ell) \\ &= \frac{e^{i(kr - \ell\pi/2)} - e^{-i(kr - \ell\pi/2)}}{2ikr} \end{aligned} \quad (7.44)$$

per cui

$$\psi_{inc} = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell + 1) \left[e^{-i(kr - \ell\pi/2)} - e^{i(kr - \ell\pi/2)} \right] P_\ell(\cos\vartheta) \quad (7.45)$$

dove il primo termine in parentesi quadra rappresenta un'onda sferica entrante convergente verso il bersaglio e il secondo termine un'onda sferica uscente dal bersaglio. La sovrapposizione delle due costituisce l'onda piana.

Come effetto della causalità la diffusione può naturalmente agire solo sull'onda uscente e lo può fare in due modi: tramite una modificazione della fase e/o tramite una modificazione dell'ampiezza.

La modificazione dell'ampiezza, se non si considera la possibilità della trasformazione di parte dell'energia incidente in ulteriori particelle uscenti, implica sostanzialmente una riduzione del numero di particelle nel canale d'uscita rispetto a quelle coinvolte nel canale d'ingresso. Ma si ricordi che la funzione d'onda rappresenta soltanto le particelle con impulso pari ad $\hbar k$. In presenza di diffusione anelastica, energia e identità delle particelle uscenti possono cambiare, rispetto al canale d'ingresso. Non sorprende quindi che ci possano essere meno particelle nel termine e^{ikr} dopo lo scattering anelastico. Le diffusioni determinate da una specifica causa d'interazione costituiscono

quello che vien detto un *canale di reazione*. Alcuni canali di reazione possono essere chiusi per le particelle interagenti, se ad esempio non ci sono abbastanza energia e/o momento angolare a disposizione.

Per tener conto delle conseguenti variazioni nelle onde parziali uscenti di ordine ℓ -mo si introduce un coefficiente complesso η_ℓ nel termine d'onda uscente e^{ikr} nell'equazione [7.45](#) che diventa

$$\psi = \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) \left[e^{-i(kr-\ell\pi/2)} - \eta_\ell e^{i(kr-\ell\pi/2)} \right] P_\ell(\cos\vartheta) \quad (7.46)$$

La [7.46](#) rappresenta quindi la sovrapposizione di onde incidenti e diffuse: $\psi = \psi_{inc} + \psi_{dif}$. Sottraendo la [7.45](#) alla [7.46](#) si ottiene l'onda diffusa

$$\begin{aligned} \psi_{dif} &= \frac{A}{2kr} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell+1} (2\ell+1) (1 - \eta_\ell) e^{i(kr-\ell\pi/2)} P_\ell(\cos\vartheta) \\ &= \frac{A}{2k} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1 - \eta_\ell) P_\ell(\cos\vartheta) \end{aligned} \quad (7.47)$$

Se si considerano i contributi a ψ_{dif} relativi esclusivamente ai valori del numero d'onda k corrispondenti a quelli dell'onda incidente, allora si ottiene la rappresentazione della diffusione elastica.

Si può quindi introdurre la densità di corrente diffusa come

$$\begin{aligned} j_{dif} &= \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_{dif}^* \frac{\partial \psi_{dif}}{\partial r} - \frac{\partial \psi_{dif}^*}{\partial r} \psi_{dif} \right) \\ &= |A|^2 \frac{\hbar}{4mkr^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1 - \eta_\ell) P_\ell(\cos\vartheta) \right|^2 \end{aligned} \quad (7.48)$$

Essendo la corrente incidente data da

$$j_{inc} = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \quad (7.49)$$

si ottiene, per la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i (1 - \eta_\ell) P_\ell(\cos\vartheta) \right|^2 \quad (7.50)$$

Integrando i polinomi di Legendre su tutto l'angolo solido si ottiene la sezione d'urto di diffusione

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi \lambda^2 (2\ell+1) |1 - \eta_\ell|^2 \quad (7.51)$$

Nel caso di interazione esclusivamente elastica $|\eta_\ell| = 1$ e convenzionalmente si pone $\eta_\ell = e^{2i\delta_\ell}$, dove δ_ℓ rappresenta lo sfasamento dell'onda parziale di ordine ℓ . In questo caso $|1 - \eta_\ell|^2 = 4 \sin^2 \delta_\ell$, e

$$\sigma_{dif} = \sum_{\ell=0}^{\infty} 4\pi\lambda^2 (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell \quad (7.52)$$

Definendo la *sezione d'urto di reazione* σ_r come quella che tien conto di tutti i possibili canali di reazione tranne di quello elastico, per esprimerla bisogna considerare il rateo con cui le particelle diffuse scompaiono dal canale con un particolare numero d'onda k partendo dalla [7.46](#). Si considera praticamente la differenza fra corrente entrante e corrente uscente ottenendo

$$|j_{inc}| - |j_{out}| = \frac{|A|^2 \hbar}{4mkr^2} \left[\left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} e^{i\ell\pi/2} P_\ell(\cos\vartheta) \right|^2 - \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell+1} \eta_\ell e^{i\ell\pi/2} P_\ell(\cos\vartheta) \right|^2 \right] \quad (7.53)$$

e la sezione d'urto di reazione diventa

$$\sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} \pi\lambda^2 (2\ell + 1) (1 - |\eta_\ell|^2) \quad (7.54)$$

La sezione d'urto totale che tien conto di tutti i processi è quindi

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{dif} + \sigma_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} 2\pi\lambda^2 (2\ell + 1) (1 - \text{Re } \eta_\ell) \quad (7.55)$$

Da quanto ottenuto si possono trarre alcune importanti osservazioni:

- La diffusione elastica può manifestarsi anche in assenza di ogni altro tipo d'interazione, come si vede dalla [7.54](#) se $|\eta_\ell| = 1$, mentre non si può avere interazione anelastica senza la contemporanea presenza anche di una componente elastica non nulla. Pensando a un processo di tipo diffrattivo ciò equivale a dire che se delle particelle sono rimosse da un fascio incidente dando luogo a una sorta di "ombra" dietro il bersaglio, allora vi saranno delle particelle che per effetto dell'interazione col bersaglio verranno diffratte nella zona d'ombra.
- Considerando il bersaglio alla stregua di un disco opaco che assorba tutte le onde parziali fino a quelle di ordine $\ell = b_{max}/\lambda$ ($\eta_\ell = 0$ implica assorbimento completo) e non perturbi quelle per $\ell > b_{max}/\lambda$ ($\eta_\ell = 1$), si ha

$$\sigma_{dif} = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.56)$$

e

$$\sigma_r = \pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.57)$$

da cui

$$\sigma_{Tot} = 2\pi (b_{max} + \lambda)^2 \quad (7.58)$$

per cui la sezione d'urto totale vale il doppio della sezione d'urto geometrica. È un effetto "non classico" e può essere capito sempre tenendo in considerazione la zona d'"ombra" prodotta dal nucleo bersaglio che però non può limitarsi ad assorbire ma deve appunto anche diffrangere entro la zona d'ombra.

Questi risultati possono essere utilizzati per indagare la struttura dei nuclei: si ipotizza una ragionevole forma di potenziale d'interazione e si risolve la corrispondente equazione di Schrödinger nella regione d'interazione $0 \leq r \leq R$, imponendo condizioni di continuità agli estremi. Si può così trovare η_ℓ e provare a valutare la plausibilità della forma scelta per il potenziale dal confronto con i dati sperimentali per σ_{dif} e σ_r .

In pratica la procedura risulta molto difficoltosa e complicata e si riescono ad ottenere risultati soddisfacenti per i canali di reazione elastici. Una particolare tecnica adottata in questo caso è il modello ottico per lo *scattering* elastico.

7.6 Modello ottico

Un modello semplice ma efficace che descrive in forma generale lo scattering elastico in presenza di effetti di assorbimento è il *modello ottico*, il cui nome deriva dalla similitudine con l'approccio per descrivere la fenomenologia della diffusione di luce da una sfera di vetro con superficie parzialmente opaca (satinata).

Il modello descrive l'interazione tramite un potenziale complesso

$$U(r) = V(r) + iW(r) \quad (7.59)$$

in cui le funzioni reali $V(r)$ e $W(r)$ sono scelte in modo da assegnare al potenziale una realistica dipendenza radiale. $V(r)$ è responsabile della parte elastica dello scattering: descrive le interazioni nucleari ordinarie fra proiettili e bersagli e può assomigliare al potenziale del modello a shell. Il coefficiente $W(r)$ della parte immaginaria è responsabile dell'assorbimento. Si consideri il semplice caso d'un potenziale $U(r)$ a buca quadrata

$$\begin{aligned} U(r) &= -V_0 - iW_0 & r < R \\ U(r) &= 0 & r > R \end{aligned} \quad (7.60)$$

Si sceglie la funzione d'onda diffusa uscente della forma e^{ikr}/r , con numero d'onda $k = \sqrt{2m(E + V_0 + iW_0)}/\hbar$, come da soluzione dell'equazione di

Schrödinger per questo tipo di potenziale.

Posto quindi $k = k_r + ik_i$, la funzione d'onda uscente è proporzionale a

$$\frac{e^{ik_r r} e^{-k_i r}}{r}$$

e la densità di probabilità radiale è di conseguenza proporzionale a $e^{-2k_i r}$. La funzione d'onda è quindi attenuata esponenzialmente e si sovrappone al volume del nucleo.

Nell'ipotesi di un assorbimento ridotto, che implica W_0 abbastanza inferiore ad $E + V_0$, si può sviluppare k approssimandolo a

$$k \simeq \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} + \frac{iW_0}{2} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2(E + V_0)}} \quad (7.61)$$

La distanza alla quale l'intensità si attenua d'un fattore $1/e$, una sorta di cammino libero medio, è

$$d = \frac{1}{2k_i} = \frac{1}{W_0} \sqrt{\frac{\hbar^2(E + V_0)}{2m}} \quad (7.62)$$

Se questa distanza è almeno dell'ordine del raggio nucleare (alcuni fm) allora, assumendo per la profondità V_0 di un tipico potenziale di modello a shell un valore dell'ordine di 40 MeV, e considerando tipici proiettili di bassa energia con $E = 10$ MeV, si ha $W_0 \simeq 11$ MeV. Nel caso in cui l'assorbimento è quindi abbastanza meno intenso dello scattering elastico si stimano $|V| \sim 40$ MeV, $|W| \sim 10$ MeV.

Un calcolo di modello ottico procede quindi secondo un certo numero di passi:

- Si sceglie una forma di potenziale, ad esempio Saxon-Woods

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{(r-R)/a}} \quad (7.63)$$

aggiustando le costanti V_0 , R ed a per ottenere il miglior fit sui dati di scattering.

- Il termine di assorbimento $W(r)$ a basse energie ha una forma molto diversa. Il principio d'esclusione porta a escludere che i nucleoni più interni e legati del nucleo partecipino all'assorbimento di nucleoni incidenti. Sono i nucleoni di *valenza* prossimi alla superficie del nucleo che possono assorbire l'energia relativamente bassa delle particelle incidenti. $W(r)$ è quindi spesso scelta proporzionale a dV/dr , che ha valori significativi soltanto in prossimità della superficie del nucleo, come mostrato in figura [7.10](#)

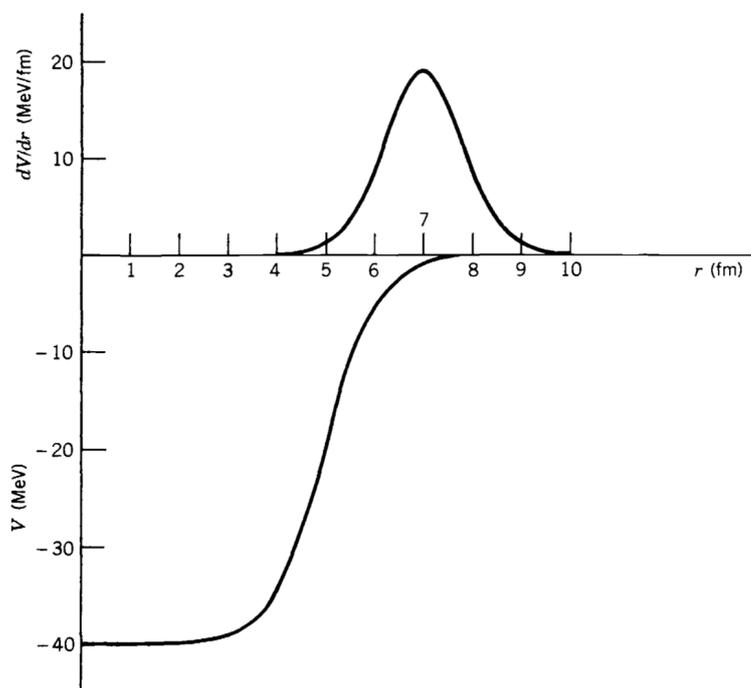


Figura 7.10: Funzioni $V(r)$ e $W(r) = dV/dr$. Valori tipici sono $V = 40$ MeV, $R = 1.25 \times A^{1/3}$, $a = 0.523$ fm.

- Si include un termine di spin-orbita con valore maggiore presso la superficie del nucleo, per tener conto che gli spin dei nucleoni più interni tendono a bilanciarsi.
- Se la particella incidente è elettricamente carica si include un termine coulombiano.
- Si risolve l'equazione di Schrödinger raccordando le condizioni al contorno per $r = R$ e ottenendo le ampiezze complesse di η_ℓ scattering che permettono infine di confrontare le sezioni d'urto calcolate e quelle sperimentali

In figura [7.11](#) un esempio del risultato di tale procedura. Il modello ottico è però utile solo nel discutere il comportamento medio nei processi di scattering, senza poter tener conto della gran parte delle interessanti caratteristiche legate alla struttura microscopica dei nuclei coinvolti e dell'interazione. I calcoli di modello ottico non dicono cosa ne sia delle particelle assorbite, ma semplicemente le escludono dal canale elastico. La complicazione delle molteplici interazioni fra tutti i nucleoni coinvolti in una reazione non può essere semplicemente racchiusa da un singolo potenziale.

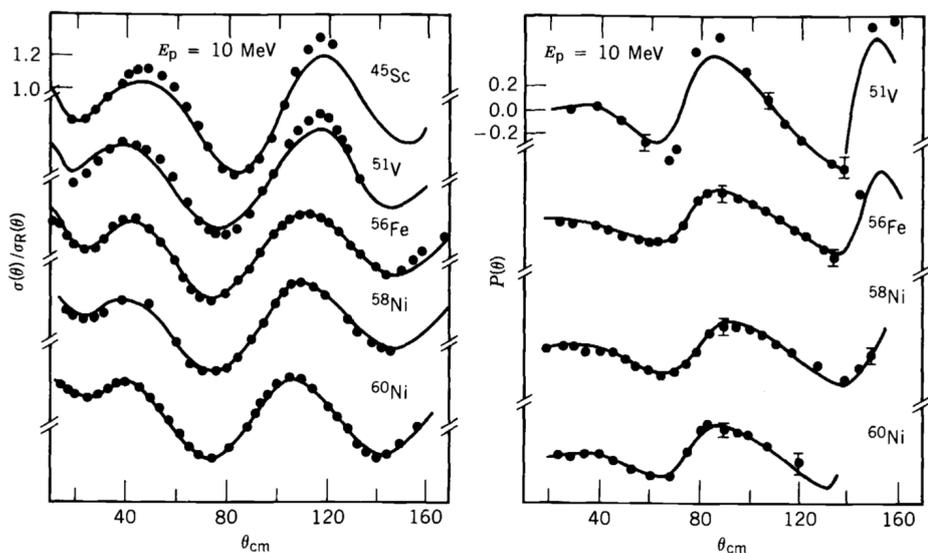
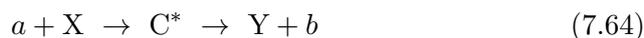


Figura 7.11: Fit di modello ottico per sezioni d'urto differenziali in rapporto alla sez. d'urto Coulombiana, e per polarizzazioni di protoni da 10-MeV diffusi elasticamente da diversi bersagli.

7.7 Reazioni con formazione del nucleo composto

Si immagini una particella che incide su un nucleo con parametro d'urto piccolo rispetto al raggio del nucleo stesso, e che quindi avrà una relativamente alta probabilità di interagire con uno dei suoi nucleoni. La particella, ceduta parte della propria energia, potrà comunque ancora interagire con i restanti nucleoni del nucleo in modo tale da ripartire la propria energia cinetica con molti nucleoni del nucleo bersaglio e divenire lei stessa parte del sistema fisico interagente bersaglio+proiettile. Se anche l'incremento medio di energia di ogni nucleone coinvolto è inferiore a quanto servirebbe per scalarlo dal nucleo, può però verificarsi che la redistribuzione statistica dell'energia portata dal proiettile possa talvolta concentrarne su uno dei nucleoni del sistema formatosi una quantità sufficiente a estrometterlo dal sistema in modo simile a quanto avviene nel caso dell'evaporazione d'una molecola da un liquido caldo.

Un simile processo avviene quindi tramite la formazione di uno "stato intermedio" successivo all'assorbimento della particella incidente e che precede l'emissione delle particelle per "evaporazione". Questo stato intermedio viene detto *nucleo composto* e una simile reazione viene indicata come



e C^* rappresenta il nucleo composto. Una simile reazione è quindi un processo che ha luogo in due fasi, la prima delle quali comporta la formazione

del nucleo composto, seguita dal suo "decadimento".

Il decadimento di un nucleo composto può avvenire in svariati modi e un'assunzione del modello è che le probabilità relative dei diversi possibili canali di decadimento siano indipendenti dal modo in cui il nucleo composto si è formato, e dipendano invece soltanto dalla composizione del nucleo composto e dall'energia totale del sistema, ciò equivale ad assumere l'ipotesi che la redistribuzione dell'energia cinetica del proiettile fra i nucleoni del nucleo composto avvenga in modo sostanzialmente "termico", con conseguente "perdita di memoria" del processo di formazione. Il successivo decadimento sarà quindi governato prevalentemente da processi statistici.

Un esempio interessante è riportato nello schema di figura [7.12](#) dove si vede come uno stesso nucleo composto possa essere ottenuto con diversi canali d'ingresso e possa produrre diversi canali di reazione. Il modello del nucleo

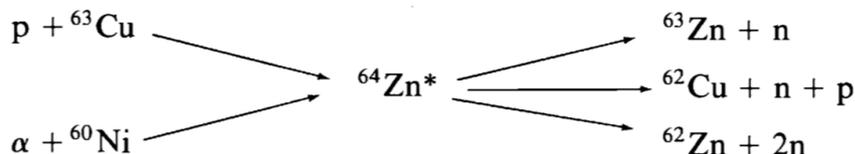


Figura 7.12: Esempio di formazione di un nucleo composto.

composto dà buoni risultati nella descrizione di reazioni a bassa energia, fra i 10 MeV e i 20 MeV, per le quali la probabilità che la particella incidente sfugga dal sistema prima di essersi sostanzialmente "termalizzata" con esso è bassa. Per lo stesso motivo la sua efficacia cresce al crescere del numero di massa A dei nuclei bersaglio.

Da quanto detto si deduce anche che data la casualità delle interazioni che determinano la formazione di un nucleo composto, l'emissione dei prodotti di decadimento debba essere sostanzialmente isotropa, con una distribuzione angolare quindi uniforme nel sistema del CM, come confermato dai risultati sperimentali.

Se peraltro il proiettile ha un numero di massa non trascurabile rispetto al bersaglio, il momento angolare trasferito al nucleo composto durante l'urto può essere notevole e conseguentemente la distribuzione angolare delle particelle emesse dal suo decadimento ne risente con una preferenza per direzioni ortogonali a quella dell'asse del momento angolare trasferito.

Data l'analogia evaporativa si può dedurre che il numero delle particelle emesse da un nucleo composto cresca con l'energia e che la sezione d'urto abbia una forma pressochè Gaussiana. I tempi caratteristici d'evoluzione di un processo con formazione di un nucleo composto sono abbastanza lenti, dell'ordine di $10^{-16} \div 10^{-18}$ s.

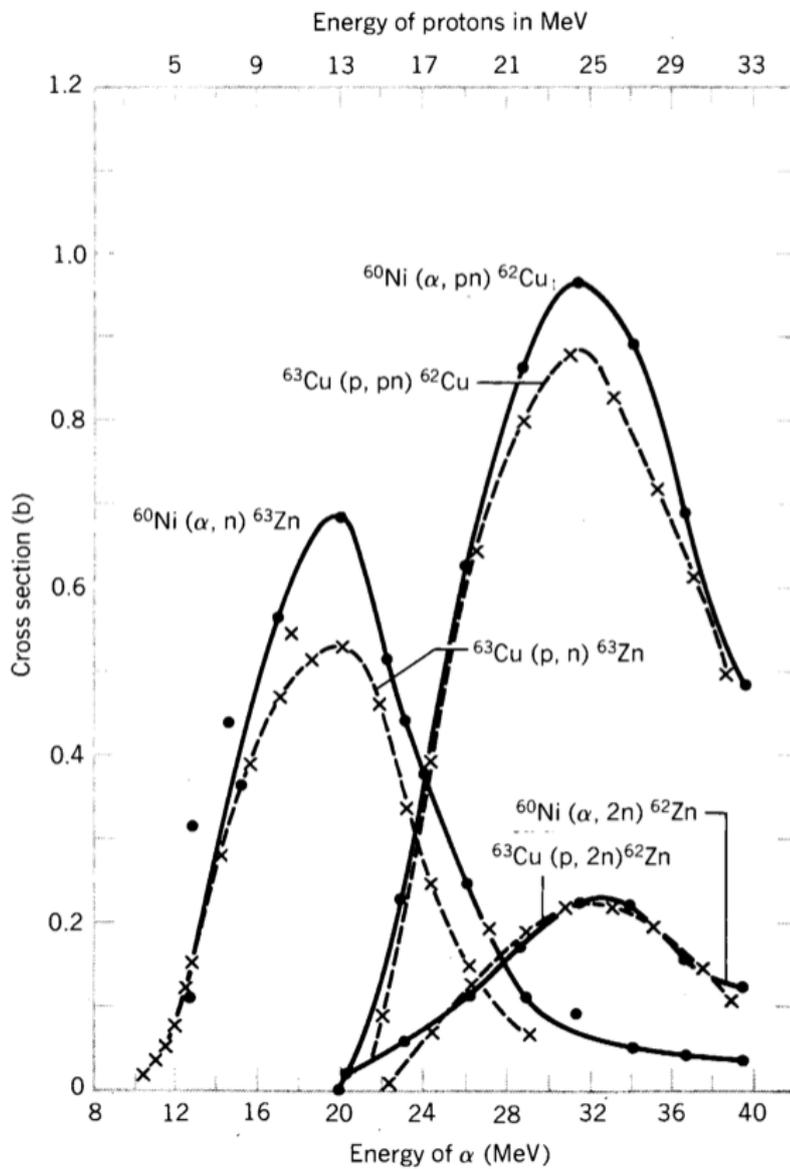


Figura 7.13: Sezioni d'urto per diverse reazioni che conducono al nucleo composto $^{64}\text{Zn}^*$.

7.8 Reazioni dirette

Al crescere dell'energia della particella incidente la sua lunghezza d'onda associata cala. Un nucleone da 1 MeV ha una lunghezza d'onda di de Broglie di circa 4 fm e quindi, non risolvendo i singoli nucleoni, è più facile che interagisca con un nucleo producendo un "nucleo composto". Salendo a 20 MeV la lunghezza d'onda associata scende a circa 1 fm rendendo possibile

un'interazione "diretta" fra il nucleone incidente e uno o comunque solo pochissimi fra i nucleoni del bersaglio.

Questa condizione, detta appunto *reazione diretta*, è quindi in un certo senso opposta a quella che conduce al nucleo composto, e oltretutto vede probabili urti fra i nucleoni incidenti e i nucleoni più periferici dei nuclei bersaglio.

I meccanismi del nucleo composto e delle reazioni dirette possono ovviamente contribuire entrambi a una certa reazione e diventa in tal caso importante capire come distinguere i due contributi.

Un'altra caratteristica delle reazioni dirette è il loro tempo di attuazione, dell'ordine di 10^{-22} s, quindi da quattro a sei ordini di grandezza inferiore rispetto al caso del nucleo composto. Anche le distribuzioni angolari dei prodotti di reazione sono diverse nei due casi, caratterizzate da picchi definiti nel caso delle reazioni dirette.

Una reazione anelastica può procedere secondo entrambe le vie, con una forte dipendenza dall'energia del proiettile, come avviene ad esempio con la reazione di stripping del deutone $X(d, n)Y$, una *reazione di trasferimento* in cui un singolo protone viene trasferito dal proiettile al bersaglio.

L'altra reazione di stripping del deutone $X(d, p)X'$ è invece più facile che proceda per via "diretta" in quanto l'evaporazione di un protone da un nucleo composto risulta inibita dalla barriera coulombiana.

La reazione $X(\alpha, n)Y$ difficilmente procede invece per via diretta in quanto richiede il trasferimento di ben tre nucleoni su stati di valenza di un nucleo bersaglio, che è un processo molto poco probabile.

Un'applicazione importante delle reazioni di trasferimento di singola particella, specialmente (d, p) e (d, n) , concerne lo studio degli stati eccitati a breve vita media per confrontarne le caratteristiche con le previsioni del "modello a shell".

Lo studio delle reazioni di *pickup* in cui il proiettile cattura un nucleone al nucleo bersaglio, come ad esempio (p, d) , fornisce informazioni sugli stati di singola particella.

7.9 Reazioni di risonanza

Il modello del nucleo composto considera gli stati nucleari non legati come un continuo privo di struttura, anche se in realtà si tratta di stati definiti, ma in numero così grande e con energie così prossime l'una all'altra da formare uno spettro praticamente continuo.

Ognuno di questi stati è poi instabile e presenta quindi una certa "larghezza", il che determina una sostanziale "sovrapposizione" fra gli stati, se la distanza fra questi è dell'ordine o inferiore alla larghezza, da cui lo spettro praticamente "continuo" che giustifica il modello del nucleo composto.

Gli stati legati studiati tramite reazioni dirette rappresentano come detto la condizione simmetrica; risultano stabili rispetto all'emissione di particelle e

le loro vite medie sono molto più lunghe, come ad esempio per i decadimenti γ , per cui sono caratterizzati da "larghezze" molto inferiori. Uno stato con vita media di 10^{-12} s ha ad esempio una larghezza di circa 10^{-3} eV, quindi molto inferiore alla tipica spaziatura fra stati legati contigui. Questo rende plausibile trattare questi stati alla stregua di stati discreti caratterizzati ognuno da una propria funzione d'onda.

Fra questi due estremi si individua quella che vien detta regione di *risonanza*, caratterizzata da livelli discreti con alta probabilità, e quindi sezione d'urto, di formarsi e larghezze piuttosto ridotte in quanto presentano solitamente due soli modi di decadimento disponibili, ovvero la re-emissione della particella incidente o l'emissione di fotoni γ .

Il comportamento delle sezioni d'urto in prossimità dei valori d'energia caratteristici di tali livelli viene descritto con andamenti risonanti del tipo Breit-Wigner. Per una comprensione qualitativa di come si formano queste

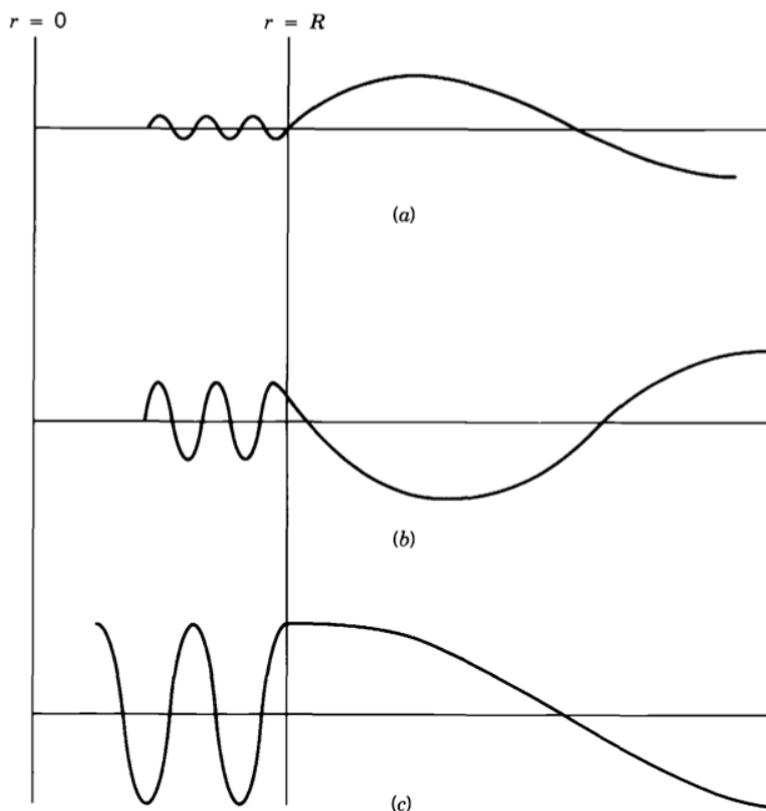


Figura 7.14: (a) Lontano dalla risonanza, le funzioni d'onda esterne e interne si raccordano male da cui una scarsa penetrazione nel nucleo. (b) Avvicinandosi alla risonanza aumenta la probabilità di penetrare. (c) Alla risonanza le ampiezze corrispondono, la particella incidente penetra facilmente e la sezione d'urto raggiunge il massimo.

reazioni risonanti si immagini il potenziale nucleare visto dalla particella catturata come una buca quadrata. Le funzioni d'onda oscillanti dentro e fuori la barriera devono essere accordate dolcemente (ad esempio imponendo l'uguaglianza delle funzioni che le descrivono e delle loro derivate prime in concomitanza con la coordinata spaziale della barriera. La fase della funzione d'onda interna al nucleo influisce sull'ampiezza relativa della stessa fra dentro e fuori il nucleo. Nel caso (a) in figura la particella incidente ha probabilità piccola di penetrare nel nucleo e forma uno stato quasi legato con esso; nel caso (c) ha invece un'alta probabilità di penetrare. La fase fra la funzione d'onda fuori e dentro il nucleo dipende dall'energia della particella incidente, e così anche la localizzazione del punto di raccordo e le relative ampiezze. Le energie per le quali si ottiene una condizione come quella descritta in (c) sono quelle che mostrano *risonanza* nella sezione d'urto.

Dalla [7.55](#), supponendo che una sola onda parziale ℓ contribuisca significativamente allo stato risonante, lo si otterrà in corrispondenza ad $\eta_\ell = -1$, corrispondente ad uno sfasamento $\delta_\ell = \pi/2$.

La forma della risonanza si ottiene espandendo lo sfasamento attorno a questo valore. Si ha una convergenza migliore espandendo la cotangente di δ_ℓ , da cui, trascurando termini d'ordine superiore, si ha

$$\cot\delta_\ell = -\frac{(E - E_R)}{\Gamma/2} \quad (7.65)$$

Con

$$\Gamma = 2 \left(\frac{\partial\delta_\ell}{\partial E} \right)_{E=E_R}^{-1} \quad (7.66)$$

la larghezza a metà ampiezza della risonanza.

Dalla [7.65](#) si ottiene

$$\text{sen}\delta_\ell = \frac{\Gamma/2}{[(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4]^{1/2}} \quad (7.67)$$

e per la sezione d'urto di scattering

$$\sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (7.68)$$

Una prima generalizzazione consiste nel tener conto dello *spin*. Detti s_a ed s_X gli spin di proiettile e bersaglio, ed I il momento angolare totale della risonanza, si ha

$$\mathbf{I} = \mathbf{s}_a + \mathbf{s}_X + \boldsymbol{\ell} \quad (7.69)$$

che porta a sostituire nella [7.68](#) il fattore $(2\ell + 1)$ col più generale fattore statistico

$$g = \frac{2I + 1}{(2s_a + 1)(2s_X + 1)} \quad (7.70)$$

Bisogna poi tener conto della possibilità che la risonanza decada in canali diversi e indipendenti, per cui la sua larghezza totale Γ è somma di larghezze parziali Γ_i

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i \quad (7.71)$$

Il fattore Γ^2 a denominatore della [7.68](#) è connesso alla larghezza di decadimento dello stato risonante e quindi alla sua vita media $\tau = \hbar/\Gamma$.

Il fattore Γ^2 a numeratore è invece direttamente connesso alla formazione della risonanza e alla sua probabilità di decadere in un canale particolare. Nel caso dello scattering elastico, nella cui ipotesi si è ottenuta la [7.68](#), canale d'ingresso e d'uscita della reazione coincidono. Quindi per la reazione $a + X \rightarrow a + X$, nella sezione d'urto si utilizza la stessa larghezza parziale

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{(\Gamma_{aX})^2}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (7.72)$$

Per una reazione del tipo $a + X \rightarrow b + Y$ si pone invece

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aX}\Gamma_{bY}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (7.73)$$

Le [7.72](#) e [7.73](#) sono due tipici esempi di espressioni di Breit-Wigner che descrivono la forma di risonanze singole e isolate, come in figura [7.15](#). Le risonanze da scattering elastico non hanno sempre esattamente la forma descritta dall'espressione di Breit-Wigner e ciò è dovuto ad un contributo all'ampiezza di reazione di un'interazione diretta della particella incidente con il potenziale nucleare senza formazione di stato risonante. Questo tipo di processo è detto *scattering da potenziale*, o *shape-elastic scattering*. Scattering da potenziale e risonante contribuiscono entrambi all'ampiezza dello scattering elastico, e la loro mutua interferenza causa modificazioni nella sezione d'urto completa, col risultato che questa può risultare inferiore a quella dovuta ad uno solo dei due processi. Non è quindi sempre corretto sommare semplicemente le sezioni d'urto per trovare quella totale. Si tiene conto dei due processi scrivendo

$$\eta_\ell = e^{2i(\delta_{\ell R} + \delta_{\ell P})} \quad (7.74)$$

con $\delta_{\ell R}$ lo sfasamento risonante, e $\delta_{\ell P}$ un contributo addizionale allo sfasamento dovuto allo Scattering da potenziale. Dalla [7.51](#) si trova quindi per la sezione d'urto

$$\sigma_{sc} = \frac{\pi}{k^2} (2\ell + 1) \left| e^{-2i\delta_{\ell P}} - 1 + \frac{i\Gamma}{(E - E_R) + i\Gamma/2} \right|^2 \quad (7.75)$$

Lontano dalla risonanza $(E - E_R) \gg \Gamma/2$, e domina il potenziale di scattering, per cui

$$\sigma \simeq \sigma_{pot} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_{\ell P} \quad (7.76)$$

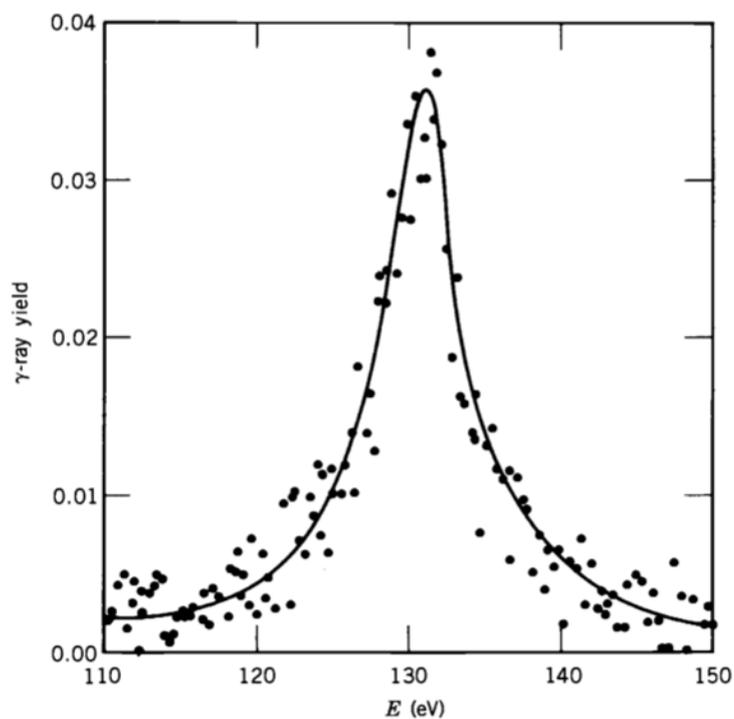


Figura 7.15: Risonanze nello scattering di neutroni da 130 eV su ^{59}Co . È mostrato lo yield dei γ per la cattura radiativa dei neutroni sul ^{59}Co .

Per $E = E_R$ domina il termine risonante e

$$\sigma \simeq \sigma_{ris} = \frac{4\pi}{k^2} (2\ell + 1) \quad (7.77)$$

In prossimità della risonanza l'interferenza fra i due termini produce la caratteristica forma mostrata in figura [7.16](#).

Anche le reazioni di cattura radiativa mostrano una tipica struttura di risonanza, come per lo spettro in figura [7.17](#).

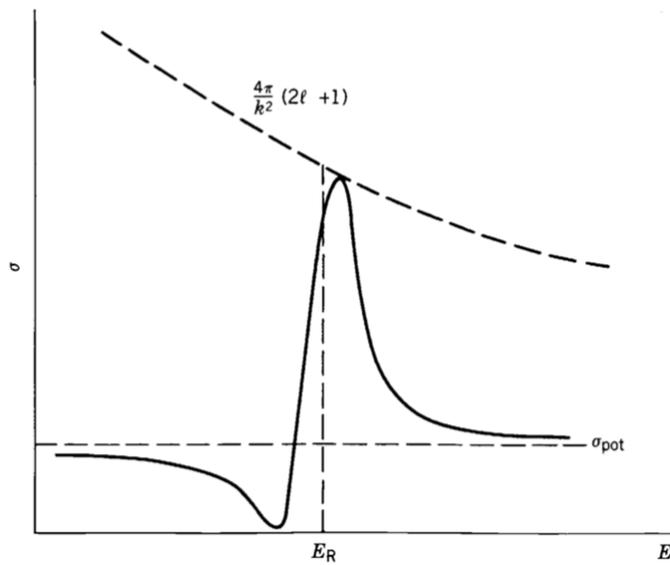


Figura 7.16: Interference between resonance and potential scattering produces resonances with this characteristic shape.

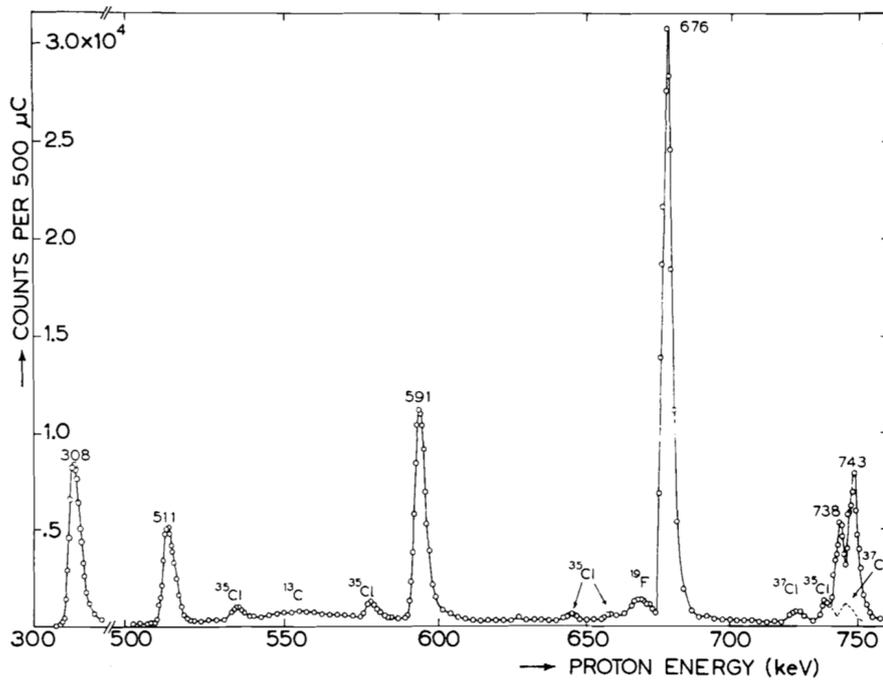


Figura 7.17: Risonanze da cattura radiativa di protoni su ^{23}Na . Si osservano anche picchi relativi al Cl in quanto il bersaglio consisteva in NaCl.

Capitolo 8

Fisica dei neutroni

Il neutrone gioca un ruolo fondamentale nello studio della forza nucleare. Non percependo la barriera coulombiana i neutroni possono penetrare un nucleo e dare avvio ad una reazione anche se dotati di bassissime energie cinetiche (inferiori ad 1 eV). D'altra parte l'insensibilità all'interazione coulombiana determina alcune difficoltà sperimentali nell'utilizzo dei neutroni come sonde, specie riguardo alla possibilità di focalizzarne fasci e selezionarne con precisione l'energia, oltre che per la difficoltà di rivellarli.

Il neutrone libero è instabile per decadimento β con una vita media di circa 879 s. Un neutrone legato in un nucleo può risultare sia più stabile che meno stabile.

Se il neutrone fosse una particella *elementare* il suo momento di *dipolo elettrico* dovrebbe risultare nullo, ma lo sarebbe anche se i suoi eventuali componenti fossero legati da forze simmetriche rispetto alla parità e all'inversione temporale. Gli esperimenti più sensibili effettuati danno, per il valore del momento elettrico del dipolo del neutrone, un limite superiore di circa $3 \times 10^{-26} e \times \text{cm}$.

Secondo le teorie di Grande Unificazione il principio di conservazione del numero barionico potrebbe venir meno, per cui il neutrone libero potrebbe *oscillare* e convertirsi talvolta nella propria antiparticella (anti-neutrone), e poi ritornare alla condizione di neutrone, anche se fino ad oggi non vi è evidenza sperimentale di questo effetto.

Un altro fatto molto interessante e tuttora irrisolto concerne l'effettiva vita media del neutrone libero, per la quale non esiste ad oggi un valore univocamente definito, in quanto vi sono due diversi valori, entrambi apparentemente accurati e precisi ma tra loro inconciliabili entro più di quattro deviazioni standard, che vengono da due diverse strategie di misura, una in volo e l'altra a riposo in trappole magnetiche.

8.1 Sorgenti di neutroni

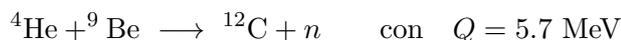
Per ottenere neutroni di energie cinetiche diverse non li si può accelerare come si fa con particelle cariche, ma si può partire con neutroni di alta energia e decelerarli riducendo la loro energia cinetica tramite urti con atomi, processo detto di *moderazione* dei neutroni.

I neutroni risultanti hanno energie cinetiche che vengono tipicamente suddivise in quattro categorie

Termici	$E \simeq 0.025 \text{ eV}$
Epitermici	$E \sim 1 \text{ eV}$
Lenti	$E \sim 1 \text{ keV}$
Veloci	$E = 100 \text{ keV} \div 10 \text{ MeV}$

Sorgenti α -berillio

La reazione che ha portato alla scoperta del neutrone è una possibile sorgente di neutroni



Se si mescolano ${}^9\text{Be}$ con emettitori α a lunga vita media, come ad esempio il ${}^{226}\text{Ra}$, si ottiene la produzione di un rateo pressochè costante di neutroni. Dal ${}^{226}\text{Ra}$ e dai suoi *figli* si ha emissione di α con energie fra i 5 MeV e gli 8 MeV, per cui, dato il Q -valore, si possono avere neutroni distribuiti su uno spettro abbastanza continuo fino a $\sim 13 \text{ MeV}$.

Sorgenti di fotoneutroni

Si possono produrre neutroni anche con reazioni iniziate da raggi γ , (γ, n) , col vantaggio di ottenere neutroni di energia meglio definita, proporzionalmente all'energia dei γ della sorgente utilizzata. Bersagli utili sono gli elementi leggeri, nei quali un neutrone è legato debolmente, come ad esempio il berillio ${}^9\text{Be}$ o il deuterio ${}^2\text{H}$. Il ${}^{24}\text{Na}$ emette γ da 2.76 MeV, l'assorbimento di uno dei quali è sufficiente a fornire al ${}^9\text{Be}$ un'energia superiore a quella di legame di un suo neutrone



Si ottiene uno yield accettabile di circa 2×10^6 neutroni/s per Ci di ${}^{24}\text{Na}$, ma con una breve vita media, di circa 15 ore. L'energia dei neutroni prodotti è di circa 0.8 MeV.

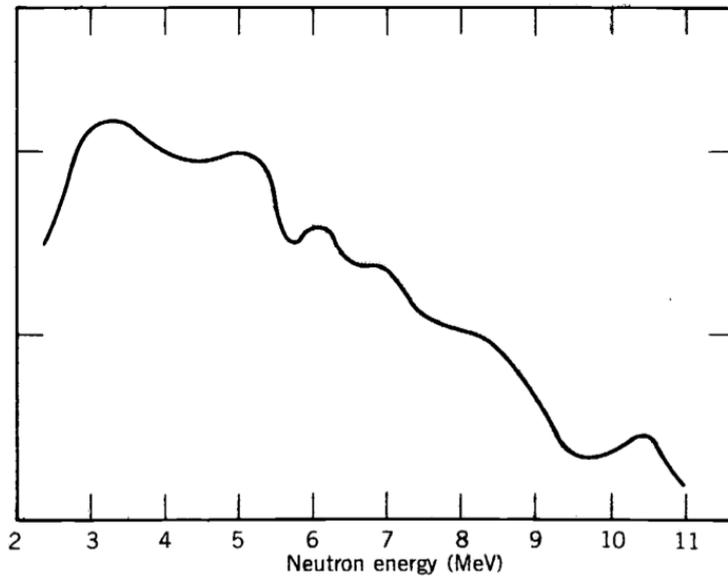


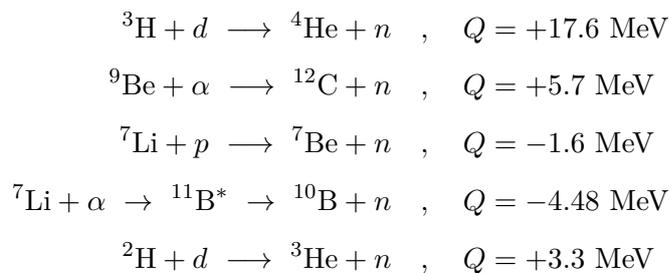
Figura 8.1: Spettro dei neutroni da sorgente Ra-Be. La struttura dello spettro dipende anche dal fatto che il ^{12}C sia lasciato nello stato fondamentale o in uno dei due stati eccitati a 4.43 MeV o 7.6 MeV.

Sorgenti a fissione spontanea

La fissione spontanea dell'isotopo ^{252}Cf , con vita media di 2.65 anni, è una sorgente comunemente usata. Ogni fissione produce circa 4 neutroni, con un rateo di circa 2.3×10^{12} neutroni/s per grammo di ^{252}Cf . Le energie dei neutroni prodotti hanno una caratteristica distribuzione continua da fissione con valori medi nell'intervallo $1 \div 3$ MeV.

Neutroni prodotti da reazioni nucleari

Disponendo di acceleratori si possono produrre neutroni anche tramite reazioni nucleari, e sfruttando la cinematica delle reazioni se ne può anche definire con precisione l'energia cinetica. Alcune tipiche reazioni utilizzate sono



In figura [8.2](#) è riportata la dipendenza dell'energia dei neutroni prodotti per la prima delle reazioni indicate, in funzione dell'energia della particella incidente e dell'angolo d'emissione del neutrone.

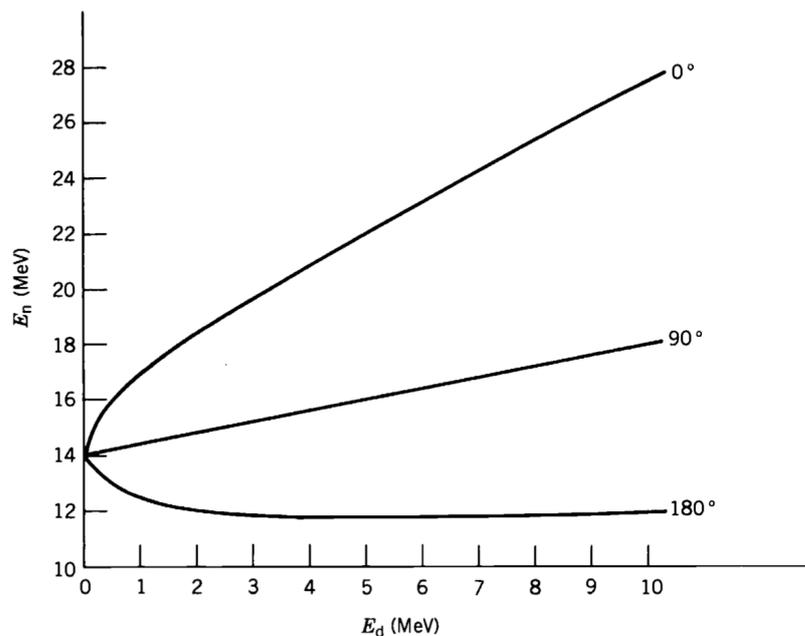


Figura 8.2: Neutroni emessi dalla reazione $d(t, {}^4\text{He})n$

Sorgenti da reattori

Il flusso neutronico in prossimità del core di un reattore a fissione può essere tipicamente dell'ordine di 10^{14} neutroni/(s \times cm²). Lo spettro in energia si estende fino a circa 5 ÷ 7 MeV, col massimo attorno a circa 1 ÷ 2 MeV.

Nel reattore la gran parte di questi neutroni viene termalizzata, ma ve ne sono anche di energetici che possono essere estratti tramite un piccolo foro nello schermaggio del reattore e utilizzati per esperimenti. Gli alti flussi di neutroni da reattori sono particolarmente utili per la produzione di radioisotopi da cattura neutronica.

Sorgenti di spallazione

Vedi articolo di G.S. Bauer - NIM A 463 (2001) 505-543.

8.2 Assorbimento e moderazione dei neutroni

L'intensità di un fascio di neutroni che attraversa materia decresce in quanto neutroni sono rimossi dal fascio per effetto di interazioni nucleari¹. I neutroni veloci possono dar luogo a svariate reazioni quali (n, p) , (n, α) o $(n, 2n)$, ma nel caso di neutroni lenti o termici il motivo principale della loro scomparsa dal fascio è la loro cattura tramite reazioni del tipo (n, γ) . Spesso le sezioni d'urto di queste reazioni sono dominate da una o più risonanze al di fuori dalle quali la sezione d'urto decresce, al crescere della velocità v , come $1/v$. Man mano che i neutroni vengono quindi rallentati da processi elastici e inelastici, diventa sempre più probabile il loro assorbimento.

Nel caso di urti inelastici il nucleo urtato è lasciato in uno stato eccitato, mentre con urti elastici si limita ad acquisire come energia cinetica parte di quella del neutrone urtante. Per eccitare un nucleo un neutrone incidente deve possedere un'energia cinetica non inferiore a ~ 1 MeV, e al di sotto di tale limite i neutroni rallentano soltanto tramite urti elastici fino a raggiungere energie termiche (~ 0.025 eV).

Penetrando uno spessore dx di materiale i neutroni di un fascio incidente incontrano ndx atomi per unità d'area, con n il numero di atomi per unità di volume del materiale. Detta σ_t la sezione d'urto totale, comprendente quindi anche processi che si limitano a deviare i neutroni dalla loro traiettoria originale, si esprime la riduzione dI dell'intensità del fascio incidente come

$$dI = -I\sigma_t n dx \quad (8.2)$$

per cui l'intensità $I(x)$ decresce con legge esponenziale in funzione dello spessore dell'assorbitore

$$I(x) = I_0 e^{-\sigma_t n x} \quad (8.3)$$

Questo risultato vale per neutroni monoenergetici, in quanto la sezione d'urto $\sigma_t(E)$ dipende anche dall'energia, per cui, anche partendo da un fascio monoenergetico, la [8.3](#) da sola non può descrivere l'intero processo di riduzione dell'intensità totale del fascio in quanto non è applicabile, immutata, a neutroni del fascio che abbiano già interagito col materiale.

Si consideri nel (SL) l'urto elastico fra un neutrone n di energia cinetica iniziale E_n e velocità \mathbf{V}_n e un atomo b del bersaglio, di massa A , inizialmente a riposo ($\mathbf{V}_b = 0$).

Nel (CM) le velocità di n e b diventano rispettivamente $\mathbf{v}_n = [A/(A+1)]\mathbf{V}_n$ e $\mathbf{v}_b = [-1/(A+1)]\mathbf{V}_n$. Indicando con apici le velocità dopo l'urto, in (CM) i loro moduli restano invariati, mentre in (SL) la velocità \mathbf{V}'_n del neutrone è pari a $(\mathbf{v}'_n - \mathbf{v}_b)$, come si vede in figura [8.3](#).

Dal teorema di Carnot si ha

¹Vedi anche E.Segrè, Nuclei e particelle, paragrafi 12.2 ÷ 12.7.

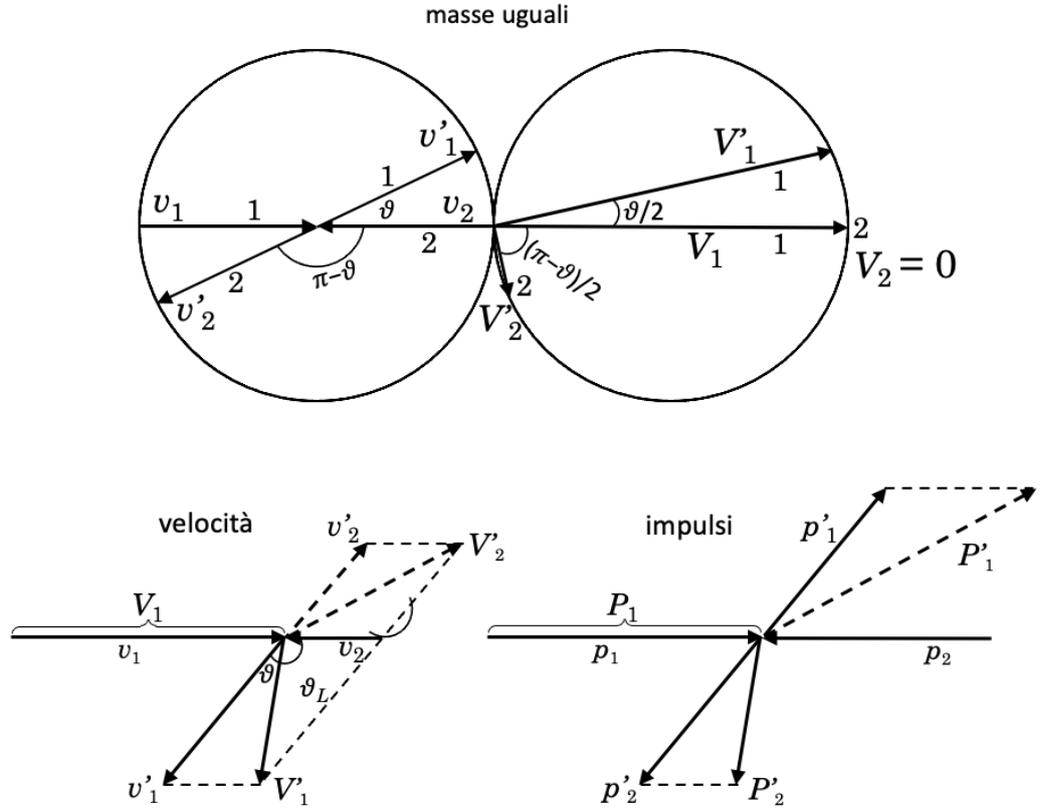


Figura 8.3: a) Urto tra particelle di ugual massa, a sinistra nel (CM), a destra nel (SL). (b) Urto tra particelle di masse m_1 ed m_2 . A sinistra diagramma delle velocità, a destra diagramma degli impulsi per lo stesso urto. Maiuscole in (SL), minuscole in (CM). Le quantità sono accentate dopo l'urto.

$$\begin{aligned}
 V_n'^2 &= \left(\frac{A}{A+1} V_n \right)^2 + \left(\frac{1}{A+1} V_n \right)^2 - 2V_n^2 A \left(\frac{1}{A+1} \right)^2 \cos(\pi - \vartheta) = \\
 &= \frac{V_n^2}{(A+1)^2} (A^2 + 1 + 2A \cos \vartheta)
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

con ϑ l'angolo di diffusione in (CM). Il rapporto fra le energie del neutrone dopo e prima dell'urto è quindi in (SL)

$$\frac{E}{E_0} = \frac{V_n'^2}{V_n^2} = \frac{1}{(A+1)^2} (A^2 + 1 + 2A \cos \vartheta) \tag{8.5}$$

da cui la disuguaglianza

$$\left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 \leq \frac{E}{E_0} \leq 1 \tag{8.6}$$

Si noti che in assenza di diffusione $\vartheta = 0$ e la [8.5](#) dá correttamente $E/E_0 = 1$. La massima perdita d'energia si ha invece per urti centrali con angolo di diffusione $\vartheta = 180^\circ$.

Dalla figura [8.3](#) si ottiene, per la relazione fra ϑ e ϑ_L nel (SL)

$$V_n^2 \left(\frac{A}{A+1} \right)^2 = V_n'^2 + \frac{1}{(A+1)^2} V_n^2 - \frac{2V_n V_n'}{A+1} \cos\vartheta_L \quad (8.7)$$

da cui

$$\cos\vartheta_L = \frac{A \cos\vartheta + 1}{(A^2 + 1 + 2A \cos\vartheta)^{1/2}} \quad (8.8)$$

Per neutroni con energie fino a qualche centinaio di keV si ha diffusione in sola onda s che quindi ha simmetria sferica nel (CM). La probabilità dW che la diffusione avvenga entro un angolo solido $d\omega$ è dunque proporzionale a $d\omega$, per cui

$$dW = \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{2} = \frac{-d(\cos\vartheta)}{2} \quad (8.9)$$

dopo l'urto quindi, uguali intervalli di $\cos\vartheta$ sono ugualmente probabili, indipendentemente da ϑ . Differenziando la [8.5](#) si ha

$$\frac{dE}{E_0} = \frac{2A}{(A+1)^2} d(\cos\vartheta) \quad (8.10)$$

da cui si vede che a uguali intervalli di $\cos\vartheta$ corrispondono uguali intervalli di energia, per cui la probabilità che un neutrone dopo un urto abbia un'energia in un intervallo $\Delta E \in [E_0; (A-1)^2/(A+1)^2 E_0]$, è la stessa su tutto l'intervallo, come in figura [8.4](#).

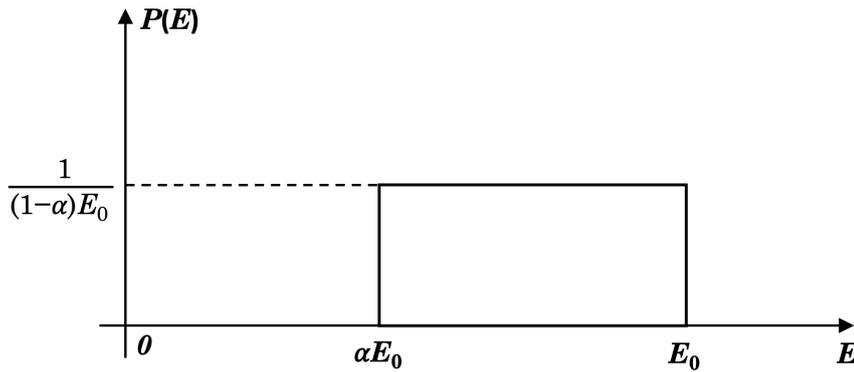


Figura 8.4: Distribuzione delle energie di neutroni dopo un urto per diffusione isotropa nel (CM), con n di energia iniziale E_0 ; $\alpha = (A-1)^2/(A+1)^2$.

Nel caso di urti con idrogeno $A = 1$ e risulta quindi ugualmente probabile

per il neutrone un qualsiasi valore di energia compreso tra E_0 e 0, e l'energia media di un neutrone dopo n urti è $\langle E_n \rangle = E_0/2^n$, valore associato a una distribuzione nella quale sono rari valori elevati dell'energia.

Nel trattare il rallentamento dei neutroni si introduce la grandezza u detta *letargia*, definita come $u = \log(E_0/E)$. Si stabilisce così una scala logaritmica per la misura dell'energia. Calcolando il valor medio della letargia dopo un urto si ha

$$\begin{aligned} \xi &= \left\langle \log \frac{E_0}{E_1} \right\rangle = \frac{\int_{\alpha E_0}^{E_0} \log \frac{E_0}{E_1} \frac{dW_1}{dE_1} dE_1}{\int_{\alpha E_0}^{E_0} \frac{dW_1}{dE_1} dE_1} = \\ &= \frac{(A+1)^2}{4AE_0} \int_{\alpha E_0}^{E_0} \log \frac{E_0}{E_1} dE_0 = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A} \log \frac{A-1}{A+1} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Ogni urto riduce quindi di ξ il valore medio di $\log E$, e dopo n urti si ha

$$\langle \log E_n \rangle = \log E_0 - n\xi \quad (8.12)$$

La [8.12](#) permette di calcolare il numero di urti necessari per termalizzare neutroni di una data energia. Con $E_0 = 1$ MeV si ottiene ad esempio che servono in media 17.5 urti in idrogeno o 110 in carbonio, per raggiungere l'energia termica di 1/40 eV. La [8.12](#) non vale però per energie quasi termiche poichè in quel caso l'energia dei nuclei diffusori è confrontabile con quella dei neutroni e nell'urto il neutrone può guadagnare invece di perdere energia.

Si veda ora come si può procedere per determinare la distribuzione in energia di neutroni in un moderatore in funzione del numero di urti subiti.

Un neutrone in un moderatore ne urta ripetutamente i nuclei bersaglio, e quindi bisogna continuamente ricalcolare l'energia persa. Nel caso di un secondo urto i neutroni non sono dunque più monoenergetici ma distribuiti come in figura [8.5\(a\)](#). Si può ragionare approssimativamente immaginando di *affettare* la distribuzione in tanti sotto-intervallini contigui associati a intervalli ΔE sufficientemente piccoli da poterli approssimare con un ben definito valore d'energia per i neutroni ad essi associati, ottenendo quanto illustrato in figura [8.5\(b\)](#). Procedendo in tal modo, con scelte di ΔE sufficientemente piccole, si ottengono generazioni successive di distribuzioni energetiche, come mostrato in figura [8.5\(c\)](#). Il procedimento in realtà si complica man mano che le energie si avvicinano a quelle termiche in quanto bisogna gradualmente tener conto sempre più anche dell'energia termica dei nuclei bersaglio del moderatore. Alla fine si avrà che la distribuzione in velocità dei neutroni tenderà alla forma Maxwelliana

$$f(v)dv = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv \quad (8.13)$$

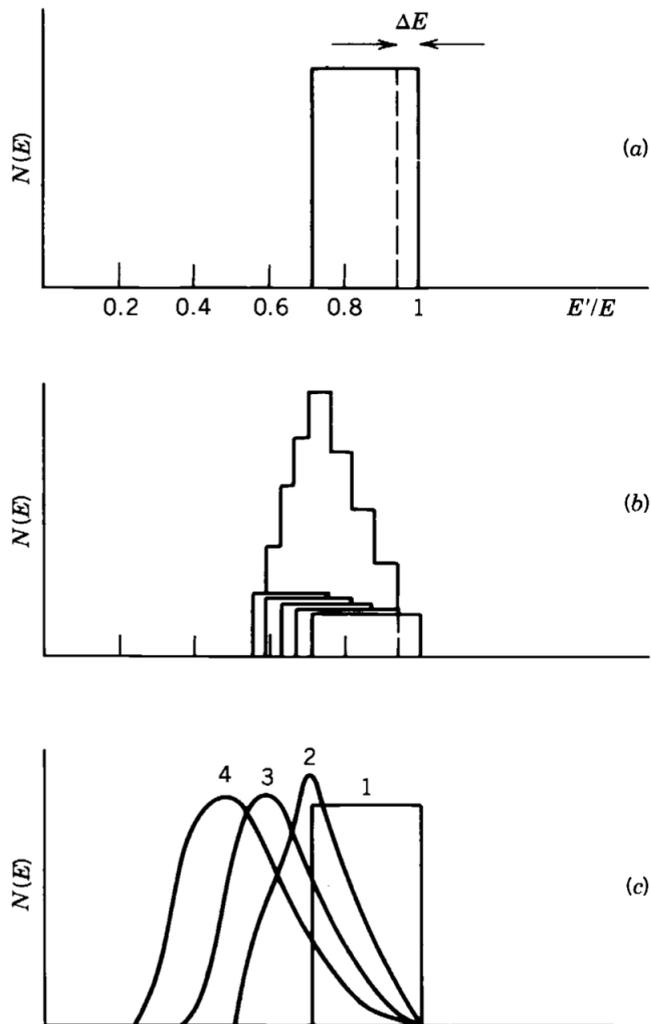


Figura 8.5: (a) Distribuzione energetica di neutroni di energia iniziale E dopo una singola diffusione in onda-s da ^{12}C (piatta da E a $0.72E$). (b) Effetto di una seconda diffusione su atomi del moderatore visto in modo approssimativo, segmentando in 5 fette la distribuzione dopo la prima diffusione. (c) Risultato del calcolo esatto dopo 1, 2, 3 e 4 successive diffusioni.

con m la massa del neutrone, ed n la densità volumetrica di neutroni. Riscrivendo in termini dell'energia cinetica dei neutroni si ha

$$f(E)dE = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} dE \quad (8.14)$$

che sostanzialmente descrive quanto mostrato in figura [8.5\(c\)](#) dopo alcune generazioni di collisioni.

8.3 Reazioni con neutroni e sezioni d'urto

Partendo da un modello ad assorbimento totale si è ottenuta, per la sezione d'urto di reazione, l'espressione [7.57](#)

$$\sigma_r = \pi(R + \lambda)^2$$

Trattando della diffusione di neutroni su nuclei bisognerebbe includere anche la riflessione sulla superficie nucleare della funzione d'onda del neutrone incidente, per valutare la probabilità che il neutrone incidente penetri nella regione del potenziale nucleare, dove può essere assorbito. Descrivendo in prima approssimazione la superficie nucleare con una barriera rettangolare, la probabilità di trasmissione attraverso essa è quella calcolata trattando del decadimento α , e includendola come fattore nell'espressione della sezione d'urto di reazione per neutroni si ha

$$\sigma = \pi(R + \lambda)^2 \frac{4kK}{(k + K)^2} \quad (8.15)$$

con $K = \sqrt{2m(E + V_0)/\hbar^2}$ per una barriera di profondità $-V_0$, e $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. Con neutroni di bassa energia, $E \ll V_0$, $k \ll K$ ed anche $\lambda = k^{-1} \gg R$, per cui

$$\sigma \simeq \frac{4\pi}{kK} \quad (8.16)$$

Dato che $k = p/\hbar = mv/\hbar$, si ottiene l'osservata dipendenza della sezione d'urto da $1/v$.

Questa può essere dedotta alternativamente anche partendo dalla formula [7.73](#) per una singola risonanza

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} g \frac{\Gamma_{aX}\Gamma_{bY}}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

Il meccanismo principale di decadimento successivo a una cattura neutronica è l'emissione di un raggio γ , la cui probabilità è virtualmente indipendente da qualsiasi piccola variazione dell'energia incidente o di risonanza. Si può pertanto considerare Γ indipendente dall'energia del neutrone. La larghezza Γ_n , riferita al canale d'ingresso della reazione, dipende dalla densità dn/dE degli stati finali disponibili per il neutrone catturato, che in base alla [6.22](#) è proporzionale alla velocità v del neutrone.

Quindi, quando $\Gamma_n \propto v$ e lontano dalla risonanza, ovvero per $E \ll E_R$

$$\sigma \simeq \frac{\pi}{k^2} \frac{\Gamma_n \Gamma}{E_R^2 + \Gamma^2/4} \propto \frac{1}{v} \quad (8.17)$$

Come si vede in figura [8.6](#) la dipendenza da $1/v$ è seguita piuttosto accuratamente lontano dalle risonanze.

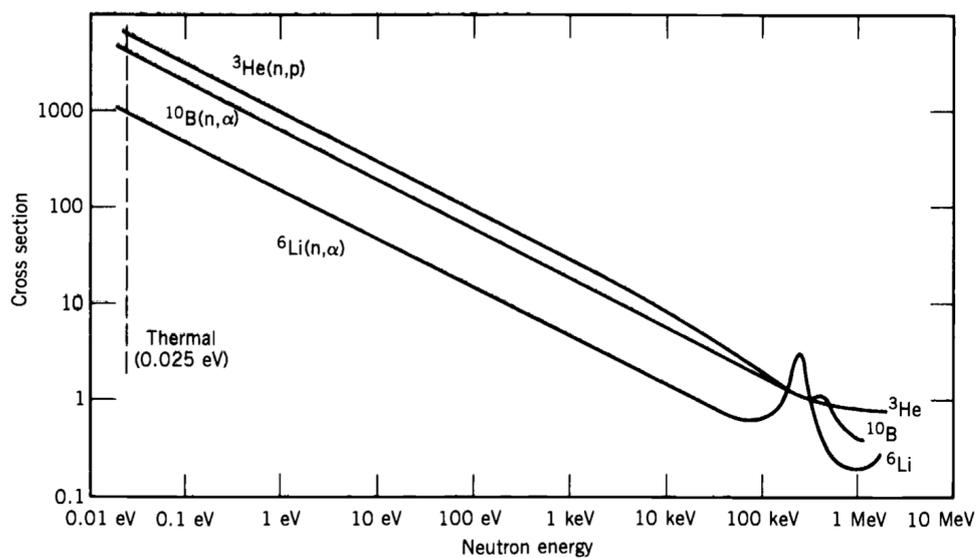


Figura 8.6: Sezioni d'urto per neutroni nelle reazioni ${}^3\text{He}(n,p)$, ${}^{10}\text{B}(n,\alpha)$, ${}^6\text{Li}(n,\alpha)$. Si nota l'andamento $\propto 1/v$ per $E < 1$ keV, con risonanze sopra i 100 keV.

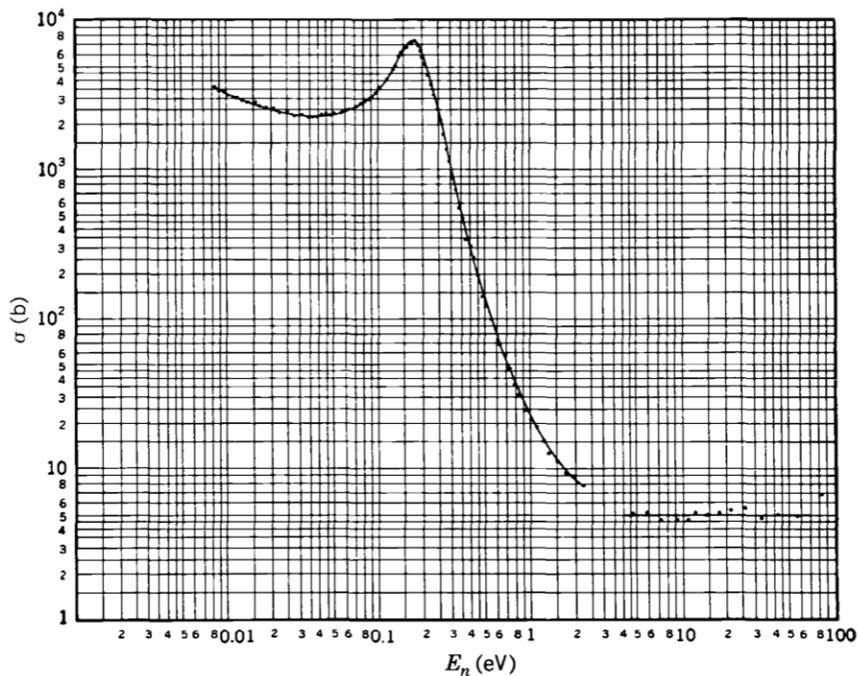


Figura 8.7: Singola risonanza isolata sovrapposta a un'andamento $\propto 1/v$ nel cadmio Cd.

Per quanto concerne la zona delle risonanze non c'è modo di predire con esattezza la posizione in energia dei picchi di risonanza; la struttura può essere dominata da una singola risonanza isolata, come nel caso del cadmio Cd, in figura 8.7, o mostrare una struttura complessa, come per l'uranio ^{238}U , in figura 8.8.

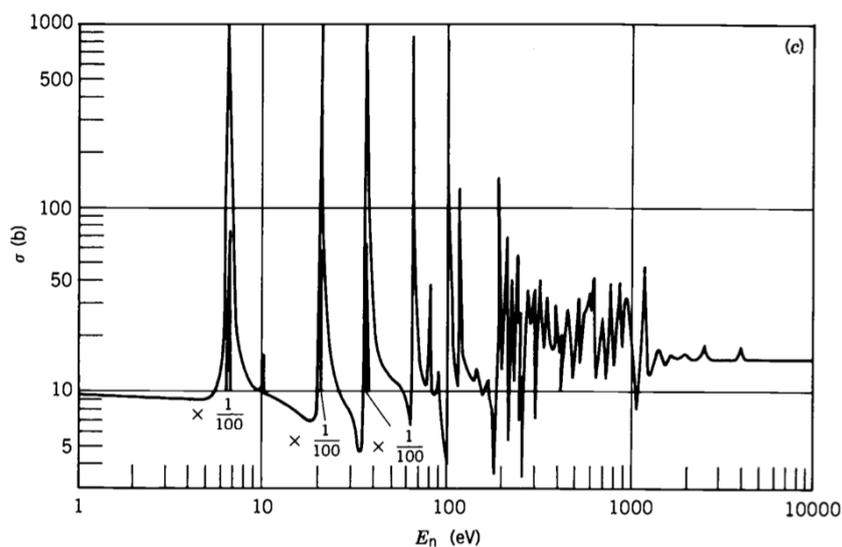
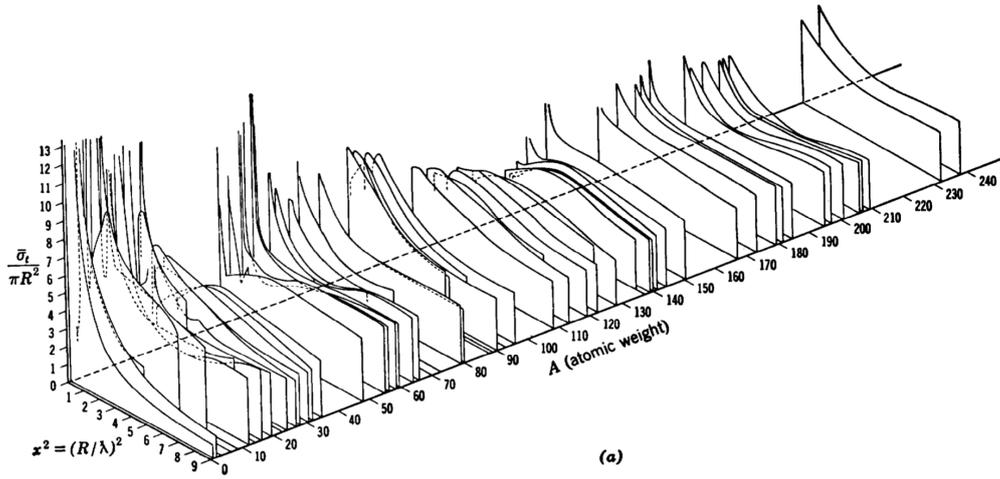


Figura 8.8: Picchi stretti nella regione di risonanze per ^{238}U .

Le dipendenze dall'energia e dal numero di massa A per le sezioni d'urto totali neutrone-nucleo misurate, sono mostrate in figura 8.9(a); in figura 8.9(b) si vede quanto si ottiene in proposito per le stesse calcolandole in base al modello ottico.

[Sezioni d'urto misurate]



[Sezioni d'urto calcolate]

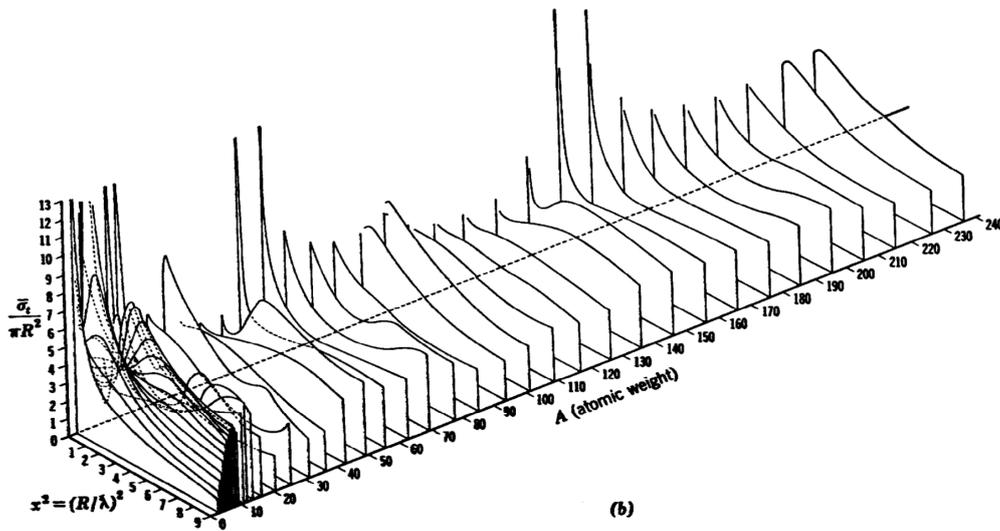


Figura 8.9: σ_{tot} misurate (a) e calcolate (b), in unità πR^2 , per neutroni di diverse energie (x^2 è un parametro energetico in forma adimensionale).

Capitolo 9

Radioisotopi e medicina nucleare

Le immagini di diagnostica medica prodotte con i raggi X sono generate dall'attenuazione di fasci di radiazione elettromagnetica da parte del corpo umano e forniscono informazioni di tipo *anatomico*.

Un modo totalmente diverso di produrre immagini dell'interno di un corpo, sempre utilizzando radiazioni elettromagnetiche, consiste nell'introdurre nel corpo sorgenti radioattive, in quantità minime dell'ordine dei nanogrammi (10^{-9} g), onde non produrre effetti tossici, ma sufficienti a permettere la rivelazione della radiazione γ poi emessa.

L'elemento radioattivo utilizzato, detto *radionuclide*, è legato a molecole di sostanze, dette *tracciatori*, che possano veicolarlo nel corpo ed essere assorbite dagli organi e tessuti che si vogliono studiare.

In alcuni casi il radionuclide può risultare di per sé selettivo rispetto all'organo da studiare, come ad esempio lo iodio per la tiroide. Radioisotopi non selettivi, come ad esempio il tecnezio $^{99}_{43}\text{Tc}$, richiedono invece di essere legati a opportune sostanze veicolanti. La miscela di radioisotopo e sostanza veicolante è il *radiofarmaco*.

Dopo l'introduzione del radiofarmaco nel corpo bisogna attendere che esso raggiunga una condizione di bio-equilibrio con l'organo da studiare, prima di iniziare il rilevamento dei γ per ottenere poi le immagini diagnostiche. Quest'ultima fase viene attuata con una γ -camera [F](#).

Un radiofarmaco può essere trasportato attraverso l'organismo *meccanicamente*, ad esempio dal flusso sanguigno, o attraverso processi metabolici, come per lo iodio. Un'opportuna singola somministrazione di radiofarmaco può permettere lo studio dell'intero corpo, ma solitamente si agisce in modo da localizzare organi specifici.

Spesso l'assorbimento del tracciatore da parte di un organo avviene in modo diverso se l'organo è sano o soffre di patologie. La misura della quantità di

¹Vedi Appendice [F](#)

radiazione emessa permette di risalire alla quantità di tracciante assorbita e alla sua distribuzione nei tessuti.

Val la pena sottolineare un'altra importante differenza rispetto ai raggi X. Questi sono fortemente assorbiti dal tessuto osseo, e risulta di conseguenza difficoltoso utilizzarli ad esempio per indagare il cervello. Essi, come del resto anche gli ultrasuoni, devono attraversare due volte tessuto osseo prima di riemergere ed essere raccolti a formare un'immagine. Raggi γ di radioisotopi presenti dentro il cranio devono invece attraversare una sola volta tessuto osseo per essere raccolti a formare un'immagine.

Un'ulteriore differenza è relativa al fatto che nella radiografia X l'assorbimento della radiazione è un elemento essenziale per l'ottenimento delle immagini, che si basano proprio sul contrasto determinato dai diversi livelli di assorbimento dei raggi X nei diversi tessuti.

Con l'uso di radioisotopi, provenendo la radiazione direttamente dall'interno del corpo, il suo assorbimento nei tessuti attraversati risulta un fattore negativo, riducendo il numero dei raggi γ utili. È quindi preferibile, in tal caso, utilizzare radiazioni di energie tali da ridurre il più possibile l'assorbimento nei tessuti. Per un'efficace resa nella raccolta delle immagini è poi necessario che il fondo dovuto alla radioattività naturalmente prodotta dai tessuti del corpo studiato sia molto minore della radioattività associata ai radioisotopi introdotti nel corpo.

La necessità di soddisfare a queste condizioni concomitanti si abbina ovviamente a quella fondamentale di danneggiare il meno possibile i tessuti interessati con la radioattività emessa dai radionuclidi utilizzati. A tal proposito bisogna fare in modo che il radionuclide permanga nel corpo soltanto il tempo necessario ad effettuare l'esame, o comunque il meno possibile e sia poi espulso, o comunque abbia una vita media breve, compatibile con i tempi necessari ad effettuare l'esame medico, e anche per evitare inquinamento radioattivo ambientale una volta espulso.

9.1 Diagnostica per immagini

La diagnostica per immagini in ambito medico copre un ambito vastissimo, e qui citeremo molto brevemente soltanto due casi, quello della cosiddetta SPECT (Single-Photon Emission Computed Tomography), e quello della PET (Positron Emission Tomography).

La SPECT

La SPECT è una tecnica tomografica di imaging medico della medicina nucleare che utilizza raggi γ emessi da radiofarmaci introdotti nel corpo, rivelandoli con una γ -camera. È in grado di fornire anche informazioni

biotopologiche tridimensionali sotto forma di molteplici sezioni assiali (bidimensionali) dell'organo esaminato.

Le immagini SPECT vengono praticamente ottenute ruotando la γ -camera attorno al paziente. Il tempo necessario per ottenere ogni proiezione è variabile, ma tipicamente dell'ordine di $15 \div 20$ secondi. Un tempo totale di scansione per un esame può raggiungere i circa $15 \div 20$ minuti. Con più γ -camere contemporaneamente operative il tempo totale si riduce proporzionalmente.



Figura 9.1: Schema di apparato SPECT. Sulla sinistra è mostrato un esempio di immagine ottenuta per l'intero corpo umano con radioisotopo tecnezio.

La risoluzione spaziale delle immagini ottenibili con questa tecnica, può essere inferiore a quella delle immagini con raggi X, ma immagini acquisite con l'uso di radioisotopi forniscono informazioni fisiologiche sulla funzionalità di molti organi. Ciò è importante in quanto spesso alcune modificazioni della funzionalità di un organo precedono le alterazioni anatomiche della sua struttura che sarebbero evidenziabili con una radiografia X. L'uso di esami biomedici con radioisotopi permette quindi diagnosi anticipate su patologie quali ad esempio quelle tumorali.

La PET

La PET è una tecnica diagnostica che come la SPECT fornisce informazioni di tipo fisiologico permettendo di ottenere mappe dei processi funzionali globali o di specifici organi all'interno del corpo.

Con essa ad esempio, si studiano patologie neoplastiche, si effettuano diagno-

si differenziali delle demenze e studi di *neuroimaging* funzionale, si indagano malattie di interesse reumatologico e infettivologico, si studiano il miocardio ibernato e la perfusione cardiaca.

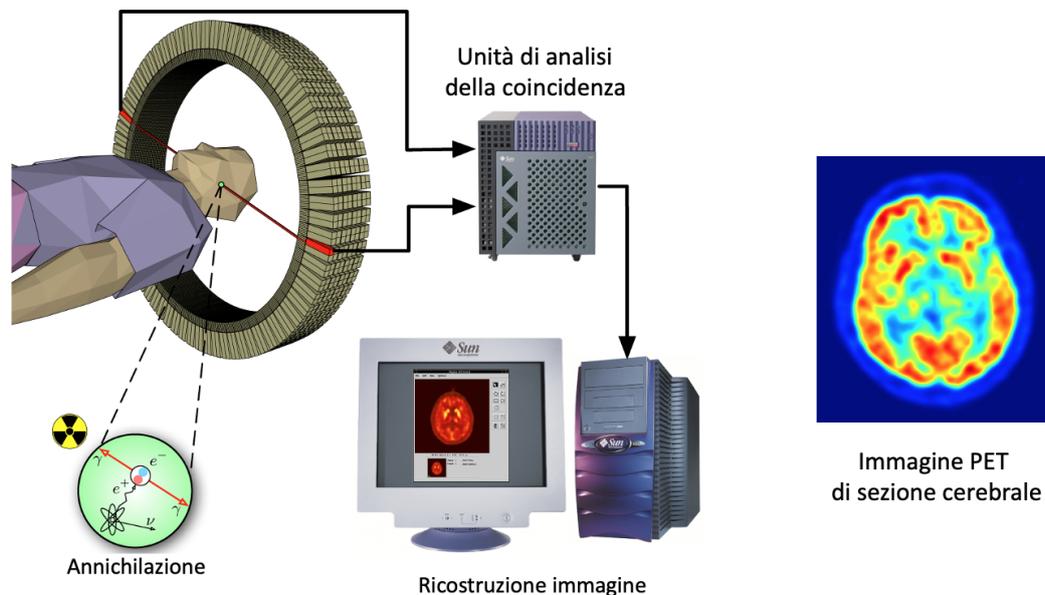


Figura 9.2: Schema di apparato PET. Sulla destra è mostrato un esempio di immagine di sezione del cervello umano.

La procedura tipica dell'esame inizia con l'iniezione di un radiofarmaco chimicamente legato a una molecola metabolicamente attiva (vettore), come ad esempio il fluorodesossiglucosio (^{18}F -FDG). Dopo il tempo necessario al raggiungimento di un'opportuna concentrazione del radiofarmaco nei tessuti da analizzare, il soggetto viene posizionato nell'apparato di scansione. L'isotopo a breve vita media decade emettendo un positrone e^+ che dopo un percorso al massimo di pochi millimetri si annichila con un elettrone e^- producendo una coppia di fotoni γ , entrambi di energia 511 keV, emessi in direzioni opposte (*back to back*).

I fotoni sono poi rivelati da uno scintillatore accoppiato a fotomoltiplicatori. Punto cruciale della tecnica è la rivelazione di coppie di fotoni γ coincidenti entro un intervallo temporale di pochi nanosecondi. Dalla posizione in cui i fotoni γ colpiscono il rivelatore si può ricostruire la posizione del punto, nell'organo indagato, da cui sono stati emessi.

Si possono migliorare la risoluzione spaziale e il contrasto delle immagini utilizzando, durante la ricostruzione, la correzione per il tempo di volo (TOF) dei due fotoni γ .

Attività tipiche

L'introduzione nel corpo di una molecola o di un composto chimico cui sia legato un radioisotopo viene detta *radiomarcatura*.

I radioisotopi utilizzati per produrre immagini devono avere una vita media confrontabile con quella dei tempi di misura per ottenere le immagini desiderate. Essendo questi tempi dell'ordine delle decine di minuti o poche ore, e comunque tali da non implicare possibili danni ai tessuti dovuti alla radioattività prodotta, ne consegue che non può trattarsi di radioisotopi disponibili in natura ma che devono essere prodotti artificialmente. Da ciò consegue che i tempi di trasporto dal luogo di produzione a quello di utilizzo del radioisotopo devono essere brevi, e comunque tali da evitare un'eccessiva riduzione della sua attività specifica prima dell'immissione nei tessuti da studiare.

In tabella le energie dei γ prodotti e i tempi di dimezzamento di alcuni fra i radioisotopi di più comune uso in diagnostica medica per immagini.

Tabella - Radioisotopi emettitori γ di uso comune

Nuclide	Isotopo	$t_{1/2}$	Energia dei γ (KeV)
Tecnezio	$^{99m}_{43}\text{Tc}$	6 h	140
Gallio	$^{67}_{31}\text{Ga}$	78.3 h	98, 184, 300
Indio	$^{111}_{49}\text{In}$	2.8 d	171, 245
Iodio	$^{123}_{53}\text{I}$	13 h	159
Iodio	$^{131}_{53}\text{I}$	8 d	364
Xeno	$^{133}_{54}\text{Xe}$	5.27 d	81
Tallio	$^{201}_{81}\text{Tl}$	73 h	68, 80.3

È dunque importante calcolare l'attività dei radioisotopi utilizzati. Si ricordi che per un nucleo con numero di massa A un grammo di materiale di atomi con quel nucleo contiene \mathcal{N}/A atomi, con $\mathcal{N} \simeq 6.022 \times 10^{23}$ il numero di Avogadro.

Il numero di disintegrazioni per unità di tempo di un grammo di quel materiale, ovvero la sua attività specifica, è quindi

$$A_{sp} = \frac{\mathcal{N}\lambda}{A} = \frac{\mathcal{N} \ln 2}{A t_{1/2}} \simeq \frac{4.16 \times 10^{23}}{A t_{1/2}} \quad (9.1)$$

Calcolandola ad esempio per il $^{99m}_{43}\text{Tc}$ si ha

$$A_{sp} \left(^{99m}_{43}\text{Tc} \right) = \frac{4.16 \times 10^{23}}{99 \times 2.16 \times 10^4} \simeq 1.95 \times 10^{17} \quad \frac{\text{disintegrazioni}}{s \times g}$$

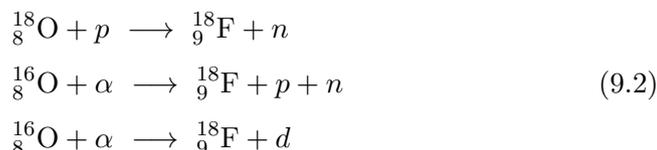
La quantità di un nano grammo (10^{-9} g) di tecnezio $^{99m}_{43}\text{Tc}$ produce quindi circa 2×10^8 disintegrazioni al secondo, ovvero un'attività di 200 MBq,

equivalente a ~ 5.4 mCurie.

Un tipico esame con l'uso del tecnezio richiede un'attività dell'ordine di 600 MBq, con l'utilizzo quindi nel tessuto da esaminare di circa 3 nano grammi di radioisotopo.

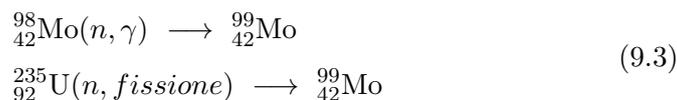
9.2 Produzione di radioisotopi

Per la produzione di radioisotopi si irradiano bersagli di nuclei stabili con fasci di protoni o altri nuclei leggeri prodotti da un ciclotrone. Così si producono ad esempio i radioisotopi utilizzati nella PET che essendo caratterizzati da vite medie molto brevi devono essere prodotti in vicinanza dei luoghi di utilizzo. Il tracciante ^{18}F , con vita media per decadimento β^+ di circa 2 ore, si ottiene da reazioni quali

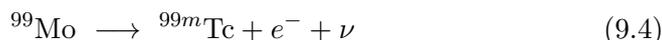


Le reazioni su ^{16}O hanno energie di soglia rispettivamente di 23.2 MeV e 20.4 MeV. La sezione d'urto della prima è mostrata in figura 9.3 per le altre due, a energie di ~ 30 MeV, la sezione d'urto vale ~ 100 mbarn. Il bersaglio è in realtà costituito da acqua arricchita in ^{18}O nel primo caso e da semplice acqua negli altri due.

Un altro metodo di produzione consiste nell'utilizzare il flusso di neutroni prodotto in un reattore a fissione per irraggiare nuclei pesanti ottenendo in due modi diversi nuclei di molibdeno ^{99}Mo , β instabile con una vita media di circa 67 ore.



La prima reazione è prodotta dai neutroni di fissione sui nuclei di ^{98}Mo già presenti nel reattore come prodotti di fissione; la seconda è la fissione stessa indotta da neutroni su uranio che può produrre direttamente nuclei di ^{99}Mo . Il ^{99}Mo viene poi utilizzato per produrre ^{99m}Tc tramite il cosiddetto *generatore di tecnezio*. Questo consiste in un contenitore a colonna (figura 9.4) nel quale vi è ^{99}Mo , che funge da nucleo genitore, adsorbito in ossido di alluminio. Il molibdeno decade β^-



producendo il tecnezio metastabile che poi a sua volta decade γ con vita media di 6 ore (${}^{99m}\text{Tc} \longrightarrow {}^{99}\text{Tc} + \gamma$). Il tecnezio, che non è adsorbito nel-

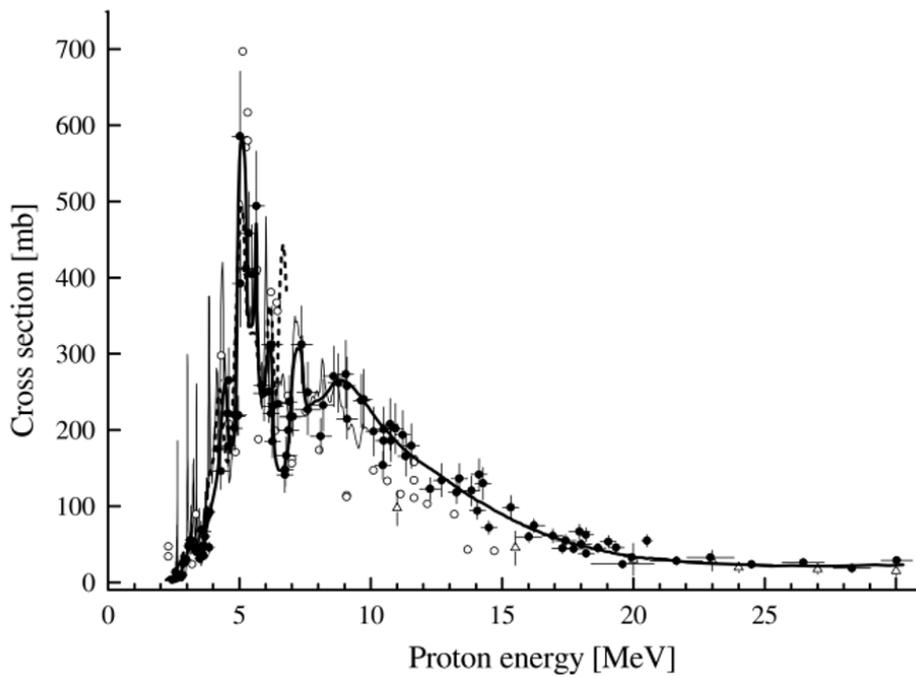


Figura 9.3: Sezione d'urto della reazione $^{18}\text{O} + p \rightarrow ^{18}\text{F} + n$.

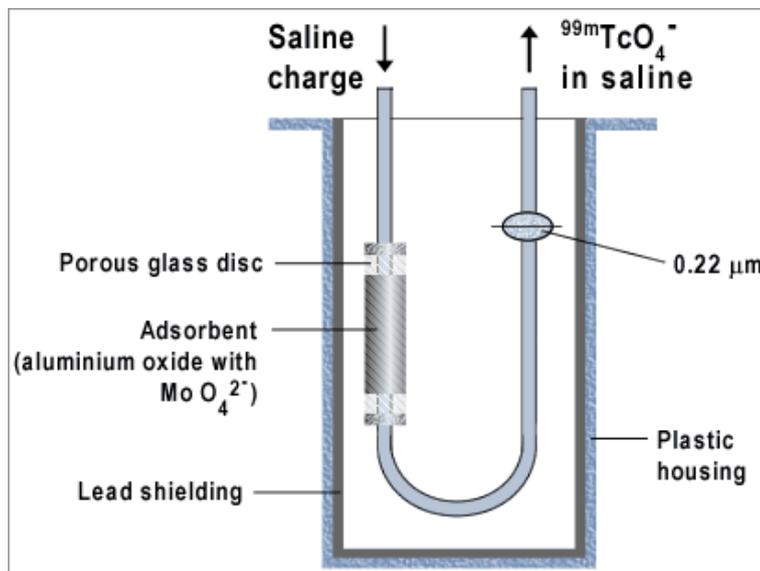


Figura 9.4: Generatore di tecnezio.

l'ossido di alluminio come il molibdeno, viene poi estratto introducendo nel contenitore a colonna una soluzione salina che prelevata, risulta poi ricca di sodio pertecnetato.

Il *generatore* permette dunque il trasporto verso luoghi di utilizzo del ${}_{43}^{99m}\text{Tc}$ sfruttando l'intermediazione del ${}_{42}^{99}\text{Mo}$, che ha una vita media circa 10 volte superiore.

La gestione della fase di produzione di radioisotopi coinvolge il problema di posizionamento rispetto all'equilibrio, nel caso di reazioni di produzione in presenza di concomitante decadimento del prodotto.

Il problema è già stato affrontato nella parte conclusiva del paragrafo [4.2](#) (Decadimento radioattivo di più sostanze), che si riporta per comodità.

Si consideri il caso della produzione di una sostanza genitore che possa decadere. Si vedrà che si può raggiungere l'equilibrio se il rateo temporale della sua produzione \mathcal{R} è uguale al valore assoluto del rateo del suo decadimento $\lambda N(t)$.

Un caso simile si ha ad esempio bombardando un campione di sostanza i cui nuclei siano stabili, con un fascio di particelle, provenienti da un reattore o da un acceleratore, che inducano un numero di trasmutazioni su \mathcal{R} atomi/s verso un elemento radioattivo che poi decada con una costante λ .

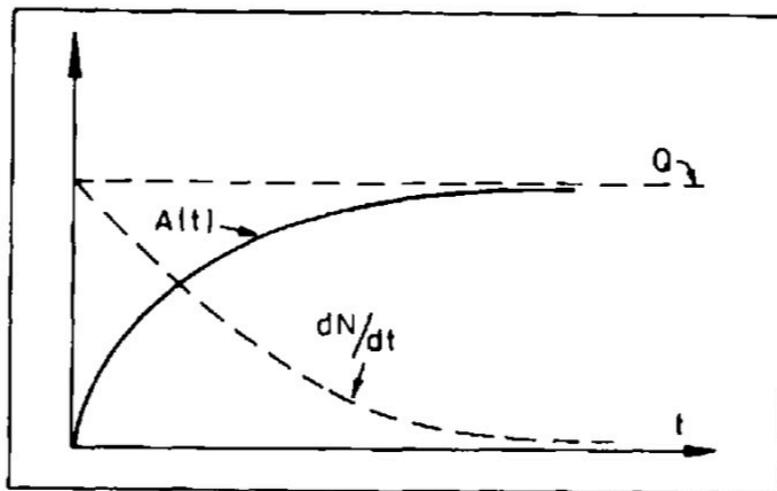


Figura 9.5: Equilibri asintotici fra ratei di produzione e attività.

La variazione del numero $N(t)$ di nuclei radioattivi presenti si ottiene dal bilanciamento fra il rateo \mathcal{R} di formazione e il rateo $-\lambda N(t)$ di decadimento:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mathcal{R} - \lambda N(t) \quad (9.5)$$

che se $\mathcal{R} = \text{cost.}$, si può riscrivere ridefinendo e quindi separando le variabili:

$$\frac{d[\mathcal{R} - \lambda N(t)]}{\mathcal{R} - \lambda N(t)} = -\lambda dt \quad (9.6)$$

Integrandola, nell'ipotesi che all'istante iniziale $t = 0$ si abbiano $N(0) = 0$ nuclei, si ottiene

$$\mathcal{R} - \lambda N(t) = [\mathcal{R} - \lambda N(0)] e^{-\lambda t} \implies N(t) = \frac{\mathcal{R}}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (9.7)$$

da cui

$$\mathcal{A}(t) = \lambda N(t) = \mathcal{R} (1 - e^{-\lambda t}) \quad (9.8)$$

che rappresenta un andamento a saturazione, tipico dei casi in cui formazione e decadimento sono in competizione. In figura [9.5](#) sono schematicamente illustrati l'attività $\mathcal{A}(t) \equiv \lambda N(t)$, o rateo di decadimento radioattivo, e la variazione temporale del numero di nuclei genitori $dN(t)/dt$, per un sistema con un rateo di formazione di \mathcal{R} atomi/s.

Se il tempo d'irraggiamento del campione è piccolo rispetto alla vita media ($t \ll \tau$) si può espandere l'esponenziale fino al termine lineare in t per cui $\mathcal{A}(t) \simeq \mathcal{R}\lambda t$, con l'attività che cresce ad un rateo praticamente costante. Per brevi tempi d'irraggiamento l'accumulo di nuclei prodotti è quindi praticamente lineare nel tempo e non viene significativamente intaccato dai decadimenti.

Per tempi lunghi rispetto a τ l'esponenziale tende a 0 e l'attività si mantiene approssimativamente costante

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{R}, \quad \text{per } t \gg \tau \quad (9.9)$$

È la condizione in cui la nuova "attività" è prodotta circa con lo stesso rateo al quale la vecchia scompare, ed è un esempio di equilibrio secolare.

S'osservi che se si irradia un campione per un certo tempo e poi lo si toglie dalla zona d'irraggiamento, da quel momento esso mostrerà una diminuzione dell'attività con andamento esponenziale decrescente. Per produrre un campione utilizzabile è quindi sufficiente irradiare per un tempo dell'ordine di $2 \div 3$ vite medie.

Capitolo 10

Termodinamica nucleare

Il concetto di temperatura nucleare è stato introdotto da Bethe e Weisskopf nel 1937, nel tentativo di descrivere la formazione e il decadimento del "nucleo composto" che si forma nelle reazioni indotte da proiettili leggeri, il più delle volte neutroni.

Successivamente fu esteso anche ai casi di reazioni che coinvolgono proiettili di alta energia e ioni pesanti, stimolato dalla ricerca sull'instabilità dei nuclei e sulla possibile esistenza di una transizione di fase liquido-gas per la "materia nucleare". Per conseguire lo scopo si sono sviluppate svariate e complementari tecniche sperimentali che permettessero di estrarre le caratteristiche "termiche" di sistemi nucleari altamente eccitati.

La temperatura T di un sistema costituito da un numero fissato N di particelle ad energia E è generalmente definita, in accordo con la meccanica statistica, dalla

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S(E, N)}{\partial E} = \frac{\partial \ln \rho(E, N)}{\partial E} \quad (10.1)$$

con S l'entropia del sistema e ρ la densità degli stati all'energia E .

Per applicare questa formula devono però essere soddisfatte due condizioni:

1. il sistema deve essere in completo equilibrio statistico, ovvero ogni stato incluso in $\rho(E, N)$ deve essere popolato con ugual probabilità;
2. deve essere nota la densità degli stati.

Per i sistemi nucleari queste due condizioni possono essere critiche da soddisfare. Il grado di raggiungimento dell'equilibrio nelle interazioni fra ioni pesanti ad alte o altissime energie non è a priori conoscibile e l'evoluzione dinamica del sistema è ancora poco compresa. Per quanto concerne le densità degli stati nucleari, le si conosce bene solo a basse energie. Per alte energie d'eccitazione, dove gli effetti dinamici giocano un ruolo importante, la conoscenza delle densità degli stati nucleari è più lacunosa.

Oltre a questo ci sono alcuni altri problemi che rendono alquanto complicata l'estrazione di un valore per la temperatura nucleare:

- *Il nucleo è un sistema microscopico* - Non si possono utilizzare sonde esterne termometriche, e di conseguenza l'informazione sulla temperatura è ottenuta dallo studio dell'emissione di parti del sistema stesso, assumendo che queste, prima dell'emissione, fossero parte del sistema equilibrato e contribuissero alla densità degli stati dell'intero sistema. È una condizione imprescindibile affinché esse possano essere considerate rappresentative dell'intero sistema in studio (il particolare nucleo).
- *Il nucleo è un sistema isolato* - Dato il breve range dell'interazione nucleare, un nucleo non è in grado di scambiare la propria energia d'eccitazione con l'ambiente circostante. Un sistema nucleare è dunque definito dalle condizioni: $E = \text{cost.}$, $N_{part} = \text{cost.}$, per cui l'unico *ensemble* statistico appropriato per un nucleo è quello microcanonico, utilizzato per i sistemi isolati. Inoltre non è facile sperimentalmente, fissare univocamente il valore dell'energia, in quanto l'energia depositata può variare fortemente in conseguenza delle diverse interazioni nucleari, specialmente nei casi in cui diversi meccanismi di reazione conducono all'emissione degli stessi prodotti finali.
- *Il nucleo è un sistema quantistico Fermionico* - I nucleoni in un nucleo occupano diversi livelli energetici, e il principio di esclusione di Pauli limita il numero di essi che possono ripartirsi l'energia d'eccitazione disponibile. In conseguenza di ciò l'effettivo numero di gradi di libertà dipende dall'energia d'eccitazione che è governata dalla statistica di Fermi-Dirac. Inoltre le proprietà globali di un nucleo mutano dinamicamente con l'energia, come si vede ad esempio per la sua densità che cala in funzione dell'espansione termica.
- *Il nucleo è un sistema elettricamente carico* - L'interazione Coulombiana a lungo range fra i protoni introduce delle instabilità che possono condurre a una riduzione della temperatura critica.
- *Il nucleo si scalda e si raffredda attraverso processi dinamici* - Evidenze diverse possono corrispondere a diverse condizioni o fasi di *freeze-out*, o rappresentare differenti stadi dell'evoluzione dinamica di un nucleo. Vi sono inoltre la produzione di parti per evaporazione che può contribuire alle rese d'emissione di frammenti leggeri, e l'espansione globale che influenza le energie cinetiche dei frammenti.
- *I parametri termodinamici come pressione, volume, potenziale chimico, non sono sotto controllo* - Le fasi sperimentali non danno accesso diretto ai parametri termodinamici e si è costretti a ricorrere a calcoli di modello per estrarli.
- *Le evidenze sperimentali sono modificate dai decadimenti secondari* - Bisogna poter individuare prodotti finali che siano poco affetti dal

problema dei decadimenti secondari, come ad esempio i Frammenti di Massa Intermedia (IMF).

Per cercare di estrarre l'informazione sulla temperatura associabile alla materia nucleare, tenendo conto di quanto elencato, si adottano svariate tecniche, anche in funzione delle entità delle energie d'eccitazione. A seconda degli approcci esse possono essere raggruppate in:

- *Approccio che considera le popolazioni degli stati eccitati del sistema nucleo* - Si basa sul concetto gran-canonico: il valore della temperatura nucleare è estratto dalle rese dei cluster prodotti, assumendo valida una distribuzione alla Boltzmann

$$Y_i \propto e^{-E_i/T} \quad (10.2)$$

Le tecniche più spesso utilizzate consistono nel considerare il doppio rapporto delle rese isotopiche (S. Albergo et al., Nuovo Cim. 89 (1985) 1; J. Pochodzalla et al., Phys.Rev.Lett. 75 (1995) 1040), detto anche termometro isotopico; la popolazione degli stati eccitati, legati oppure no (D.J. Morrissey, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. 44 (1994) 27); le rese isobariche per sorgenti definite.

- *Approccio cinetico* - Si basa sul concetto di *ensemble* canonico. La temperatura è estratta dalle pendenze degli spettri misurati in energia cinetica, e il metodo è detto termometro delle pendenze. I processi per i quali lo studio della temperatura è attuato in questo modo, concernono tipicamente l'evaporazione termica di nucleoni o loro cluster dal nucleo composto, o la brusca disintegrazione di una sorgente equilibrata con l'emissione di nuclei leggeri, nucleoni, particelle, raggi γ .
- *Approccio termico* - L'energia d'eccitazione del sistema al momento del *freeze-out* è estratta dalle misure della cascata d'evaporazione da sorgente termalizzata in funzione del rapporto N/Z . La corrispondente temperatura al momento del *freeze-out* è quindi ottenuta dal valore dedotto per l'energia d'eccitazione. Un esempio è costituito dal termometro di isospin (K.-H. Schmidt et al., Phys.Lett.B 300 (1993) 313)

10.1 Descrizione termodinamica di un nucleo

Per quanto concerne le proprietà dei nuclei o nel loro stato fondamentale o in stati debolmente eccitati, quanto sperimentalmente osservato è da un lato caratterizzato dalle proprietà di un sistema degenere di fermioni e dall'altro da quelle di un insieme numericamente limitato di componenti. In un nucleo la forza nucleare da' luogo, in buona approssimazione, a un campo

medio globale nel quale i nucleoni si muovono come particelle quasi libere. Nel modello a shell si tiene in considerazione la dimensione finita dei nuclei e gli stati dei singoli nucleoni sono classificati tramite eccitazioni radiali e momenti angolari. Da un punto di vista termodinamico si assegna temperatura zero al sistema nel suo stato fondamentale.

Si considerino ora nuclei in condizioni di forte eccitazione, per i quali il cammino libero medio di un loro generico nucleone entro il nucleo stesso è molto ridotto, compatibile con 1 fm. Il nucleo non può in tal caso essere considerato come un sistema fermionico degenere ma piuttosto come una sorta di liquido, tanto più al crescere delle eccitazioni. Viene quindi naturale adottare in tal caso un approccio statistico per descriverne le caratteristiche e il comportamento, e mutuare concetti e osservabili termodinamiche. Lo stato d'eccitazione di un nucleo sarà dunque caratterizzato dalla sua temperatura. Non bisogna però dimenticare che si può a rigori associare una temperatura soltanto ad un sistema ampio e in equilibrio termico, e neppure i nuclei più pesanti soddisfano bene a questa condizione. Un nucleo eccitato non può dunque a maggior ragione essere pensato come in equilibrio, ma piuttosto in una condizione di raffreddamento rapido tramite emissione di nucleoni e fotoni.

Non si può prescindere da ciò qualunque interpretazione termodinamica si tenti dei risultati sperimentali.

Quando si tratta termodinamicamente di fenomeni nucleari si parla solitamente di *materia nucleare*, piuttosto che di nuclei, sottintendendo che quanto detto va considerato come estrapolato ad ampi sistemi di nucleoni. L'ambito che meglio permette lo studio delle proprietà termodinamiche della materia nucleare è quindi quello relativo alle reazioni che coinvolgono ioni pesanti. In queste tipologie di urti ione-ione i nuclei si fondono (amalgamano) sino a formare, per un breve arco di tempo, un sistema di *materia nucleare* di accresciute densità e temperatura.

I risultati della termodinamica applicata alla materia nucleare sono di grande importanza anche per la cosmologia e l'astrofisica.

Si pensa che l'universo, nei primi stadi della sua esistenza, abbia attraversato fasi nelle quali la temperatura e la densità di materia erano molti ordini di grandezza superiori ai valori dell'universo odierno, e gli urti a energie relativistiche fra ioni pesanti permettono, in parte e su scala molto ridotta, di riprodurre in laboratorio alcune delle condizioni che hanno caratterizzato la materia in quella fase.

Per energie d'eccitazione al di sopra della soglia di produzione di particelle un nucleo non mostra stati discreti ma soltanto uno spettro continuo. Nella regione di transizione al di sotto o appena sopra la soglia di produzione, vi sono moltissime risonanze strette, che però non danno alcuna informazione strutturale sul nucleo stesso. Quanto un nucleo mostra in queste condizioni viene detto *caos quantistico*.

Lo studio di un nucleo in questi ambiti coinvolge, come detto, metodi statistici, e a questo scopo si comincia con l'introdurre il concetto di *temperatura nucleare*.

Si consideri ad esempio la fissione spontanea del ^{252}Cf , con una vita media di 2.6 anni e il 3.1 % di probabilità di decadere per fissione spontanea. È ragionevole immaginare che durante la fase di separazione fra i due frammenti si attui una sorta di *attrito* fra essi, per cui non tutta l'energia disponibile per il processo di fissione si converte in energia cinetica dei frammenti. Una parte va ad incrementare l'energia interna di questi e quindi li *scalda*.

Il successivo processo di raffreddamento dei frammenti di fissione è schema-

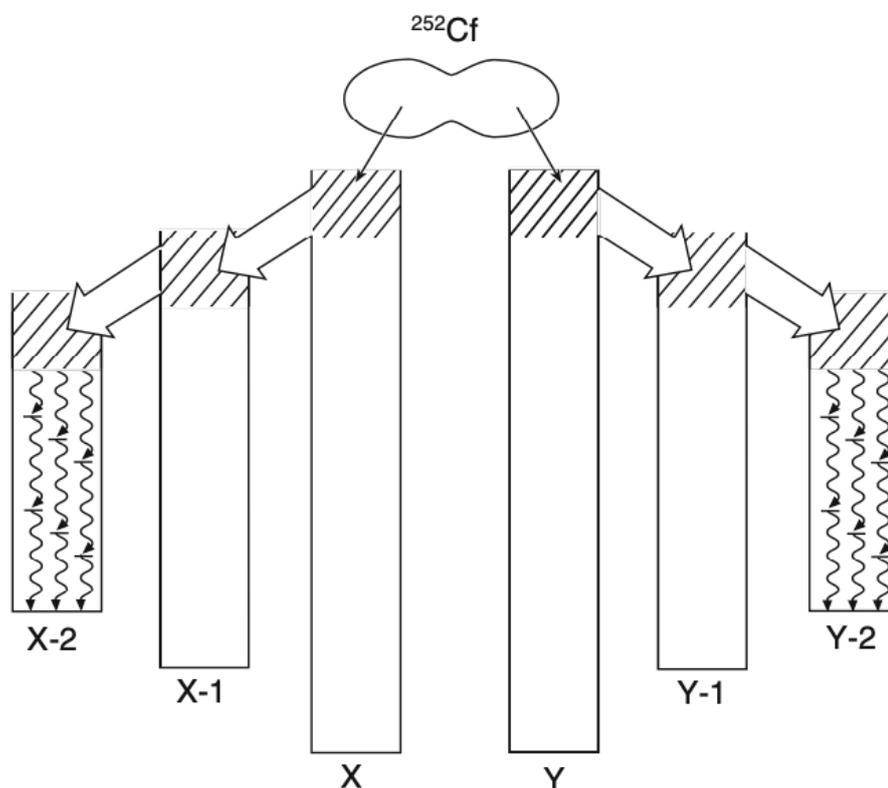


Figura 10.1: Schema del processo di raffreddamento dei frammenti di fissione del ^{252}Cf . Il nucleo genitore si spezza in due frammenti con numeri di massa X ed Y , che si raffreddano emettendo dapprima neutroni e quindi fotoni.

tizzato in figura [10.1](#)

Esso inizia con l'emissione di neutroni lenti, tipicamente 4 con un'energia cinetica media di 2.1 MeV ognuno. Quando i frammenti si sono raffreddati al di sotto della soglia di emissione di neutroni, possono ulteriormente raffreddarsi solo emettendo fotoni.

Lo spettro energetico dei neutroni emessi ha una tipica forma *evaporativa* e

può quindi essere descritto da una distribuzione di Maxwell

$$N_n(E_n) \sim \sqrt{E_n} e^{-E_n/kT} \quad (10.3)$$

come mostrato in figura 10.2 a meno del fattore $\sqrt{E_n}$ di normalizzazione. La discesa esponenziale dello spettro è caratterizzata dalla temperatura T

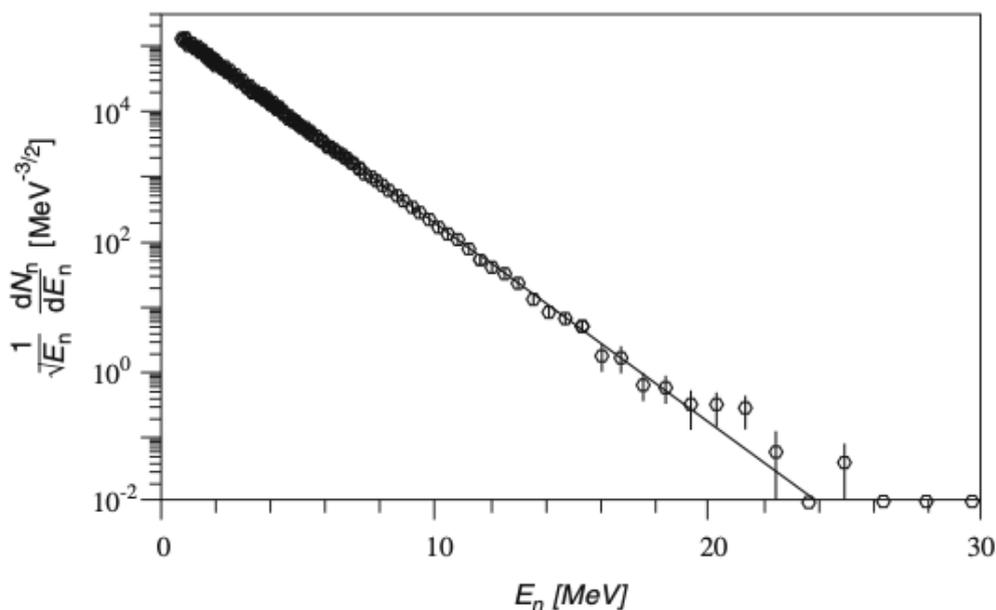


Figura 10.2: Spettro in energia dei neutroni emessi nella fissione spontanea del ^{252}Cf . La linea continua rappresenta il fit con la distribuzione maxwelliana.

del sistema, che in questo caso dà $kT = 1.41$ MeV. Si trova che frammenti di fissione emessi da nuclei diversi hanno anche diverse temperature, come ad esempio per ^{236}U , con $kT = 1.29$ MeV.

In figura 10.3 gli spettri dei fotoni emessi durante la diseccitazione dei frammenti di fissione. In questo caso ogni fissione spontanea produce in media 20 fotoni, l'80% dei quali ha energie inferiori a 1 MeV. Si noti anche in questo caso la forte rassomiglianza con un tipico spettro evaporativo. La forte pendenza dello spettro d'emissione dei fotoni, rispetto a quello d'emissione dei neutroni, indica che nella fase d'emissione di fotoni, che ha luogo in condizioni di minor eccitazione nucleare, la temperatura del sistema è significativamente inferiore.

Il successo nell'interpretazione dei due spettri di neutroni e fotoni emessi in conseguenza della fissione testimonia della ragionevolezza dell'approccio statistico seguito. La forma osservata per gli spettri si può dunque derivare dallo studio statistico della densità degli stati di un gas di Fermi degenere.

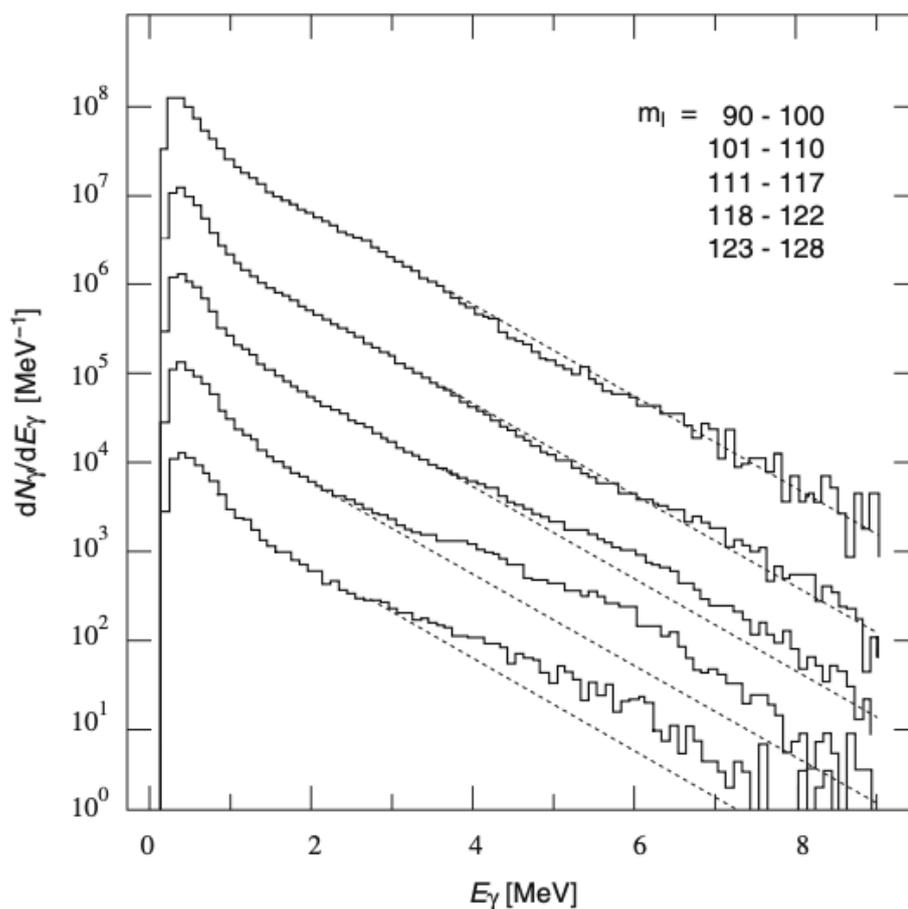


Figura 10.3: Spettri energetici per l'emissione di fotoni nella fissione spontanea del ^{252}Cf . I diversi spettri corrispondono, dall'alto verso il basso, ai diversi gruppi di numeri di massa m_l dei prodotti di fissione. Le linee tratteggiate sono ottenute da fit con funzioni esponenziali.

10.2 Fasi della materia nucleare

La transizione di fase liquido-vapore

Si è constatato che le reazioni periferiche fra ioni pesanti sono molto efficaci per *riscaldare* i nuclei in modo controllato. In un'interazione *radente* fra due nuclei, come schematizzato in figura [10.4](#), si producono due frammenti principali che si sono *riscaldati* per effetto dell'*attrito* sviluppatosi durante la reazione. Con questo tipo di reazioni si riescono a misurare piuttosto bene sia la temperatura dei frammenti che l'energia fornita al sistema. La temperatura dei frammenti viene solitamente desunta dalle distribuzioni maxwelliane dei prodotti di decadimento mentre l'energia totale fornita al

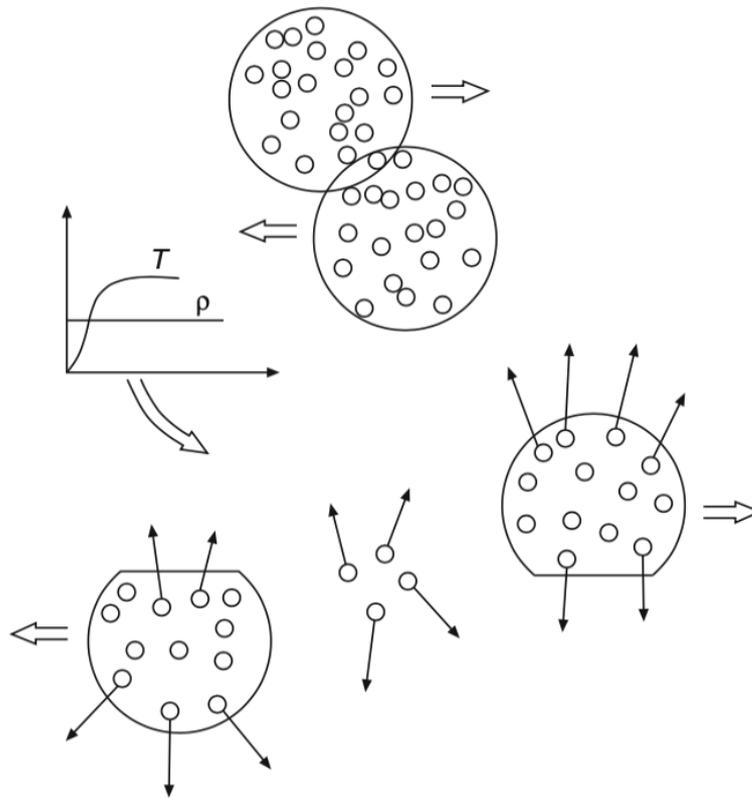


Figura 10.4: Schematizzazione di un urto periferico fra due nuclei osservato nel sistema CM. Il diagramma descrive l'evoluzione temporale della densità ρ e della temperatura T dei frammenti durante l'urto.

sistema si determina dalla rivelazione di tutte le particelle prodotte nello stato finale.

Il frammento principale proveniente dal proiettile si muove sostanzialmente negli stessi direzione e verso del proiettile, e anche i suoi prodotti di decadimento si muovono nello stesso modo e possono quindi essere cinematicamente distinti sia dai prodotti di decadimento del frammento bersaglio che dai nucleoni di evaporazione emessi durante l'interazione radente. Si possono così separare e distinguere i contributi energetici trasportati dai frammenti, dall'energia persa per *attrito* durante l'interazione radente.

Si prenda come esempio un esperimento in cui nuclei di Au con energia di 600 MeV/nucleone sono stati fatti incidere contro un bersaglio solidale col sistema del laboratorio, anch'esso d'oro. I prodotti di reazione sono stati tracciati grazie ad un rivelatore che copriva pressochè l'intero angolo solido attorno al bersaglio, un cosiddetto rivelatore a 4π .

In figura [10.5](#) è mostrata la dipendenza misurata della temperatura dei

frammenti rivelati dall'energia fornita al sistema. Si noti come per energie d'eccitazione E/A fino a circa 3 MeV/nucleone si osserva una rapida crescita della temperatura. Nella regione per valori di E/A compresi fra circa 3 MeV/nucleone e 10 MeV/nucleone, la temperatura sembra mantenersi sostanzialmente costante, per poi ricominciare a crescere rapidamente per valori superiori a 10 MeV/nucleone. Questo comportamento ricorda il

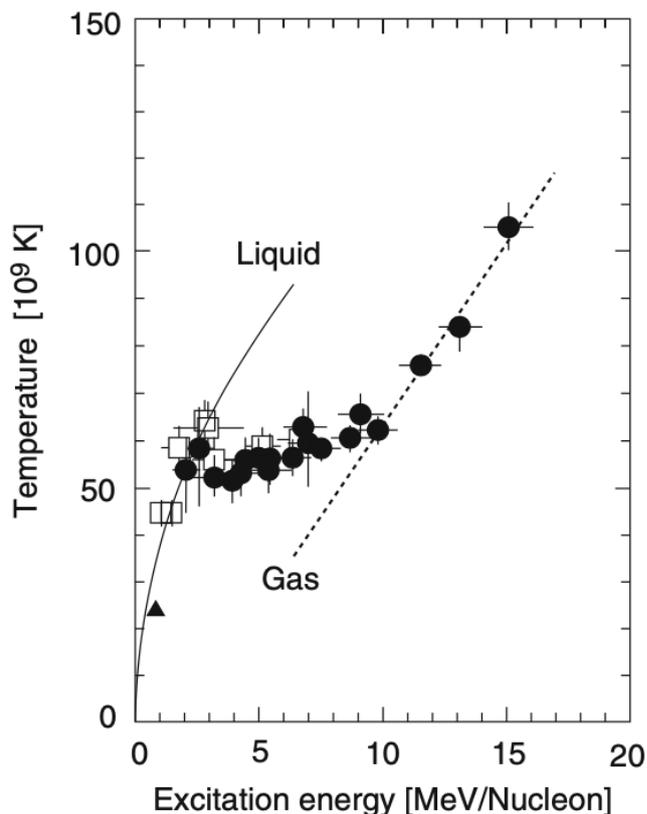


Figura 10.5: Temperatura dei frammenti in un urto periferico fra due nuclei di ^{197}Au in funzione dell'energia d'eccitazione per nucleone.

processo di evaporazione dell'acqua in prossimità del punto di ebollizione, durante la transizione di fase da liquido a vapore, con la temperatura che resta costante mentre viene fornita energia al sistema finché l'intera quantità di liquido non si è convertita in vapore. Sembra quindi naturale interpretare anche in questo caso la descritta dipendenza della temperatura del sistema dall'energia fornitagli come una *transizione di fase della materia nucleare* dallo stato liquido a quello di vapore-equivalente.

I concetti utilizzati per descrivere il fenomeno sono presi a prestito dalla termodinamica dei sistemi in equilibrio, ovvero termalizzati. In questo spirito si potrebbe quindi dire che una volta raggiunta una temperatura equivalen-

te a $kT \sim 3$ MeV, si forma attorno al nucleo uno strato di nucleoni in fase *vapore/gas* che però non sfugge ma resta in una condizione d'equilibrio con la parte ancora più coesa del nucleo, scambiando con essa nucleoni. Tale gas di nucleoni potrà essere ulteriormente riscaldato soltanto quando tutto il liquido nucleonico sarà nella condizione di *vapore/gas*.

Materia adronica

Per investigare gli urti fra ioni pesanti a piccolo parametro d'impatto, ovvero quelli che si dicono *urti centrali*, si possono ad esempio selezionare gli eventi che presentano un grande numero di pioni carichi e neutri fra i prodotti di reazione, come illustrato in figura 10.6. Considerando ad esempio sempre le interazioni $^{197}\text{Au} + ^{197}\text{Au}$, si può pensare a energie dell'ordine o maggiori a 10 GeV/nucleone che danno luogo alla produzione di cospicue quantità di pioni.

A queste energie, l'eccitazione nucleonica che porta alla formazione di una Δ , $N + N \rightarrow \Delta + N$, ha una sezione d'urto di formazione $\sigma = 40$ mb; la corrispondente *lunghezza d'interazione* $\lambda \approx 1/\sigma\rho_N$ nel nucleo è dell'ordine di 1 fm. Questo significa che durante un urto fra ioni pesanti hanno luogo urti multipli e che per energie sufficientemente elevate ogni nucleone coinvolto nell'urto sarà eccitato in media almeno una volta allo stato di barione Δ . Da un punto di vista termodinamico ciò equivale all'apertura di un nuovo grado di libertà. I barioni Δ decadono rapidamente ma vengono continuamente riformati tramite la reazione inversa $\pi + N \rightarrow \Delta$. Creazione e decadimento, $\pi + N \leftrightarrow \Delta$, raggiungono quindi una sorta di equilibrio dinamico. A questa miscela di nucleoni, barioni Δ , pioni ed eventualmente altri mesoni viene dato il nome di *materia adronica*.

I pioni, data la loro relativamente piccola massa, sono i principali responsabili degli scambi energetici entro la materia adronica. La rivelazione e lo studio di questi pioni permettono dunque di risalire alla densità d'energia e alla temperatura della materia adronica prodotta con l'urto fra due ioni. La temperatura viene solitamente desunta dalle distribuzioni energetiche dei pioni emessi ortogonalmente rispetto alla direzione del fascio, o dei fasci in caso di collider. Il loro spettro energetico mostra l'andamento esponenziale atteso di una distribuzione di Boltzman

$$\frac{dN}{dE_{kin}} \propto e^{-E_{kin}/kT} \quad (10.4)$$

con E_{kin} l'energia cinetica del pione. Sperimentalmente si trova che le temperature della *radiazione pionica* non superano mai $kT \simeq 150$ MeV, indipendentemente da quanto crescano le energie dei nuclei collidenti. Una spiegazione di ciò sta nel fatto che la materia nucleare eccitata si espande, e questo la porta a raffreddarsi. Al di sotto di una temperatura $kT \simeq 150$ MeV la probabilità di interazioni adroniche per i pioni, e quindi degli scambi

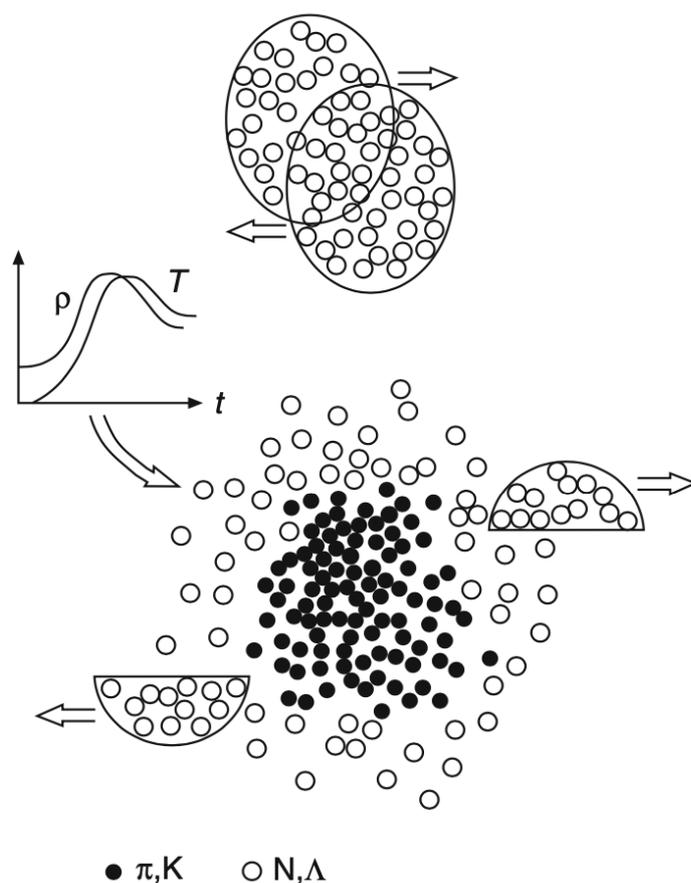


Figura 10.6: Urto centrale fra due nuclei pesanti ad alta energia. Si noti lo *schacciamento* trasversale dei nuclei che riflette la contrazione relativistica delle lunghezze. Le curve mostrano l'incremento di densità ρ e temperatura T nella regione centrale della collisione.

energetici fra essi e le altre particelle presenti, decresce rapidamente. Questo processo viene detto *freezing out* pionico.

Diagramma di fase della materia nucleare

Le varie fasi in cui si può trovare la materia nucleare sono riassunte in figura [10.7](#). Per chiarirne il significato si può fare il parallelo con un diagramma di fase per la materia ordinaria, intesa come composta da atomi e molecole. I nuclei allo stato fondamentale sono freddi, con densità ρ_N e temperatura $kT = 0$. Una stella ai neutroni ha anch'essa temperatura $kT = 0$, ma densità da ~ 5 a 10 volte superiore a quella dei nuclei standard. Se si fornisce gradualmente energia ad un nucleo esso comincia a scaldarsi

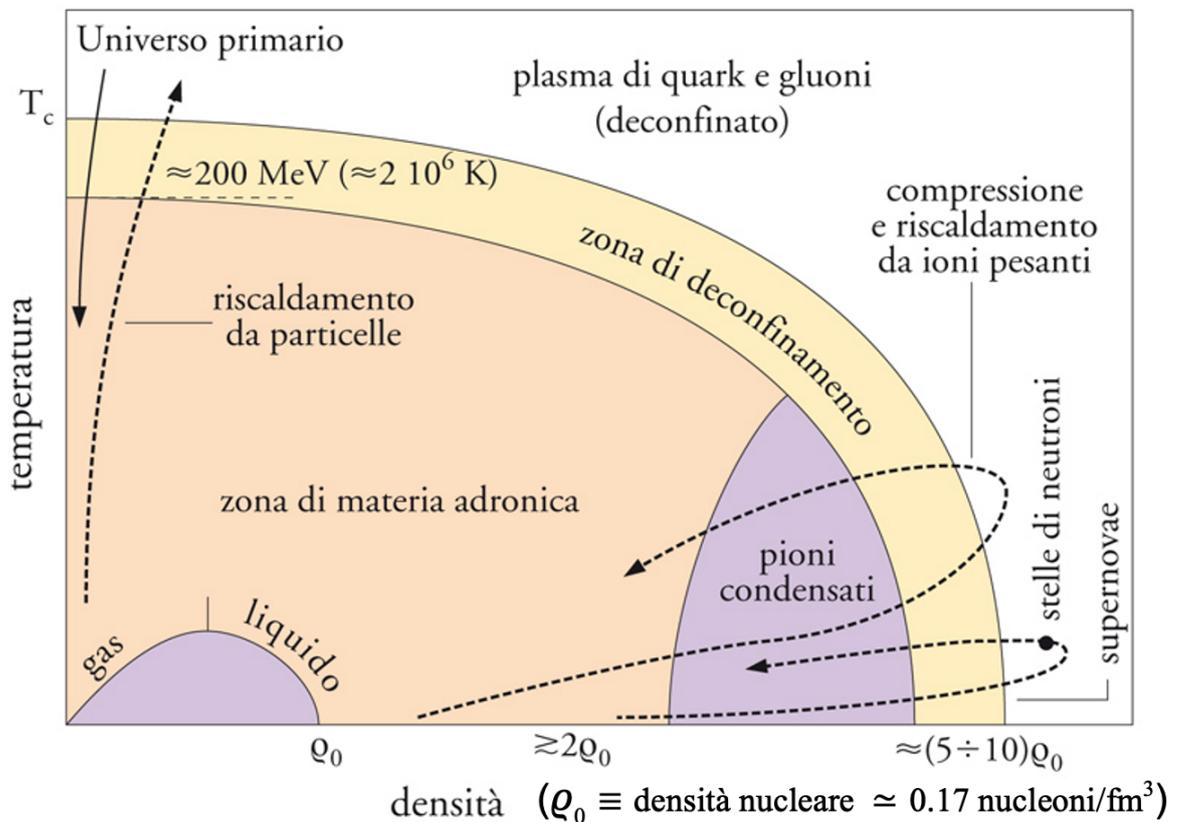


Figura 10.7: Diagramma di fase della materia nucleare.

ed emette quindi nucleoni o piccoli cluster di nucleoni, quali particelle α , similmente a come una goccia di liquido evapora atomi o molecole. Con la materia ordinaria, se la si confina e nel contempo si accresce l'ammontare di energia fornita, ciò porta all'eccitazione di gradi di libertà interni, quali eccitazioni rotazionali o vibrazionali. Nei nuclei i nucleoni possono essere eccitati come risonanze $\Delta(1, 232)$ o stati eccitati di energie ancora superiori. Il miscuglio di nucleoni, pioni e altro che consegue ai decadimenti è la cosiddetta *materia adronica*.

Quark-Gluon plasma

Il processo di dissociazione completa di un atomo nel suo nucleo e i suoi elettroni, che dà luogo al *plasma atomico*, ha un equivalente nella completa dissociazione dei nucleoni e pioni di un nucleo in quark e gluoni, quello che viene detto *quark-gluon plasma* o QGP. Qualitativamente il posizionamento della zona di transizione di fase corrispondente nel diagramma di fase temperatura-densità può essere capito ragionando come segue.

Nelle condizioni di densità nucleare standard ogni nucleone ha a disposizione

un volume di $\sim 6 \text{ fm}^3$, di cui ne occupa col proprio volume circa $1/3$. Se si immagina di comprimere un nucleo senza riscaldarlo ($T = 0$) fino ad alcune volte la sua densità standard, i singoli nucleoni che lo costituiscono tendono a sovrapporsi l'un l'altro perdendo gradualmente la propria individualità. A questo punto quark e gluoni dovrebbero muoversi in modo sostanzialmente libero nell'intero volume comune costituitosi.

Ma si può immaginare anche di seguire un altro percorso nel diagramma di fase, partendo dalla materia nucleare standard e seguendo una via sostanzialmente parallela all'asse verticale delle temperature, accrescendo di fatto la temperatura senza però modificare la densità. In tal caso, raggiunta una temperatura $kT \approx 200 \text{ MeV}$ dovrebbe risultare disponibile per ogni interazione nucleone-nucleone un'energia sufficiente, per effetto della produzione di pioni, ad accrescere la densità adronica e la frequenza delle mutue collisioni fra essi tanto da rendere impossibile l'assegnare un quark o un gluone ad uno specifico adrone.

Lo stato raggiunto in questo caso è detto *quark-gluon plasma*.

Stelle di neutroni

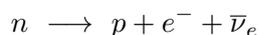
Partendo dal modello a gas di Fermi si può capire l'esotica condizione della materia nucleare che costituisce le cosiddette *stelle di neutroni* per descrivere le quali si trascura l'energia coulombiana. Oltre alla forza d'attrazione nucleare, che conduce ad una densità di materia ρ_0 , in esse agisce fortemente l'attrazione gravitazionale, che porta la loro densità a valori fino a un ordine di grandezza superiore.

Le stelle ai neutroni vengo prodotte come risultato dell'esplosione di una supernova. Quando il *bruciamento nucleare* della materia nella parte centrale della stella ha raggiunto il livello del ferro, se la massa è compresa fra una e due masse solari, allora collassa sotto l'effetto della forza gravitazionale.

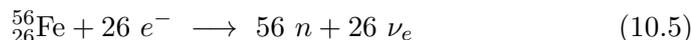
L'aumento della densità accresce a tal punto l'energia di Fermi degli elettroni presenti che si sviluppa e cresce il processo di decadimento β inverso



mentre invece il decadimento β dei neutroni



risulta proibito dal principio d'esclusione di Pauli. I protoni dei nuclei atomici vengono trasformati tutti, uno dopo l'altro, in neutroni. Ciò porta alla scomparsa della barriera coulombiana, i nuclei perdono la loro identità e l'interno della stella risulta infine composto da soli neutroni



Ciò che ferma l'implosione è la pressione di Fermi dei neutroni quando raggiungono una densità pari a circa 10^{18} kg/m^3 . Se la massa fosse superiore a

due masse solari la pressione di Fermi non sarebbe sufficiente a contrastare l'attrazione gravitazionale e fermare l'implosione e si avrebbe la formazione di un buco nero.

Le stelle di neutroni più note hanno masse M comprese fra 1.3 e 1.5 masse solari che possono essere stimate quando la stella di neutroni è parte di un sistema binario di cui si può studiare il moto. Il raggio R può essere misurato se vi è sufficiente emissione elettromagnetica unitamente a un osservabile spostamento Doppler, che è proporzionale ad M/R . I raggi trovati sono tipicamente dell'ordine della decina di km.

Per quanto concerne l'interno delle stelle di neutroni si posseggono soltanto cognizioni di tipo teorico. Secondo il modello più semplice la parte interna del core della stella è composto da un liquido di neutroni degeneri a densità costante. Quella che può essere grosso modo definita una crosta superficiale della stella dello spessore di circa un km è costituita da atomi che nonostante l'alta temperatura, sono legati da una forte pressione gravitazionale a formare una struttura solida. Si può dunque considerare una buona approssimazione quella che vede la stella di neutroni come un gigantesco nucleo tenuto assieme dalle proprie forze gravitazionali.

Supponendo costante la densità della stella si può trascurare qualsiasi dipendenza radiale della pressione gravitazionale e utilizzare una pressione efficace media. Si consideri una tipica stella di neutroni di massa $M = 3 \times 10^{30}$ kg, ovvero 1.5 masse solari, corrispondenti a circa $N = 1.8 \times 10^{57}$ neutroni. Considerando la stella di neutroni alla stregua di un gas neutronico freddo, l'impulso di Fermi è

$$p_F = \left(\frac{9\pi N}{4} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{R} \quad (10.6)$$

e l'energia cinetica media per neutrone

$$\langle E_k/N \rangle = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M_n} = \frac{C}{R^2}, \quad \text{con } C = \frac{3\hbar^2}{10M_n} \left(\frac{9\pi N}{4} \right)^{2/3} \quad (10.7)$$

dove M_n è la massa del neutrone.

L'energia gravitazionale di una stella a densità costante implica un'energia potenziale media per neutrone pari a

$$\langle E_p/N \rangle = -\frac{3}{5} \frac{GNM_n^2}{R} \quad (10.8)$$

con G la costante di gravitazione universale. La stella sarà in equilibrio in corrispondenza al valore minimo dell'energia totale per nucleone, ovvero quando

$$\frac{d}{dR} \langle E/N \rangle = \frac{d}{dR} [\langle E_k/N \rangle + \langle E_p/N \rangle] = 0 \quad (10.9)$$

da cui

$$R = \frac{\hbar^2 (9\pi/4)^{2/3}}{GM_n^3 N^{1/3}} \quad (10.10)$$

Si trovano così, per una stella di neutroni di questa massa, un raggio di circa 12 km, molto prossimo al valore misurato, e una densità di 0.25 nucleoni/fm³, pari a circa 1.5 volte la densità della materia nucleare standard $\rho_0 = 0.17$ nucleoni/fm³.

Un calcolo più preciso dovrebbe tener conto della non costanza della densità nel volume della stella di neutroni, nelle parti più interne della quale la densità può infatti essere sino a $10\rho_0$. In queste condizioni lo spazio fra neutrone e neutrone scende a circa 0.8 fm, per cui i *cori* dei nucleoni cominciano ad entrare a contatto sviluppando una forte repulsione mutua. Si può dunque affermare che la pressione gravitazionale è in tal caso in ugual misura compensata dall'azione combinata della pressione di Fermi e della mutua repulsione nucleone-nucleone.

Ci si può aspettare che in queste condizioni di grande densità la materia stellare consista in una miscela di *iperoni* in equilibrio con i neutroni, e anche che data l'estrema vicinanza fra i quark costituenti dei nucleoni presenti, questi perdano la loro individualità e che di conseguenza la parte più interna di una stella di neutroni sia parzialmente composta da *materia quarkonica*.

Capitolo 11

La forza nucleare

L'esistenza di nuclei stabili implica che l'interazione nucleone-nucleone è attrattiva e più intensa di quella coulombiana, anche se non può mantenersi attrattiva a qualunque distanza, altrimenti i nuclei collasrebbero su loro stessi; ciò suggerisce la presenza di un *core* repulsivo a brevi distanze. Questo *core* può essere ignorato quando le interazioni coinvolgenti nuclei avvengono a basse energie. Inoltre, nel limite non relativistico, l'interazione nucleare è indipendente dalle velocità delle particelle interagenti e può essere descritta mediante un potenziale.

All'ordine più basso il potenziale può essere rappresentato da un termine centrale dominante, dipendente esclusivamente dalla separazione radiale fra le particelle coinvolte, assieme a un piccolo contributo di tipo non-centrale che trova una sua prima giustificazione nella presenza di un momento di quadrupolo elettrico non nullo per il deutone, dipendente dall'orientazione relativa fra spin totale e raggio vettore delle particelle che lo compongono. Le forze nucleari mostrano *saturazione*, evidenziata nella forma dell'andamento dell'energia media di legame (figura 2.1), quindi ogni nucleone di un nucleo ha interazioni attrattive solo con un numero limitato di altri nucleoni a lui vicini, per effetto del breve raggio d'azione delle forze nucleari.

Anche dagli esperimenti sull'interazione nucleone-nucleone si deduce che essa è a range breve, ma comunque dell'ordine di grandezza delle dimensioni nucleari, per cui non può essere imputata allo scambio diretto di gluoni, come avviene per la forza forte fra quark, dato il confinamento del colore.

Il confronto fra i dati della diffusione n-n e p-p, tenuto conto dell'interazione coulombiana, mostra che la forza nucleare gode della *simmetria di carica* ed è quindi sostanzialmente indipendente dalla carica elettrica ($p-p \equiv n-n \equiv p-n$), come detto nel paragrafo 3.2.8.

Una caratteristica delle forze nucleari è poi che il potenziale non dipende solo dalla distanza fra le particelle interagenti ma anche dall'orientazione relativa dei loro spin, come mostrato da esperimenti di diffusione di neutroni lenti su idrogeno molecolare.

Anche gli studi sul deutone hanno evidenziato una dipendenza dallo spin delle forze nucleari: la forza fra protone e neutrone in uno stato di spin totale 1 (spin paralleli), è infatti abbastanza intensa da permettere il debole legame che garantisce l'esistenza del deutone, mentre il potenziale per lo stato con spin totale 0 (spin anti-paralleli) non contempla stati legati.

I risultati sperimentali sulla diffusione di nucleoni ad alta energia evidenziano per le forze nucleari anche *caratteri di scambio*, ovvero i nucleoni, interagendo, possono scambiarsi determinate proprietà quali coordinate spaziali, spin, cariche.

Infine la polarizzazione riscontrata nelle particelle diffuse dall'interazione su nuclei indica che nell'interazione nucleare giocano un ruolo anche contributi di spin-orbita.

Nel 1935 Yukawa introdusse la teoria di campo mesonica. Comunque neppure i suoi successivi sviluppi permettono, anche ricorrendo ai diversi mesoni nel frattempo individuati, di capire appieno come agisca l'interazione nucleare, racchiudendone tutte le caratteristiche in un potenziale univoco. Quel che si è finora ottenuto è la formulazione di potenziali fenomenologici, che spesso ben permettono di riprodurre molti dati sperimentali ricorrendo a termini associati alle caratteristiche sopra indicate, desumibili dai dati sperimentali.

11.1 La diffusione nucleone-nucleone

Come visto trattando della diffusione da potenziale nucleare, la diffusione nucleone-nucleone (N-N) alle basse energie, al di sotto della soglia di produzione del pione, è un fenomeno praticamente elastico che può essere descritto senza ricorrere alla meccanica quantistica relativistica. I nucleoni sono visti come oggetti puntiformi privi di struttura interna ma dotati di spin e isospin. Per descrivere i processi d'interazione in questo contesto ci si può riferire a un opportuno potenziale.

I numerosissimi risultati sperimentali¹, ottenuti anche utilizzando fasci e/o bersagli polarizzati, mostrano che in un sistema di due nucleoni la forza nucleare dipende effettivamente sia dallo spin che dallo spin isotopico.

Considerando la diffusione N-N nel caso in cui gli spin fra proiettile e bersaglio siano paralleli o antiparalleli, ma ortogonali al piano di diffusione², si riescono a isolare i contributi di tripletto e di singoletto all'interazione. Se gli spin dei nucleoni coinvolti sono paralleli lo spin totale deve essere 1, se

¹Per un articolo di rassegna sull'interazione N-N si vedano ad esempio: R. Machleidt and I. Slaus, "The nucleon-nucleon interaction" - J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 27 (2001) R69, e la bibliografia associata.

²Il piano di diffusione corrisponde a quello contenente sia la retta che rappresenta l'asse del fascio incidente che la retta passante dal punto in cui avviene l'urto e diretta verso l'osservatore.

sono antiparalleli risultano possibili sia contributi da stati con spin totale pari a 0 che pari ad 1.

Passando all'isospin, nella diffusione protone-protone si ottiene il solo stato di tripletto con isospin 1, in quanto il protone ha $I_3 = +1/2$; nella diffusione protone-neutrone si hanno sia il contributo di singoletto che quello di tripletto.

Sfasamenti

Ricordando quanto detto in merito alla diffusione in onde parziali (7.5), si consideri un nucleone proveniente da distanza infinita, con energia cinetica E e impulso \mathbf{p} , che diffonde sul potenziale di un altro nucleone. Si descriva il nucleone incidente con un'onda piana e quello uscente, fino a certi valori di E , con un'onda sferica. La sezione d'urto dipende dallo sfasamento fra queste due onde.

Per stati con definiti valori di spin e isospin, la sezione d'urto per la diffusione nucleone-nucleone in un elemento d'angolo solido $d\Omega$ è data dal modulo quadro dell'ampiezza di diffusione $f(\vartheta)$ della reazione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2 \quad (11.1)$$

Per diffusione su un potenziale a breve raggio d'azione si descrive l'ampiezza di diffusione *decomponendo in onde parziali*, con l'onda diffusa espansa in termini di valori fissati del momento angolare ℓ . Per diffusione elastica, ponendosi a grandi distanze r dal centro di diffusione, si ha

$$f(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell} \text{sen}\delta_\ell P_\ell(\cos\vartheta) \quad (11.2)$$

con

$$k = \frac{1}{\lambda} = \frac{|\mathbf{p}|}{\hbar} = \frac{\sqrt{2ME}}{\hbar} \quad (11.3)$$

il numero d'onda del nucleone diffuso di massa M ed energia cinetica E , δ_ℓ lo sfasamento angolare e P_ℓ l'autofunzione del momento angolare coincidente con un polinomio di Legendre di ordine ℓ . Lo sfasamento δ_ℓ rappresenta la differenza di fase fra onda incidente originale e onda diffusa. Questi termini contengono l'informazione su forma e intensità del potenziale e la dipendenza dall'energia della sezione d'urto.

La conservazione del flusso di particelle caratterizzante la diffusione elastica considerata fa sì che il termine di sfasamento δ_ℓ contribuisca anche all'ampiezza tramite il termine $\text{sen}\delta_\ell$. Ciò viene anche detto *unitarietà*. La decomposizione in onde parziali risulta particolarmente utile per le basse energie poichè in tal caso contribuiscono significativamente soltanto pochi termini dell'espansione, dato che per un potenziale con raggio d'azione a si

ha

$$\ell \leq \frac{|\mathbf{p}| a}{\hbar} = \frac{k}{\hbar} \quad (11.4)$$

Lo sfasamento δ_0 per $\ell = 0$, ovvero in onda "s", è fondamentale per il legame nucleare. Dalla [11.4](#) si deduce che per impulsi relativi inferiori a 100 MeV/c, l'onda "s" domina per la diffusione protone-protone, in cui il range d'interazione è dell'ordine di 2 fm; il polinomio di Legendre vale $P_0 = 1$ e non c'è quindi dipendenza da ϑ .

In figura [11.1](#) sono riportati i valori misurati dello sfasamento δ_0 per la diffusione nucleone-nucleone, separatamente per i casi di tripletto e singoletto

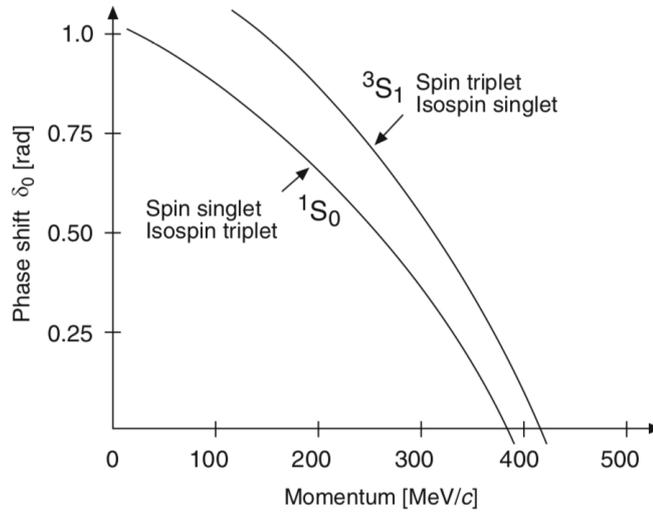


Figura 11.1: Valori sperimentali dello sfasamento δ_0 per l'interazione nucleone-nucleone, nel caso di tripletto e di singoletto di spin, in funzione dell'impulso relativo dei nucleoni interagenti.

di spin, rispetto all'impulso disponibile nel sistema del CM.

Lo sfasamento δ_0 risulta positivo per impulsi inferiori a circa 400 MeV/c, negativo per valori superiori. Se ne deduce, confermando quanto già visto per altre vie, che l'interazione nucleare ha carattere repulsivo a brevissimo raggio d'interazione, e natura attrattiva a più grandi distanze.

Se infatti si considera una funzione d'onda $\psi(\mathbf{x})$ a simmetria sferica, la si può decomporre in un opportuno prodotto di cui si consideri il fattore radiale espresso dalla funzione $u(r) = r \psi(r)$, che obbedisce all'equazione di Schrödinger

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m(E - V)}{\hbar^2} u(r) = 0 \quad (11.5)$$

Risolvendo la [11.5](#) per un potenziale repulsivo rettangolare $V \rightarrow \infty$ con raggio d'azione b si trova

$$\delta_0 = -kb \quad (11.6)$$

Lo sfasamento è quindi negativo e proporzionale al raggio d'azione del potenziale; ciò significa che l'onda diffusa è in ritardo di fase rispetto a quella

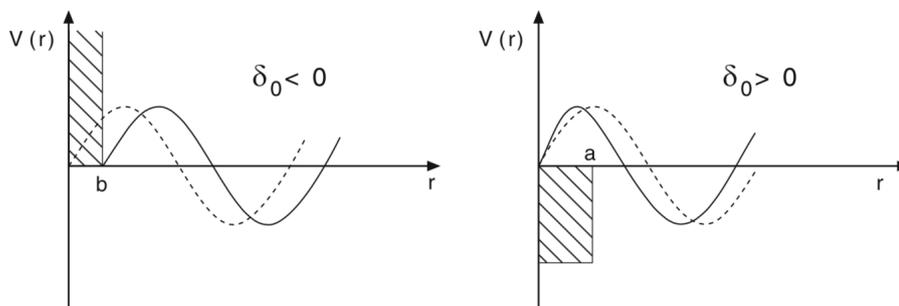


Figura 11.2: Potenziale repulsivo $V \rightarrow \infty$ con raggio d'azione b , a sinistra, e potenziale attrattivo con raggio d'azione a , a destra. Tratteggiate le onde non diffuse, per confronto.

non diffusa.

Per un potenziale attrattivo con raggio d'azione a invece, l'onda diffusa è in anticipo di fase rispetto a quella non diffusa e $\delta_0 > 0$. L'espressione completa per lo sfasamento è data da

$$\delta_0 = \arctg \left(\sqrt{\frac{E}{E + |V|}} \operatorname{tg} \frac{a\sqrt{2mc^2(E + |V|)}}{\hbar c} \right) - \frac{a\sqrt{2mc^2E}}{\hbar c} \quad (11.7)$$

Lo sfasamento è quindi positivo e decresce al crescere dell'impulso.

Sovrapponendo lo sfasamento associato a un potenziale repulsivo a breve raggio d'azione con quello di un potenziale attrattivo a un maggior raggio d'azione si ottiene quanto illustrato in figura 11.3, dove appunto lo sfasamento effettivo cambia segno così come osservato sperimentalmente.

La relazione fra δ_0 e il potenziale diffusore V è contenuta nelle espressioni 11.6 e 11.7, visto che nella regione in cui agisce il potenziale, il numero d'onda k dipende dalla forma e dall'entità di quest'ultimo, oltre che dall'energia cinetica E del proiettile.

Un'analisi completa degli sfasamenti conduce al potenziale mostrato in figura 11.4, che descrive un potenziale con un core fortemente repulsivo a breve raggio che diviene rapidamente attrattivo a poco meno di 1 fm, mantenendosi tale ma riducendo enormemente la propria intensità già a circa 2 fm.

Il potenziale nucleone-nucleone

Riportiamo ora, senza dedurla, la forma generale di un potenziale fenomenologico nucleone-nucleone, ottenibile da opportune considerazioni su quantità dinamicamente rilevanti e tenendo conto dei risultati sperimentali. Si trascura la struttura interna dei nucleoni e di conseguenza è chiaro che il potenziale

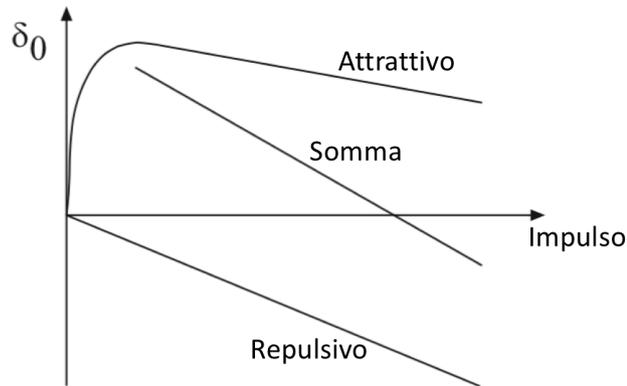


Figura 11.3: Sfasamento risultante dalla sovrapposizione degli effetti di un potenziale repulsivo a breve raggio e di uno attrattivo a raggio più ampio.

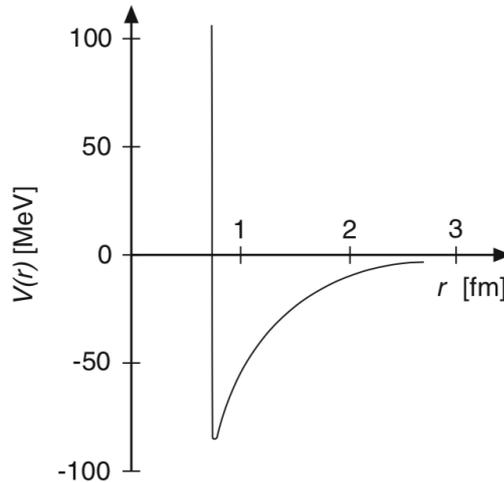


Figura 11.4: Dipendenza radiale del potenziale nucleone-nucleone per $\ell = 0$. Non sono mostrati gli effetti della dipendenza da spin e isospin.

può essere considerato valido per descrivere stati legati e diffusione solo a basse energie.

Le quantità in gioco nel determinare l'interazione sono la separazione spaziale \boldsymbol{x} fra i nucleoni, il loro impulso relativo \boldsymbol{p} , il momento angolare orbitale totale \boldsymbol{L} e le orientazioni relative fra gli spin \boldsymbol{s}_1 ed \boldsymbol{s}_2 di ogni coppia di nucleoni del sistema. Il potenziale deve poi essere uno scalare e per lo meno invariante per traslazioni e rotazioni. Dovrebbe inoltre risultare simmetrico rispetto allo scambio di due nucleoni.

Queste precondizioni derivano dal necessario rispetto di alcune proprietà, quale ad esempio la conservazione della parità, e pongono limitazioni alle caratteristiche dei termini scalari che possono contribuire al potenziale

stesso. In definitiva, fissati i valori di isospin, il potenziale ha la forma

$$\begin{aligned}
 V(r) = & V_0(r) + V_{ss}(r) \frac{\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2}{\hbar^2} \\
 & + V_T(r) \frac{[3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{x})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{x})/r^2] - s_1 s_2}{\hbar^2} + \frac{V_{LS}(r)(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{L}}{\hbar^2} \\
 & + \frac{V_{Ls}(r)(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{L})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{L})}{\hbar^4} + \frac{V_{ps}(r)(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{p})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{p})}{\hbar^2 m^2 c^2}
 \end{aligned} \tag{11.8}$$

V_0 è un normale potenziale centrale; il secondo termine descrive una pura interazione fra spin mentre il terzo termine, detto potenziale tensore, descrive una componente non-centrale dell'interazione. Questi ultimi due termini hanno la stessa forma dell'interazione fra due dipoli magnetici. Il termine tensoriale è particolarmente interessante in quanto mescola gli stati di momento angolare orbitale.

Il quarto termine deriva dall'interazione di spin-orbita che è a sua volta dovuta all'interazione forte.

I due ultimi termini sono compatibili con le prescrizioni di simmetria, ma essendo quadratici nell'impulso danno comunque un apporto trascurabile rispetto ai termini di spin-orbita.

Gli sforzi per determinare i valori dei termini di questi contributi al potenziale tramite fit sui dati sperimentali non hanno condotto a valori definitivamente univoci per essi; c'è comunque un generale accordo sui primi quattro. Andrebbero inoltre considerati anche contributi di interazioni a più di due corpi.

Il termine centrale del potenziale per $S = 0$ si applica alle interazioni p-p e n-n a bassa energia, ma la parte attrattiva non è abbastanza intensa da determinare la presenza di stati legati.

Per $S = 1$ invece, con il contributo dei termini tensoriale e di spin-spin, l'intensità risultante permette l'esistenza di uno stato legato, il deutone.

11.2 Sistema legato nucleone-nucleone

Per cercare di capire i nuclei si pensò di agire similmente a quanto s'era fatto per capire gli atomi, ovvero studiare al meglio il più semplice dei nuclei costituiti da più di un nucleone, il deutone, con l'intento d'avere una solida base per capire poi gli altri, via via più pesanti, sperando che il deutone potesse svolgere un ruolo simile a quello che l'atomo di idrogeno aveva svolto e svolgeva per la fisica atomica.

Non è stato così, anche dato che l'interazione nucleare non è fondamentale ma è parente alquanto complessa dell'interazione forte.

Ciò nondimeno gli sforzi profusi nello studio del deutone sono stati utili e vale la pena vederne in parte la traccia e il metodo.

11.2.1 Il deutone

Il deutone d è il più semplice fra tutti gli stati legati di nucleoni in quanto non si hanno complicazioni derivanti dall'interazione elettromagnetica (è trascurabile l'interazione puramente magnetica degli spin) e neppure dal principio d'esclusione di Pauli.

Esso è il solo nucleo con $A = 2$, non presenta stati eccitati ed è stabile con un'energia di legame $B(2, 1) = 2.22461 \pm 0.00007$ MeV, determinabile dalla misura della soglia di reazione di *foto-disintegrazione*.

I deutoni furono creati nell'universo primordiale attraverso la nucleosintesi successiva al big-bang e la loro esistenza è risultata essenziale nella formazione degli elementi più pesanti.

Il d ha spin $s_d = 1$, come determinato sperimentalmente dalla misura dell'intensità delle bande spettrali del deuterio, e parità (+) : $J^P = 1^+$. Il suo isospin è $I = 0$.

Il d ha momento di dipolo magnetico $\mu_d = (0.857406 \pm 0.000001)\mu_N$, che è quasi pari alla somma dei momenti magnetici del neutrone e del protone che lo compongono, $\mu_p + \mu_n = 0.87963 \mu_N$. Il momento μ_d può essere determinato con precisione dalla misura della deflessione di un fascio molecolare in un campo magnetico non omogeneo, come nella misura di Stern-Gerlach.

Il d ha anche un momento di quadrupolo elettrico $Q_d = 2.875 \pm 0.002$ mb, che viene misurato studiando la struttura fine dello spettro di risonanza magnetica del deuterio. Il valore di Q_d è relativamente piccolo, a confronto delle dimensioni del sistema deutone, assunto che le dimensioni lineari dello stesso siano dell'ordine di grandezza del raggio d'azione delle forze nucleari. Il piccolo valore di Q_d e la quasi additività dei momenti magnetici di n e p nel d , suggeriscono che il suo stato fondamentale abbia simmetria quasi sferica.

Siccome lo stato fondamentale di un sistema è caratterizzato da simmetria sferica nel caso di forze centrali, si desume che le forze responsabili dell'interazione nucleare fra n e p dello stato fondamentale del deutone siano *quasi centrali*.

Funzione d'onda dello stato fondamentale del deutone

I valori di spin e momento magnetico del deutone suggeriscono, per lo stato fondamentale, un moto orbitale con momento angolare $\ell = 0$ e spin paralleli ($s_d = 1$), da cui deriverebbe uno stato fondamentale di tipo $|^3S_1\rangle$. D'altronde quest'ipotesi è solo approssimativamente corretta, in quanto, contrariamente all'evidenza sperimentale, implicherebbe l'effettivo annullarsi del momento di quadrupolo elettrico, essendo nullo il valore medio di $\langle ^3S_1 | 3z^2 - r^2 | ^3S_1 \rangle$ per la simmetria sferica dell'autofunzione associata. L'autofunzione dello stato fondamentale del deutone risulta essere una miscela al 98% dello stato $|^3S_1\rangle$ e al 2% dello stato $|^3D_1\rangle$ che con $\ell = 2$ è

consistente con la parità -1^ℓ del deutone.

Dato che lo spin del deutone è pari a 1 ed esso si trova prevalentemente in uno stato con $\ell = 0$, ne consegue che gli spin dei nucleoni devono essere allineati e paralleli. La possibilità che siano allineati e antiparalleli condurrebbe a un ipotetico stato legato n-p con spin nullo, ma sperimentalmente si sa che il deutone è il solo stato legato n-p, quindi *si deduce che il potenziale che descrive l'interazione fra neutrone e protone dipende dallo spin.*

Se inoltre, come visto in precedenza, l'interazione forte non distingue fra neutroni e protoni (spin isotopico), l'inesistenza di stati legati neutrone-protone con $s = 0$ è consistente con la non esistenza di analoghi stati legati neutrone-neutrone o protone-protone con $s = 0$ ed $\ell = 0$.

Inoltre si ricorda che il principio d'esclusione implica la non esistenza di stati legati n-n o p-p con $s = 1$ ed $\ell = 0$, in quanto la funzione d'onda completa di coppie di fermioni identici deve essere antisimmetrica, ovvero se due fermioni occupano lo stesso livello $\ell = 0$ allora devono avere spin anti-paralleli. Se ne conclude quindi che l'esistenza di uno stato legato n-p e la contemporanea non-esistenza di stati legati p-p ed n-n, sono consistenti col fatto che la forza nucleare non distingue fra neutroni e protoni, ma soltanto se essa dipende dallo spin.

I risultati sperimentali sulla diffusione a bassa energia fra protone e neutrone mettono poi inequivocabilmente in evidenza che il potenziale d'interazione dipende dall'orientazione relativa fra gli spin di protone e neutrone.

Il fatto che esista lo stato con $s = 1$ e non quelli con $s = 0$, potrebbe suggerire anche che la forza nucleare sia di tipo attrattivo per $s = 1$ e repulsivo per $s = 0$, ma ciò non è corretto, la forza nucleare è attrattiva in entrambi i casi, ma solo per $s = 1$ lo è a sufficienza da generare l'esistenza di uno stato legato.

L'autofunzione dello stato fondamentale del deutone è in definitiva una miscela di due stati con uguali numeri quantici J^P

$$|\psi_d\rangle = 0.98 |^3S_1\rangle + 0.02 |^3D_1\rangle \quad (11.9)$$

che comporta una probabilità del 4% di trovare il deutone in uno stato $|^3D_1\rangle$.

Dato che le interazioni deboli non conservano la parità, sarebbe possibile una probabilità finita di trovare il deutone anche nello stato $|^3P_1\rangle$, di parità dispari, ma il valore di tale probabilità è quantitativamente trascurabile.

Si veda ora come ottenere la funzione d'onda per il sistema nello stato $|^3S_1\rangle$. L'equazione di Schrödinger è in tal caso ($t \rightarrow$ tripletto)

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V_t) u = 0 \quad (11.10)$$

con $\mu = M_p M_n / (M_p + M_n) \simeq M/2$ la massa ridotta del sistema, $u = r\psi(r)$, ed r la distanza fra i nucleoni.

Se $E < 0$, lo stato è legato con energia di legame $-E$. Risolvendo l'equazione di Schrödinger per un potenziale a buca rettangolare si ha

$$\begin{aligned} u(r) &= A \sin(k_t r), & r \leq r_0, & \text{ con } k_t = \frac{1}{\hbar} [M(E - V_t)]^{1/2} \\ u(r) &= B e^{-\gamma(r-r_0)}, & r \geq r_0, & \text{ con } \gamma = \frac{1}{\hbar} (M|E|)^{1/2} \end{aligned} \quad (11.11)$$

Imponendo la condizione di continuità in $r = r_0$ per $u(r)$ e $u'(r)$, si ha

$$\frac{u'(r_0)}{u(r_0)} = k_t \cot(k_t r_0) = -\gamma, \quad A = \frac{B(k_t^2 + \gamma^2)^{1/2}}{k_t} \quad (11.12)$$

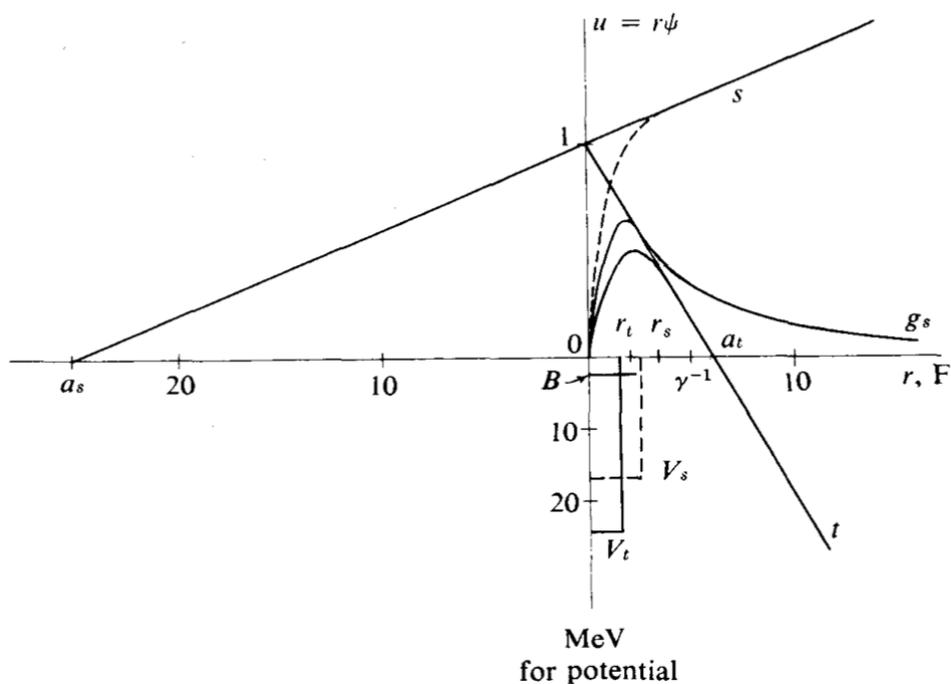


Figura 11.5: s autofunzione stato di singoletto a energia 0; t autofunzione stato di tripletto normalizzata a energia 0 con $u(0) = 1$; g_s autofunzione dello stato fondamentale, non normalizzata. $B = 2.225$ MeV; $r_t = 2.02$ fm; $V_t = -36$ MeV; $r_s = 2.60$ fm; $V_s = -14$ MeV; $\gamma^{-1} = 4.32$ fm.

Dal valore dell'energia di legame del deutone si ottiene quindi

$$\gamma = 2.32 \times 10^{12} \text{ cm}^{-1}$$

Dalla condizione di continuità si ottiene V_t noto r_0 . I dati su esperimenti d'urto $n - p$ a energie superiori al MeV forniscono un valore approssimato

per r_0 dell'ordine del fm, e similmente esperimenti di diffusione di elettroni. È ragionevole scegliere per r_0 un valore pari al doppio della lunghezza d'onda Compton del pione ($\hbar/m_\pi c \approx 2.8$ fm). Sostituendo nelle [11.11](#) si ha: $V_l = -21MeV$.

In figura [11.5](#) le autofunzioni che tengono conto di tutti i dati delle misure di bassa energia.

Dalla normalizzazione si ha

$$4\pi A^2 \int_0^{r_0} \text{sen}^2(k_r r) dr + 4\pi B^2 \int_{r_0}^{\infty} e^{-2\gamma(r-r_0)} dr = 1 \quad (11.13)$$

Con i valori indicati di r_0 e γ il secondo integrale risulta circa il doppio del primo, da cui si desume che i nucleoni costituenti un deutone trascorrono soltanto circa un terzo del loro tempo entro il raggio d'azione delle forze nucleari, essendo per il resto del tempo a una distanza mutua $> r_0$.

Approssimando drasticamente si ottiene, per la funzione d'onda normalizzata

$$u(r) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-\gamma r} \quad (11.14)$$

La quantità $1/\gamma \simeq 4.32$ fm è detta *raggio* del deutone.

Si osservi che quanto ottenuto è in gran parte indipendente dalla forma scelta (buca rettangolare) per il potenziale.

11.3 Il potenziale di Yukawa

Il primo approccio al problema della forza nucleare in termini di scambio di bosoni fu da Yukawa. Egli considerò la questione del raggio d'azione della forza nucleare da una prospettiva nuova, mutuandola dalla descrizione per le interazioni elettromagnetiche fra sorgenti del campo elettromagnetico in termini di emissione e assorbimento di fotoni γ , i bosoni mediatori dell'interazione elettromagnetica.

La propagazione dei fotoni è descritta dalle equazioni di Maxwell e avviene alla velocità c nel vuoto. Come diretta conseguenza della Relatività Ristretta il fotone è quindi definito *privo di massa*, $m_\gamma = 0$. Inoltre il potenziale coulombiano è proporzionale all'inverso della distanza dalla sorgente del campo:

$$V_C(r) \propto \frac{1}{r} \quad (11.15)$$

da cui il lungo raggio d'azione della forza associata.

Immaginando anche la forza nucleare come un tipo di interazione in cui vi sia una particella mediatrice scambiata, sempre un bosone, che possieda però una massa non nulla, Hideki Yukawa³, nel 1934, individuò per la forza

³Hideki Yukawa, "On the interaction of elementary particles I" - Proc. Phys. Math. Soc. Jap. 17 (1935) 48-57

nucleare un potenziale corrispondente della forma

$$V_Y(r) \propto \frac{e^{-\frac{mc}{\hbar} r}}{r} \quad (11.16)$$

dove m è la massa della particella mediatrice dell'interazione. Il potenziale di Yukawa, nel limite in cui $m \rightarrow 0$, tende alla forma coulombiana. È interessante leggere, in figura [11.6](#), le prime righe dell'articolo in cui Yukawa descriveva l'origine della sua idea, per poi svilupparla. Trascurando la

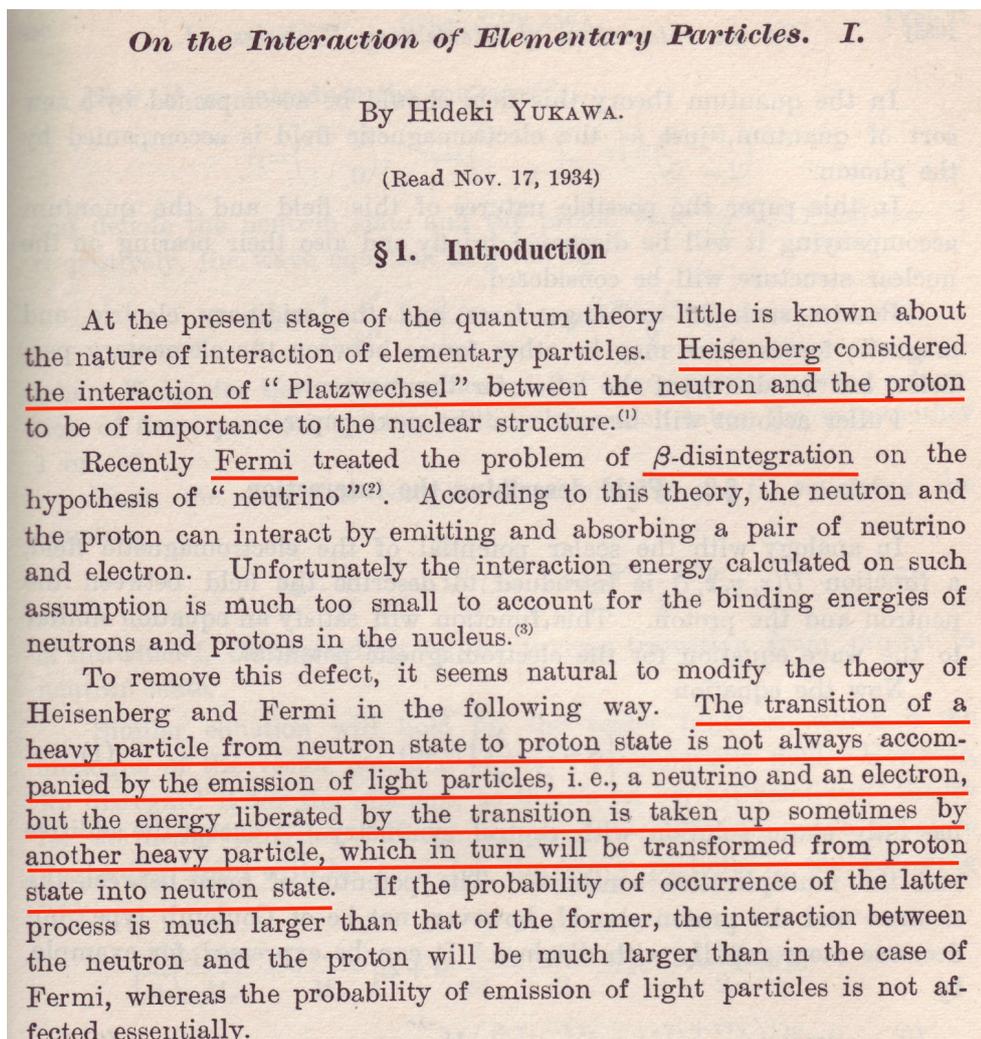


Figura 11.6: Introduzione dell'articolo di Yukawa.

dipendenza dallo spin, il che non pregiudica la comprensione di alcune fondamentali caratteristiche dell'interazione fra nucleoni, il suo ragionamento può essere così schematizzato.

Si considerino due nucleoni di massa M in quiete nel sistema del laboratorio, per cui l'energia totale del sistema fisico da loro rappresentato è pari a $2Mc^2$. Si supponga che uno dei due nucleoni emetta un bosone di massa m prendendo in qualche modo "a prestito" l'energia di massa mc^2 necessaria e conseguentemente la variazione dell'energia totale del sistema risulta non inferiore a $\Delta E = mc^2$. Questa *fluttuazione energetica* ΔE , che da un punto di vista classico violerebbe il principio di conservazione dell'energia, può aver luogo purchè la sua durata temporale sia vincolata dalla relazione di indeterminazione $\Delta E \Delta t \geq \hbar$. Quindi, come limite superiore conseguente per Δt si ottiene: $\Delta t = \hbar/(mc^2)$.

Supponendo come caso limite che il bosone sia emesso a velocità c , nell'intervallo di tempo Δt concessogli dal principio di indeterminazione può percorrere la distanza

$$a_0 = c\Delta t = \frac{\hbar}{mc} \quad (11.17)$$

che coincide con la cosiddetta *lunghezza d'onda Compton* λ del bosone di massa m e che tende ad ∞ per $m \rightarrow 0$, coerentemente col fatto che il raggio d'azione dell'interazione elettromagnetica risulti infinito. Ne consegue che i due nucleoni possono interagire se la loro distanza mutua r è inferiore ad a_0 , e non interagiscono o interagiscono debolmente se $r > a_0$, che definisce quindi il *raggio d'azione* delle forze nucleari.

Assumendo, per quanto visto in precedenza e noto dai dati sperimentali, ragionevolmente pari a circa $1.4 \cdot 10^{-15}$ m il valore di λ e quindi del raggio d'azione a_0 della forza nucleare, si ottiene per m :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\hbar}{\lambda c} \approx \frac{6.583 \times 10^{-22} \times 2.998 \times 10^8 \text{ MeV s}}{c \times 1.4 \times 10^{-15}} \frac{\text{MeV s}}{\text{m}} \approx \\ &\approx \frac{1.9736 \times 10^{-13}}{c^2 \cdot 1.410^{-15}} \text{ MeV} \approx 141 \frac{\text{MeV}}{c^2} \end{aligned} \quad (11.18)$$

Nota quindi la massa della particella mediatrice si può predire il raggio d'azione dell'interazione, e viceversa. Si noti che si è anche implicitamente fatta l'ipotesi che l'intensità dell'*accoppiamento* considerato sia la medesima fra la particella mediatrice e qualunque dei due nucleoni considerati.

Nel 1936, studiando i raggi cosmici, fu scoperto il muone μ che avendo una massa di $105.66 \text{ MeV}/c^2$, si pensò potesse essere la particella ipotizzata da Yukawa. Analizzandone il comportamento si osservò però che il muone non era sensibile all'interazione nucleare⁴ e quindi non poteva essere la particella mediatrice cercata.

Questa, chiamata pione π , fu poi effettivamente scoperta nel 1947 da C. Lattes, G. Occhialini e C. Powell analizzando, presso l'Università di Bristol, le tracce lasciate in emulsioni fotografiche dai prodotti di reazioni causate sempre da raggi cosmici.

⁴Esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni, in Appendice [G](#)

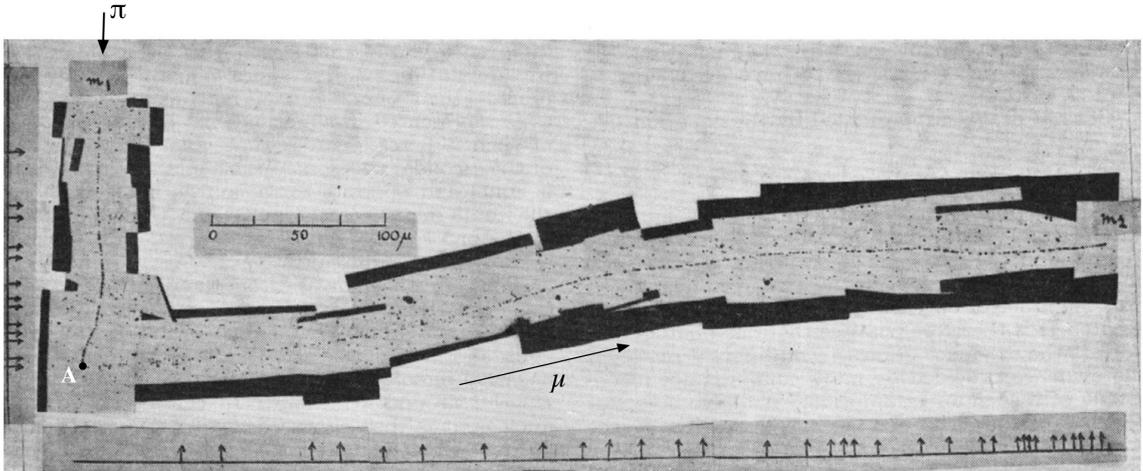


Fig. 1. OBSERVATION BY MRS. I. ROBERTS. PHOTOMICROGRAPH WITH COOKE $\times 45$ 'FLUORITE' OBJECTIVE. ILFORD 'NUCLEAR RESEARCH', BORON-LOADED C2 EMULSION. m_1 IS THE PRIMARY AND m_2 THE SECONDARY MESON. THE ARROWS, IN THIS AND THE FOLLOWING PHOTOGRAPHS, INDICATE POINTS WHERE CHANGES IN DIRECTION GREATER THAN 2° OCCUR, AS OBSERVED UNDER THE MICROSCOPE. ALL THE PHOTOGRAPHS ARE COMPLETELY UNRETOUCHED

Figura 11.7: Una delle prime immagini di Powell. Emulsione fotografica esposta ai raggi cosmici in quota, con traccia di un pione entrante che in A decade in un μ e un ν che non lascia traccia.

Il pione era effettivamente la particella mediatrice cercata e ne esistono tre tipi, due carichi e uno neutro di masse rispettive

$$m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 139.57 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{\pi^0} = 134.98 \text{ MeV}/c^2$$

Proseguendo con Yukawa si ricordi che per l'interazione elettromagnetica fra due cariche uguali q , l'energia potenziale del campo nelle zone di spazio non occupate dalle cariche, $U_C(r) = q^2/4\pi\epsilon_0 r$, è soluzione dell'equazione differenziale di Laplace nel caso statico

$$\nabla^2 U_C(r) = 0 \quad (11.19)$$

Si può modificare la [11.19](#) considerando forze con raggio d'azione finito fra le sorgenti del campo. La modifica più intuitiva consiste nell'aggiungere una costante che tenda a zero quando il raggio d'azione dell'interazione tende all'infinito, che per motivi dimensionali sia inversamente proporzionale al quadrato di una lunghezza e di segno tale da generare un potenziale che si annulli all'infinito. L'ultima condizione richiede una costante definita negativa, per cui è opportuno scriverla come l'opposto del quadrato di qualcosa. La conseguente modifica dell'equazione di Laplace porta alla

$$(\nabla^2 - \mu^2)U(r) = 0 \quad (11.20)$$

detta *equazione di Klein-Gordon* statica, in cui $\mu = 1/a_0$ ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza. Si osservi che al limite $\mu \rightarrow 0$ che equivale ad $a_0 \rightarrow \infty$, e quindi $m \rightarrow 0$, la [11.20](#) si riconduce alla [11.19](#). Data la simmetria sferica del problema impostato, si consideri la parte radiale del Laplaciano

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \mu^2 \right) U(r) = 0 \quad (11.21)$$

che cercando una soluzione del tipo $U(r) = y(r)/r$, diventa

$$\frac{d^2}{dr^2} y(r) - \mu^2 y(r) = 0 \quad (11.22)$$

che ha come integrale generale

$$y(r) = c_0 e^{-r/a_0} + c_1 e^{r/a_0} \quad (11.23)$$

Per evitare che $y(r)$ diverga, per $r \rightarrow \infty$ bisogna porre $c_1 = 0$. Posto poi $c_0 = -g^2/4\pi$ si ottiene l'espressione dell'energia potenziale di Yukawa

$$U_Y(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-r/a_0}}{r} \quad (11.24)$$

che come il potenziale coulombiano diverge per $r \rightarrow 0$, ma tende asintoticamente a zero molto più rapidamente al crescere della distanza fra i due nucleoni, oltre il valore della lunghezza d'onda Compton a_0 del pione π .

La quantità g , omogenea a una carica elettrica, è detta carica mesonica e $\alpha_X = g^2/4\pi\hbar c$ rappresenta la *costante d'accoppiamento*⁵ tra i nucleoni e il cosiddetto *campo mesonico*, similmente a come $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ rappresenta la costante d'accoppiamento tra gli elettroni e il *campo elettromagnetico* o *fotonico*.

Espressioni più raffinate del potenziale nucleone-nucleone, ottenibili nell'ambito della *teoria mesonica* delle interazioni nucleari, tengono conto dell'esistenza dei tre tipi di pioni (π^+ , π^0 , π^-) e anche di altri mesoni più pesanti e delle loro proprietà di simmetria, che determinano la scelta del termine di *sorgente* del campo mesonico, assente nell'equazione di Klein-Gordon qui dedotta e risolta, oltre che dell'indipendenza delle forze nucleari dalla carica elettrica.

Si ricordi in ogni caso che l'interazione nucleare è in realtà il complicato effetto risultante di come agiscono le interazioni forti fondamentali fra le distribuzioni di quark, costituenti e del mare, all'interno di nucleoni fra loro molto vicini.

⁵Si trova che g ha in generale una dipendenza dall'impulso del mesone scambiato.

11.4 Analogia atomico-molecolare

Il traguardo cercato è di interpretare il potenziale nucleone-nucleone in termini della dinamica delle interazioni fondamentali fra quark, la QCD, ma non si è ancora in grado di farlo, soprattutto a causa del confinamento, che impone la neutralità di colore per tutto ciò che può essere scambiato fra nucleoni su scale dimensionali maggiori o uguali alle loro stesse dimensioni. Ragionando in modo semplificato per analogia, si può comunque dire qualcosa sull'intensità e sulla dipendenza radiale dell'interazione.

In figura 11.8 è schematizzato l'andamento radiale del potenziale nucleone-nucleone come dedotto dalla gran messe di dati forniti dallo studio di interazioni elastiche p-p e n-p. È evidente, a meno dei fattori di scala, la somi-

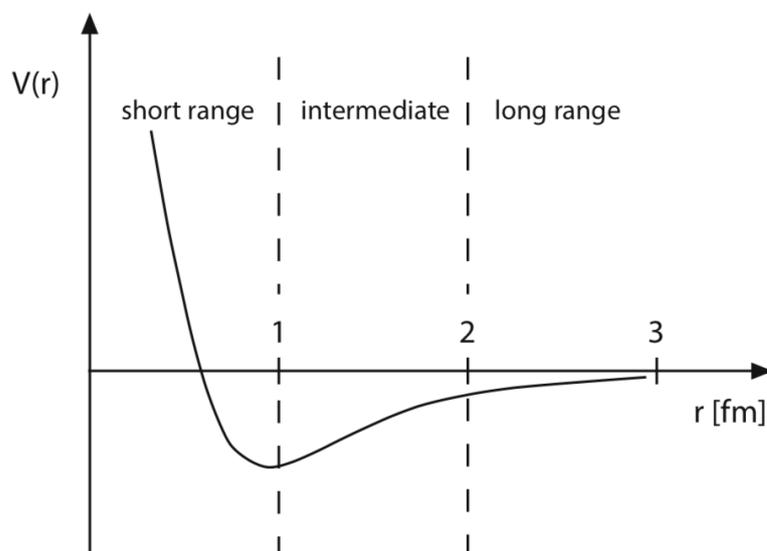


Figura 11.8: Andamento radiale del potenziale nucleone-nucleone in un nucleo.

glianza col potenziale agente fra due atomi, con una componente repulsiva a distanze compatibili con la sovrapposizione spaziale delle due strutture e una attrattiva a distanze maggiori che poi diminuisce rapidamente al crescere di queste.

Per analogia con le strutture atomiche e molecolari, si immagina che i quark giochino il ruolo degli elettroni. Vi sarebbero in tal caso alcune possibilità quali interazioni di tipo "ionico", di tipo "van der Waals" o di tipo "covalente".

La prima tipologia può essere subito scartata per il caso nucleare, in quanto richiederebbe il "prestito a lungo termine" di un quark da un nucleone ad un altro nucleone e ciò non è compatibile con le intense forze di confinamento

che caratterizzano l'interazione fra quark in un nucleone, a meno che non vi sia sostanziale sovrapposizione spaziale fra i due nucleoni, il che è altamente improbabile alle densità tipiche della materia nucleare ordinaria, $\rho_0 \simeq 0.17$ nucleoni/fm³.

La seconda tipologia, emula dell'interazione di van del Waals fra atomi e fra molecole, in cui l'attrazione nasce dall'interazione elettrica dipolo-dipolo, con lo scambio di coppie di fotoni e una dipendenza dalla distanza r fra i centri di massa dei dipoli del tipo $1/r^6$, implica lo scambio fra nucleoni di coppie cromaticamente neutre di gluoni. Calcoli in merito a questa componente conducono però ad un contributo troppo piccolo di forza attrattiva fra nucleoni per giustificare appieno quanto osservato in un nucleone ⁶.

Rimane ora la forma di legame *covalente*. Si osservi che la parte attrattiva del potenziale nucleone-nucleone è più intensa alla distanza radiale di circa 1 fm, che corrisponde grosso modo al raggio quadratico medio della distribuzione di carica di un protone. Quando due nucleoni si trovano a questa distanza c'è quindi fra essi una sostanziale sovrapposizione. In tal caso, aggirati in parte i problemi del confinamento che escludono la possibilità di un legame di tipo *ionico*, la forza attrattiva potrebbe manifestarsi con la compartecipazione di un singolo quark, ricordando appunto il legame atomico covalente.

I due nucleoni devono tuttavia restare cromaticamente neutri durante la forma di interazione descritta, per cui il quark compartecipato da un nucleone deve essere dello stesso colore di quello compartecipato dall'altro. L'effetto di ciò, essendoci tre possibili diversi stati di colore, è di ridurre la forza che ne consegue al punto che neppure questo solo meccanismo è in grado di giustificare la profondità osservata per il potenziale nucleare.

Si tenga però presente che in aggiunta ai tre quark di valenza, in un nucleone vi sono anche fluttuazioni di coppie quark-antiquark del mare, e nel caso in cui tali coppie siano cromaticamente neutre potranno anch'esse essere compartecipate fra due nucleoni, contribuendo così all'interazione. Risulta anzi che il loro contributo è maggiore rispetto a quello di singoli quark. I più leggeri fra questi di-quark sono i pioni π , il cui scambio fra nucleoni costituisce il grosso della parte attrattiva della forza nucleare.

In linea di principio la repulsione a breve range potrebbe essere imputata allo scambio di di-quark (mesoni) più pesanti eventualmente in differenti stati di spin totale. Dai dati sperimentali emergono molti candidati mesonici possibili, in accordo con le predizioni del modello a quark, e ogni scambio risulta responsabile di uno specifico contributo al potenziale totale nucleone-nucleone. Modelli che tengono conto di alcuni di questi possibili scambi sono in grado di fornire eccellenti fit dei dati ottenuti da esperimenti di diffusione nucleone-nucleone. Questi modelli di scambio bosonico sono però di tipo

⁶M.Rosina, B.Povh, Nucl. Phys. A572 (1994) 48

”semi-fenomenologico”, non in grado quindi di fornire una spiegazione fondamentale della parte repulsiva.

Nel caso di due atomi legati in una stessa molecola, la parte repulsiva a brevi distanze è dovuta al principio d’esclusione di Pauli. Considerando infatti che normalmente gli elettroni dei due atomi occupano i livelli energetici più bassi possibili, si ha che se i due atomi si avvicinano, come nel caso di un urto, e quindi le due nuvole elettroniche iniziano a sovrapporsi spazialmente, allora alcuni degli elettroni che le popolano, dovendo ubbidire al principio d’esclusione, vengono forzatamente eccitati a livelli energetici superiori e ciò non può che avvenire a carico di una frazione dell’energia cinetica disponibile nel canale d’ingresso; è questo che genera l’effetto repulsivo a distanze ridotte.

Anche i quark di un sistema di due nucleoni ubbidiscono al principio d’esclusione, per cui la funzione d’onda che descrive quei 6 quark deve necessariamente essere anti-simmetrica. Il numero di quark che possono occupare lo stato a più bassa energia, con $\ell = 0$, senza violare il principio di Pauli è però pari a 12, in quanto i quark coinvolti si differenziano su tre possibili diversi stati di colore, su due diversi possibili stati di spin e su due diversi possibili stati di isospin (quark *up* e quark *down*). La parte di spin-isospin della funzione d’onda completa deve dunque essere simmetrica in quanto la parte legata al colore è antisimmetrica e quella spaziale, per $\ell = 0$, è simmetrica. Si ha perciò che il principio d’esclusione non limita, per quanto concerne la funzione d’onda spaziale, la possibilità che i 6 quark costituenti due nucleoni possano occupare il livello energetico più basso ($\ell = 0$); di conseguenza la ragione della presenza del ”core” repulsivo va cercata altrove.

La responsabile è in questo caso l’interazione spin-spin fra i quark. Si osserva che l’energia potenziale cresce se tutti i 6 quark restano nello stato con $\ell = 0$ mantenendo gli spin allineati; si confronti ad esempio la massa della risonanza $\Delta(1232)$, i cui tre quark costituenti hanno gli spin allineati, con quella del generico nucleone, più leggero di circa $295 \text{ MeV}/c^2$, in cui una coppia di quark costituenti si trova nella condizione di spin antiparalleli. Nel caso dei 6 quark, se quando i due nucleoni si ”sovrappongono” restano tutti nello stato con $\ell = 0$, è chiaro che il numero di coppie di quark con spin paralleli è maggiore rispetto al considerare i nucleoni separati, e quindi l’energia potenziale del sistema aumenta; si trova che l’aumento, per ogni coppia in più di quark con spin paralleli, equivale a metà della differenza in energia fra la massa della Δ e quella del nucleone.

È d’altronde ragionevole che il sistema di due nucleoni cerchi spontaneamente di minimizzare questo contributo alla propria energia massimizzando il numero di coppie di quark con spin anti-paralleli, ma ciò entra in competizione con l’esigenza che la parte di spin-sapore della funzione d’onda sia completamente simmetrica, se tutti i 6 quark restano nello stato con $\ell = 0$. Il contributo energetico può essere ridotto se almeno una coppia di quark

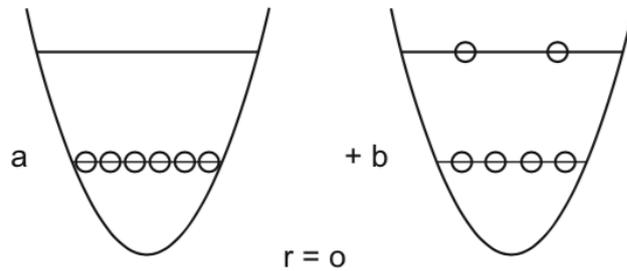


Figura 11.9: Lo stato dei quark per due nucleoni fortemente sovrapposti. In un'approssimazione non adiabatica si trova che domina la configurazione b che diviene però sempre meno importante all'allontanarsi reciproco dei due nucleoni.

va nello stato con $\ell = 1$. L'energia d'eccitazione necessaria a ciò è però confrontabile con la diminuzione dell'energia di appaiamento di spin che si ottiene, quindi in ogni caso l'energia potenziale del sistema di due nucleoni aumenta se essi tendono verso una intensa sovrapposizione spaziale mutua. La repulsione che si osserva a brevi distanze è dunque conseguenza sia dell'aumento dell'energia dovuta agli appaiamenti di spin che dell'eccitazione di coppie di quark a stati con $\ell = 1$.

Si riesce a dare in tal modo una visione qualitativa di come intervengono le forze fondamentali fra quark nel determinare l'interazione effettiva fra nucleoni in un nucleo.

La forza nucleare viene anche detta "interazione forte *residua*", intendendo come "interazione forte" tout court quella che interviene fra i quark all'interno di ogni nucleone.

Capitolo 12

Interazioni fra ioni pesanti relativistici

12.1 **Vedi anche Valentina Zacco**

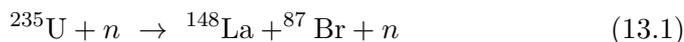
Capitolo 13

Fissione nucleare

I neutroni non interagiscono col campo coulombiano e quindi, contrariamente ai protoni, possono avvicinarsi ai nuclei e penetrare in essi anche se dotati di bassissime energie cinetiche. Possono quindi interagire con i nuclei ed il loro potenziale attrattivo formando stati legati.

Agli inizi degli studi sui nuclei si pensava di sfruttare la cattura di neutroni a bassa energia per produrre nuovi nuclei con più alti valori del numero di massa A .

Nel corso di esperimenti di questo tipo per la formazione di elementi transuranici, si osservava spesso che lo scattering di neutroni termici, ovvero con energie cinetiche dell'ordine di $kT \approx 1/40$ MeV, su nuclei con A dispari, quale ad esempio ^{235}U , non produce nuclei più pesanti ma piuttosto la frammentazione del nucleo genitore in due nuclei figli di massa inferiore. Questa frammentazione del nucleo pesante in due nuclei di media taglia più alcuni frammenti minori è detta *fissione nucleare*. Alcuni nuclei possono fissionare anche spontaneamente. Un tipico esempio di fissione indotta su un nucleo con A dispari è proprio l'assorbimento termico di neutroni su ^{235}U



Lo scattering di neutroni termici su nuclei con A pari, quale ^{238}U , non produce invece frammentazione del genitore. Perché il fenomeno abbia in tal caso luogo è necessario che le energie cinetiche dei neutroni incidenti siano molto superiori, dell'ordine di 2 MeV.

La fissione è una caratteristica dei nuclei di grossa taglia e si può stimare l'energia rilasciata per la fissione di un tale nucleo basandosi sul grafico dell'energia media di legame per nucleone [13.1](#) L'energia media di legame per nucleone è più piccola per nuclei con A molto grande rispetto a nuclei con valori intermedi di A (purché $A \geq 56$). Il processo di fissione comporta quindi la frammentazione di un nucleo pesante in due nuclei di taglia inferiore ma con maggior energia di legame, e il conseguente rilascio di energia. Se si assume pari a ~ -7.5 MeV l'energia media di legame per nucleone

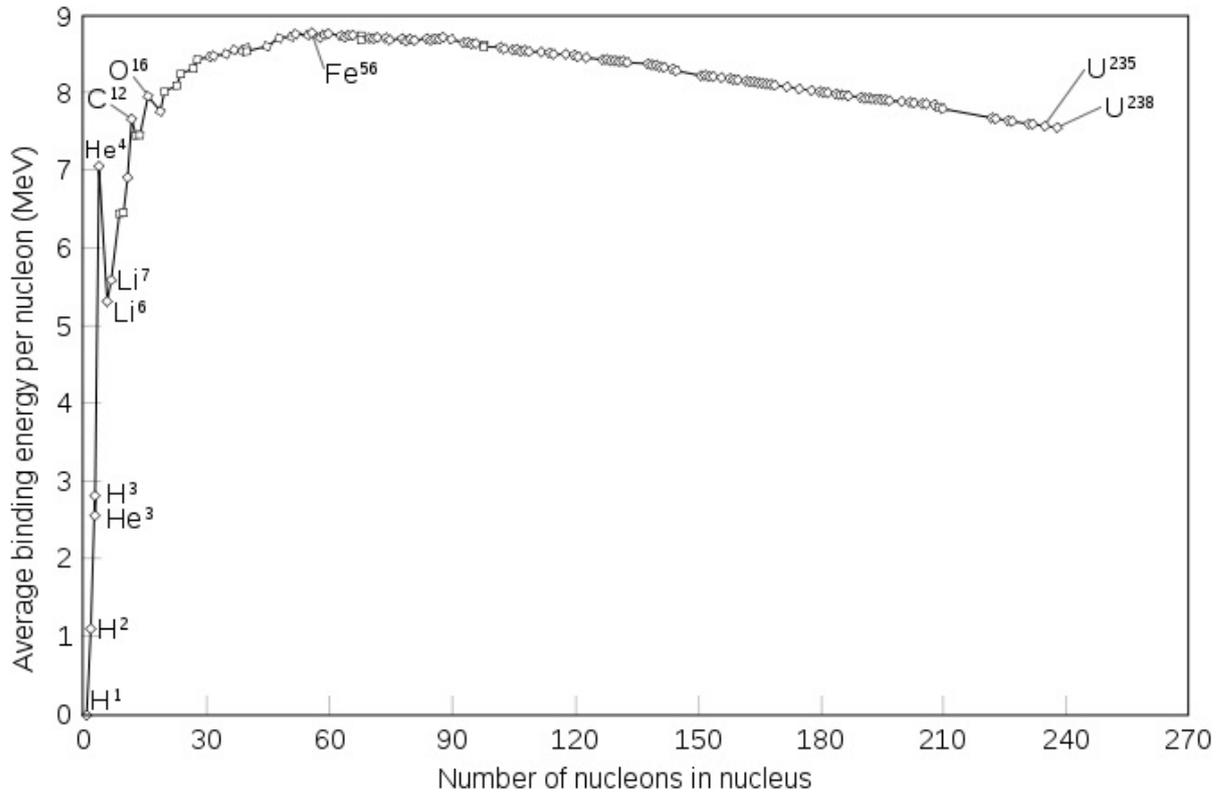


Figura 13.1: Energia media di legame per nucleone $|B/A|$, per la gran parte dei nuclei stabili.

dell' ^{235}U e pari a ~ -8.4 MeV quella dei suoi prodotti di fissione, si stima un rilascio di energia di ~ 0.9 MeV per nucleone, da cui si stima un'energia cinetica totale E_{fisU} , prodotta dalla fissione di un nucleo di ^{235}U poi ripartita fra i prodotti della fissione

$$E_{fisU} \approx (235 \times 0.9) \text{ MeV} = 211.5 \text{ MeV} \quad (13.2)$$

che rappresenta una grande quantità d'energia!

13.1 Teoria elementare della fissione

La fissione nucleare può essere capita sia qualitativamente che quantitativamente sulla base del modello nucleare a goccia di liquido. Questo presuppone che nello stato iniziale e in quello finale i nuclei abbiano forma sferica, anche se per nuclei molto grandi la forma sferica non è necessariamente stabile. Si suppone altresì che una perturbazione esterna, quale quella dovuta ad un neutrone incidente, possa creare onde superficiali che possono determinare modificazioni nella forma della goccia di liquido. Se questa si dilata

allungandosi e la deformazione prodotta è abbastanza grande, la repulsione coulombiana fra le due porzioni elongate della goccia di liquido nucleare può produrre una struttura a due lobi che a sua volta può indurre un'ulteriore repulsione tra essi fino a determinarne la completa separazione, ovvero la fissione della goccia iniziale in due gocce più piccole. Se però la separazione iniziale non è sufficientemente ampia, la goccia deformata può dar luogo ad uno stato eccitato del nucleo composto dalla fusione del neutrone incidente col nucleo genitore di numero di massa A . Questo potrà quindi diseccitarsi, tramite emissione di un fotone, verso uno stato a minore energia del nucleo con numero di massa $(A + 1)$. Quest'ultimo processo consiste nella *cattura radiativa* di un neutrone ed è schematicamente descritto in figura [13.2](#).

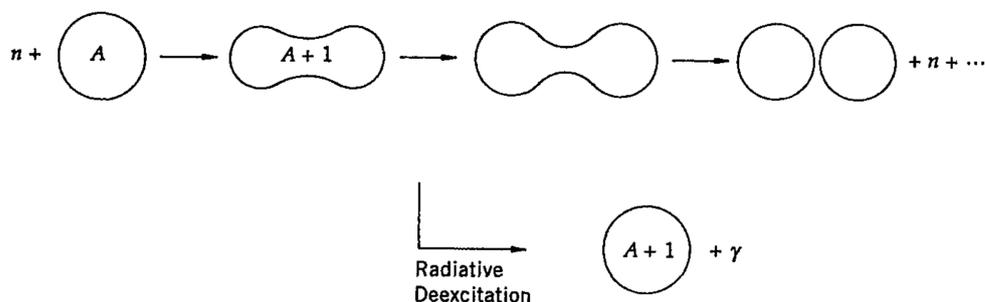


Figura 13.2: L'assorbimento di un neutrone può evolvere sia nel processo di fissione che nella cattura radiativa.

Il modello a goccia di liquido fornisce anche un'eccellente descrizione quantitativa della fissione nucleare. Da esso deriva la formula di Weizsäcker [2.55](#) che parametrizza l'energia di legame dei nuclei. Essa contiene tre termini di derivazione classica che dipendono esplicitamente dalla forma della goccia di liquido nucleare: il termine di volume, quello di superficie e quello coulombiano. Si può procedere ad un semplice calcolo classico per valutare la stabilità di una goccia di liquido in risposta allo stimolo di una perturbazione esterna. Assumendo una goccia sferica di raggio R che sotto uno stimolo esterno si deformi leggermente, a volume costante, verso la forma di un ellissoide (si ricordi che la materia nucleare è considerata come un liquido incompressibile) con semiasse maggiore a e semiasse minore b , si possono esprimere a e b in termini di un piccolo parametro ϵ di deformazione, come mostrato in Appendice [13](#)

$$a = R(1 + \epsilon) \quad , \quad b = \frac{R}{(1 + \epsilon)^{1/2}} \quad (13.3)$$

Questa scelta discende dall'invarianza del volume V della goccia

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi ab^2 \quad (13.4)$$

che assicura anche l'invarianza del termine di volume nella formula di Weizsäcker fra goccia sferica e goccia deformata. Saranno però diversi nei due casi i termini energetici di superficie e coulombiano. Sempre in Appendice [13](#) si vede infatti che supposto piccolo il parametro ϵ di deformazione, e ponendo $Z(Z-1) \simeq Z^2$, si possono riscrivere i due termini come

$$\begin{aligned} B_S(A) = b_S A^{2/3} &\longrightarrow B_S^*(A) = b_S A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2\right) \\ B_C(A, Z) = b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} &\longrightarrow B_C^*(A, Z) = b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5} \epsilon^2\right) \end{aligned} \quad (13.5)$$

La deformazione quindi accresce l'energia di superficie mentre riduce quella coulombiana. La stabilità della goccia dipende quindi da come questi due termini competono fra loro. La variazione totale in energia di legame dovuta alla deformazione si può quindi scrivere come

$$\begin{aligned} \Delta B^*(A, Z) &= B_S(A) + B_C(A, Z) - B_S^*(A) - B_C^*(A, Z) = \\ &= \frac{1}{5} \epsilon^2 A^{2/3} \left(2b_S - b_C \frac{Z^2}{A}\right) \end{aligned} \quad (13.6)$$

Se $\Delta B^*(A, Z) > 0$ allora la goccia sferica risulta più fortemente legata e dunque stabile per piccole perturbazioni esterne. Ricordando i valori $b_S \simeq 17.23$ MeV e $b_C \simeq 0.697$ MeV, si trova che $\Delta B^*(A, Z) > 0$ per

$$2b_S - b_C \frac{Z^2}{A} > 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{Z^2}{A} < 49 \quad (13.7)$$

Da questa semplice analisi classica si desume che un nucleo sferico è stabile per piccole perturbazioni esterne solo se $Z^2 < 49A$. Un'analisi corretta tiene conto di correzioni di origine quantistica che però non inficiano sostanzialmente il risultato, ovvero che ci si aspetta che nuclei con $Z^2 > 49A$ siano altamente instabili e soggetti a fissione spontanea.

Per nuclei grandi $Z < A/2$, e quindi essi soddisfano la condizione $Z^2 < 49A$ e dovrebbero mostrare la massima energia di legame assumendo forma sferica. Tuttavia, anche soddisfacendo la condizione $Z^2 < 49A$, può risultare che l'energia di legame di due nuclei figli sia in valore assoluto maggiore di quella del nucleo genitore, nel qual caso il genitore sferico può fissionare trasformandosi in uno stato finale più legato.

Si consideri il semplice esempio di un nucleo genitore che si frammenta in due nuclei figli identici, il che implica che sia A che Z del genitore siano pari. Sempre trascurando i termini di origine quantistica della formula di Weizsäcker e approssimando $Z(Z-1) \simeq Z^2$, si calcoli la differenza fra le energie di legame del nucleo genitore e dei prodotti di fissione quando questi sono supposti essere ormai a distanza infinita l'uno dall'altro.

I termini di volume si cancellano e resta

$$\begin{aligned}
 B(A, Z) - 2 \times B(A/2, Z/2) &\simeq b_S A^{2/3} (1 - 2^{1/3}) + b_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} (1 - 2^{-2/3}) \\
 &\simeq 0.26 A^{2/3} \left(\frac{Z^2}{A} - 17.2 \right) \text{ MeV}
 \end{aligned}
 \tag{13.8}$$

La condizione che questa differenza in energia di legame sia positiva, per la quale i due frammenti di fissione danno luogo a una configurazione energeticamente più stabile rispetto al nucleo genitore, è dunque soddisfatta per $Z^2 > 17.2 A$. Mettendo assieme quanto ottenuto si individua una regione della tabella dei nuclidi, definita dalla relazione $17.2 A \lesssim Z^2 \lesssim 49.4 A$, in cui benchè la configurazione sferica del nucleo genitore risulti stabile per piccole perturbazioni, comunque la sua fissione in due frammenti uguali è energeticamente favorevole.

Una deformazione di ampiezza sufficiente può dunque condurre il nucleo al limite della scissione e la sua forma è in tal caso compatibile con una configurazione di equilibrio instabile per spostarlo dalla quale anche di una quantità infinitesima, è sufficiente un lavoro infinitesimo d'ordine superiore. Si consideri ora il grafico dell'energia potenziale dei due frammenti di fissione in funzione della distanza fra gli stessi. Quando i due frammenti sono

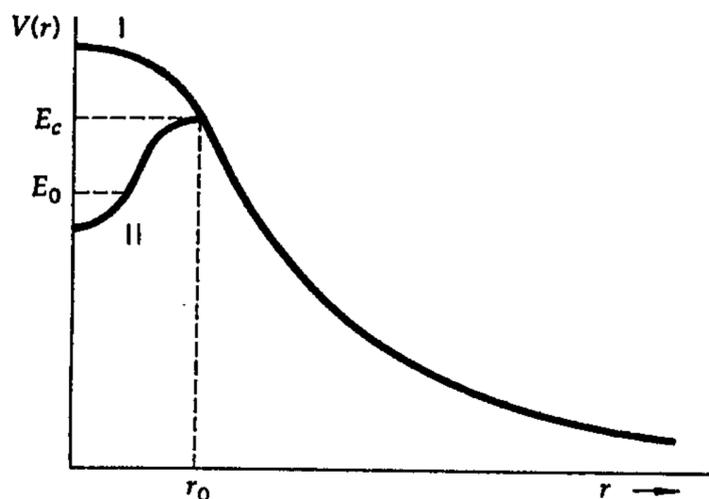


Figura 13.3: Potential energy for the interaction of two medium-size nuclei as a function of their separation distance. The nuclei just touch at $r = r_0$, and coalesce at $r = 0$.

lontani l'uno dall'altro la differenza fra la loro energia potenziale e quella del nucleo genitore è data dalla [13.8](#). Nel caso $A \approx 200$ e $Z \approx 92$ si ottengono ≈ 200 MeV per due frammenti di taglia comparabile. La repulsione coulomb-

biana tra i due frammenti cresce al diminuire della loro mutua distanza. Il potenziale coulombiano raggiunge il suo massimo, pari a ≈ 250 MeV, approssimativamente quando i due frammenti si *toccano*, con una distanza r_g fra i loro baricentri pari circa alla somma dei rispettivi raggi nucleari. Se i frammenti hanno taglia asimmetrica l'energia potenziale può essere inferiore; per frammenti con rapporto (2 : 1) fra i rispettivi valori di Z , la riduzione della barriera coulombiana è dell'11% circa.

Per $r < r_g$ i due nuclei cominciano a fondersi uno nell'altro costituendo una singola struttura nucleare deformata e come discusso precedentemente, ci sono due possibili evoluzioni di questo sistema.

Quando $Z^2 > 49A$, la forma sferica risulta instabile e l'energia decresce quadraticamente con la deformazione ϵ , come da [13.6](#) e illustrato nel ramo-I nel grafico dell'energia potenziale. In questa condizione, un nucleo genitore sferico evolve in due frammenti separati alla più lieve perturbazione, in quanto ciò è energeticamente favorevole per qualunque valore di r . Il nucleo *rotola rapidamente dalla collina di potenziale* e fissiona spontaneamente.

Per $Z^2 < 49A$, il nucleo genitore sferico corrisponde a uno stato legato stabile la cui energia cresce quadraticamente con la deformazione, come mostrato nel ramo-II del grafico dell'energia potenziale. Il nucleo genitore in questo caso si trova nella buca di potenziale a un'energia E_0 maggiore del fondo della buca ma minore del valore E_C della barriera coulombiana. Classicamente

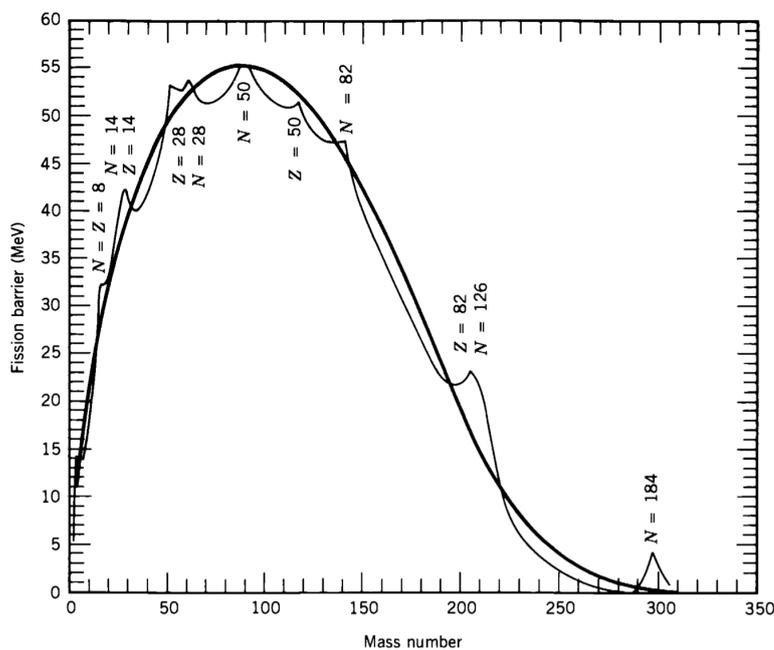


Figura 13.4: Energia d'attivazione in funzione di A . Curva spessa calcolata per isotopi più stabili in base al modello a goccia, l'altra include effetti della struttura a shell.

lo si può considerare sul fondo della buca, quindi, perchè possa dar luogo a fissione, dovrebbe acquisire un ammontare d'energia pari ad $(E_C - E_0)$, detta anche *energia d'attivazione*. Quest'energia, per nuclei con $A \approx 240$, è compresa tra 6 MeV ed 8 MeV. In questo caso il nucleo potrebbe fissionare anche per effetto tunnel, secondo un processo simile a quello del decadimento α . La probabilità, tuttavia, è estremamente bassa, data la notevole massa del frammento che dovrebbe dar luogo ad effetto tunnel, ricordando che il fattore G di Gamow dipende dalla radice quadrata della massa. La vita media associata alla fissione via tunneling è di conseguenza molto lunga. Il processo di fissione nel caso del ramo-I è invece estremamente rapido, a brevissima vita media, essendo sempre energeticamente favorevole.

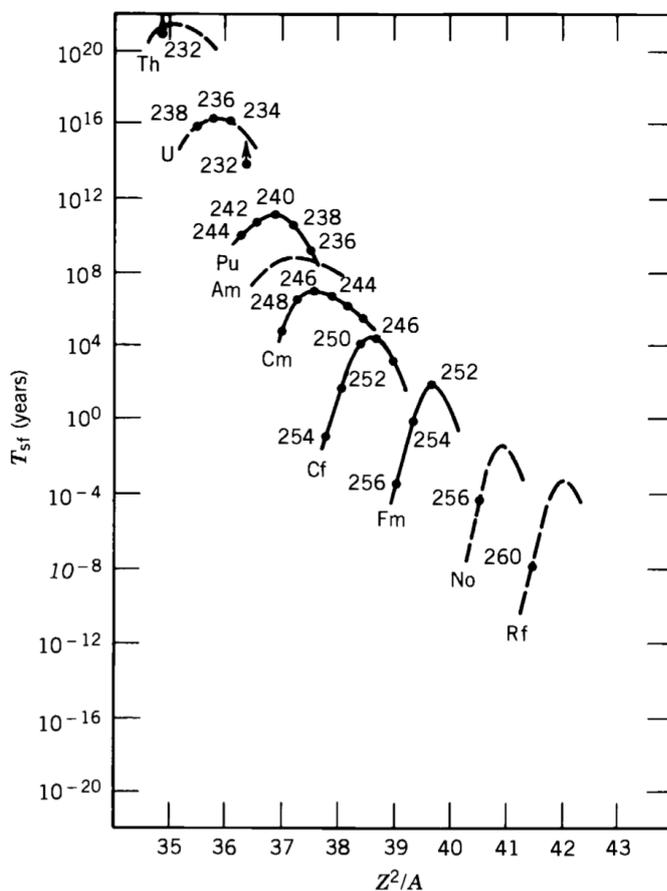


Figura 13.5: Vite medie τ_{fis} per fissione spontanea. Si nota una generale tendenza alla diminuzione di τ_{fis} al crescere di Z^2/A .

Questo approccio basato sul modello a goccia, dovuto a Bohr e Wheeler, ancorchè di concezione classica permette un'ottima comprensione sia della fissione spontanea che di quella indotta. In particolare spiega come i neutro-

ni termici inducano fissione nell' ^{235}U mentre ci vogliono neutroni energetici per fissionare ^{238}U .

Essendo ^{235}U un nucleo pari-dispari e ^{238}U pari-pari, risulta che la differenza in energia di legame fra lo stato fondamentale di ^{235}U e quella dei suoi frammenti è maggiore di quanto non lo sia la corrispondente per ^{238}U . Un ^{235}U catturando un neutrone diventa un nucleo composto pari-pari, quindi più legato, da cui si ha che questo processo rilascia energia: l'energia di legame dell'ultimo neutrone è di -6.5 MeV, sufficienti come energia d'attivazione per la fissione del nucleo composto.

L'energia cinetica del neutrone incidente in questo caso è quindi ininfluenza, e il processo su ^{235}U può essere innescato anche da neutroni termici.

La cattura di un neutrone su ^{238}U lo trasforma invece in un nucleo pari-dispari, con energia di legame dell'ultimo neutrone di soli -4.8 MeV, inferiore in valore assoluto ai 6 MeV richiesti per attivare la fissione. Da qui la necessità, per produrre fissione, che i neutroni incidenti abbiano un'energia cinetica maggiore di 1.2 MeV.

Nell'esempio trattato si sono assunti uguali i due frammenti di fissione, ma in generale i frammenti di fissione sono asimmetrici, in quanto ciò riduce l'effettiva entità della barriera coulombiana. Sperimentalmente si trova che le masse dei frammenti di fissione dell' ^{235}U tendono a raggrupparsi attorno ai valori $A \approx 95$ ed $A \approx 140$, ma non si è trovata una ragione fondamentale per questa particolare asimmetria.

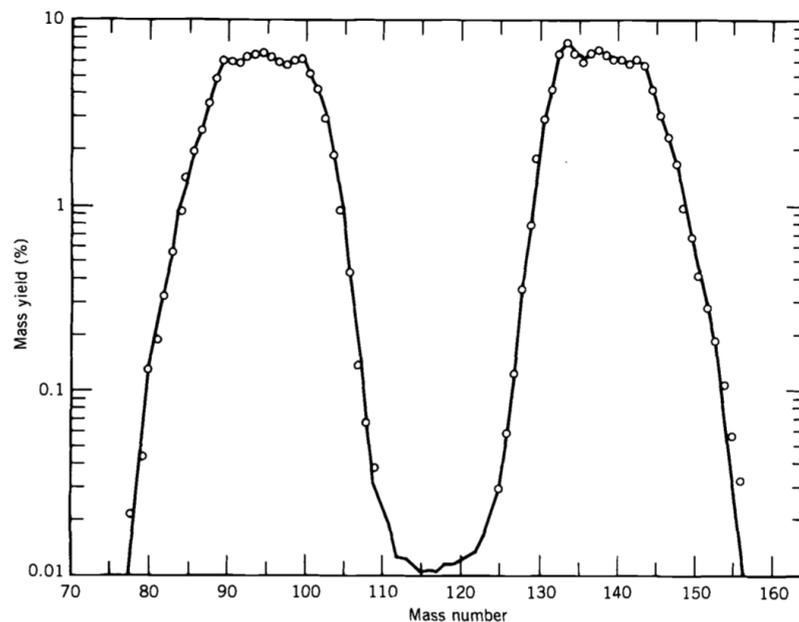


Figura 13.6: Distribuzione in massa dei frammenti di fissione indotta da neutroni termici su ^{235}U .

I frammenti di fissione sono tipicamente isotopi pesanti ed eccitati di nuclei più stabili e raggiungono lo stato fondamentale tramite emissione o *evaporazione* di neutroni, e tramite decadimenti β^- .

13.2 Sezioni d'urto di fissione

In figura 13.8 sono riportate le sezioni d'urto per fissione indotta da neutroni su ^{235}U e ^{238}U . La regione termica mostra la tipica dipendenza da $1/v$ per neutroni di bassissima energia e svariate risonanze nell'intervallo fra 1 eV e 100 eV.

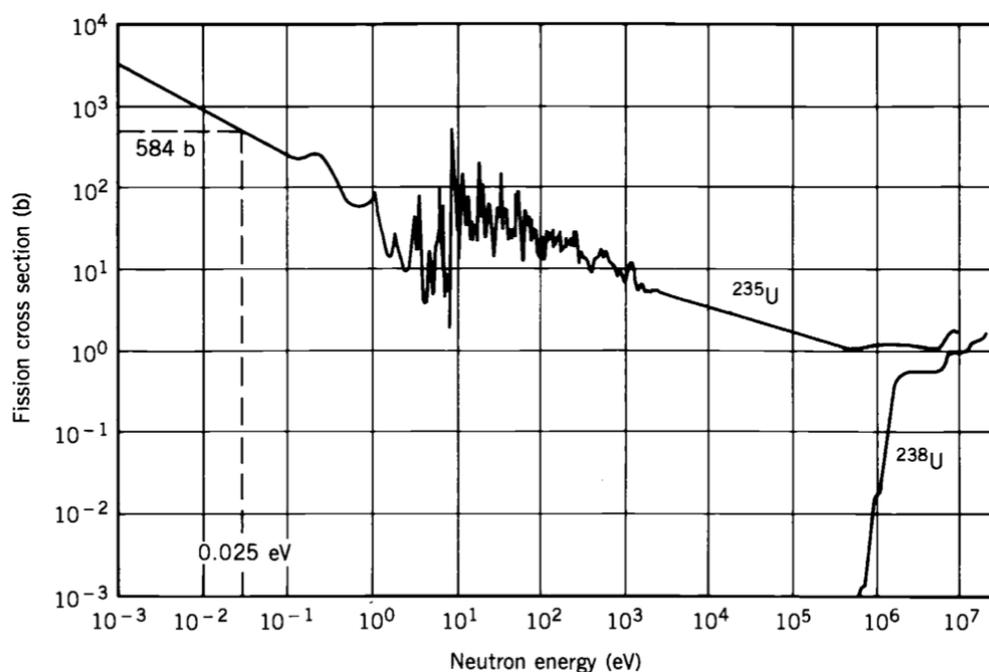


Figura 13.7: Sezioni d'urto per fissione indotta da neutroni su ^{235}U e ^{238}U .

Nell' ^{235}U la sezione d'urto per fissione termica (584 barn) domina su quella di scattering (9 barn) e su quella di cattura radiativa (97 barn). Essa risulta inoltre circa tre ordini di grandezza superiore a quella per neutroni veloci, con energie maggiori del MeV. Se quindi si vogliono utilizzare efficacemente questi ultimi per indurre fissione nell' ^{235}U bisogna prima *moderarli* fino a condurli a energie termiche.

Nell' ^{238}U la sezione d'urto di fissione è invece praticamente nulla nella regione termica e per indurre fissione ci vogliono neutroni veloci, con energie superiori al MeV.

13.3 Reazione a catena controllata

Si consideri una massa infinitamente estesa di uranio naturale (0.72 % ^{235}U , 99.28 % ^{238}U). Una singola fissione produce in media 2.5 neutroni, ognuno dei quali può stimolare un'ulteriore fissione, e così via. Questo processo è detto *reazione a catena*, e ogni fissione libera circa 200 MeV sotto forma di energia cinetica dei frammenti e radiazione.

Si definisce un *fattore di moltiplicazione* k_∞ , valido nel caso di un mezzo infinitamente esteso, per il quale quindi si trascurano eventuali perdite di neutroni attraverso la superficie, che dà la frazione di variazione di neutroni termici fra una generazione e la successiva, ovvero il numero medio di nuovi neutroni termici prodotti da ogni neutrone termico.

Perché la reazione a catena non si *spenga* bisogna che $k_\infty \geq 1$. I 2.5 neutroni prodotti in media da ogni fissione sono però *neutroni veloci*, per i quali la sezione d'urto di fissione è piccola. Per favorire la reazione a catena risulta quindi vantaggioso moderare questi neutroni fino a velocità termiche, per le quali la sezione d'urto, in regime $\sim 1/v$, vale circa 580 barn.

Molti dei neutroni prodotti nei processi di fissione possono comunque essere assorbiti o distolti dalla reazione a catena, per cui dei 2.5 neutroni in media prodotti per ogni fissione, è facile che ne resti disponibile meno di 1 termico, determinando a questo punto l'interruzione della reazione a catena.

Un possibile materiale moderatore è il carbonio, sotto forma di mattoni di grafite. Il moderatore più efficiente sarebbe quello costituito dai nuclei più leggeri, ovvero l'idrogeno, ma il carbonio è comunque una ragionevole scelta per la facilità di disporne, in forma solida e sagomabile, per il relativamente basso costo e per la densità alta con cui se ne può disporre.

Un reticolo di blocchi di uranio alternati a grafite può costituire una pila a reazione a catena, come il primo prototipo realizzato da Fermi e collaboratori a Chicago nel 1942. Se il fattore di moltiplicazione k per una pila di volume finito è esattamente pari ad 1, la pila è in condizione *critica*, in condizione *sottocritica* se $k < 1$, e *supercritica* se $k > 1$. La condizione di criticità è quella che garantisce un rilascio d'energia costante.

Per calcolare k_∞ bisogna seguire l'evoluzione d'un insieme di neutroni termici da una generazione all'altra. Si supponga di avere N neutroni termici in una certa generazione e sia ν il numero medio di neutroni veloci prodotti da ogni fissione. Una frazione di questi sono assorbiti da processi quali reazioni (n, γ) sia nell' ^{235}U che nell' ^{238}U .

Sia η il numero medio di neutroni utili alla fissione prodotto da ogni neutrone termico, con $\eta < \nu$. Dette σ_f e σ_a le sezioni d'urto rispettivamente di fissione e per altri processi d'assorbimento di neutroni termici, allora la probabilità che un neutrone produca fissione è

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_a}, \quad \text{da cui} \quad \eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_f + \sigma_a} \quad (13.9)$$

Per l' ^{235}U si ha $\sigma_f = 584$ barn e $\sigma_a = 97$ barn, da cui $\eta = 2.08$ neutroni veloci prodotti per ogni neutrone termico. L' ^{238}U non è fissionabile da neutroni termici, per cui $\sigma_f = 0$, mentre $\sigma_a = 2.75$ barn. Per la miscela naturale di ^{235}U e ^{238}U le sezioni d'urto efficaci di fissione e assorbimento sono

$$\sigma_f = \frac{0.72}{100}\sigma_f(235) + \frac{99.28}{100}\sigma_f(238) = 4.20 \text{ barn}$$

$$\sigma_a = \frac{0.72}{100}\sigma_a(235) + \frac{99.28}{100}\sigma_a(238) = 3.43 \text{ barn}$$

e di conseguenza $\eta = 1.33$. È un valore già molto prossimo ad 1 e quindi resta da cercare di ridurre al minimo altri modi in cui neutroni possono essere persi, per ottenere un reattore critico. Arricchendo l'uranio al 3% di ^{235}U si porta a 1.84 il valore di η . Ciò permette di tollerare perdite di neutroni anche sensibili, pur mantenendo le condizioni critiche.

A questo punto parte degli N neutroni termici sono stati assorbiti e i rimanenti hanno prodotto fissione, da cui si hanno ηN neutroni veloci che per contribuire al mantenimento della criticità vanno termalizzati. Mentre questi neutroni veloci si muovono entro il volume della pila, possono incontrare un nucleo di ^{238}U che ha una relativamente piccola sezione d'urto di fissione da neutroni veloci, di circa 1 barn. Questo genera una piccola crescita del numero di neutroni, di cui si tien conto introducendo un fattore ϵ , detto fattore di fissione veloce, per cui il numero di neutroni veloci diventa $\eta\epsilon N$. Per l'uranio naturale $\epsilon \simeq 1.03$.

Si attua la moderazione mescolando opportunamente materiale moderatore leggero, come ad esempio grafite, col combustibile del reattore. Da quanto riportato in tabella ??, per termalizzare neutroni di 1 MeV servono circa 100 collisioni con nuclei di carbonio. Durante il processo essi attraversano la regione $10 \div 100$ eV, dove ^{238}U mostra molte risonanze nella sezione d'urto di cattura neutronica, con valori dell'ordine di 10^3 barn, superiore a quello di fissione per ^{235}U . Per garantire l'ottenimento di un adeguato numero di neutroni termici bisogna quindi trovare il modo di impedire la cattura di risonanza dei neutroni su ^{238}U . Se l'uranio e la grafite fossero intimamente mescolati, come due polveri, sarebbe sostanzialmente impossibile evitare la cattura risonante dei neutroni su ^{238}U , in quanto il numero di urti moderatori sul carbonio di un neutrone sarebbe ridotto, prima che questo possa incontrare un nucleo di ^{238}U . È quindi sufficiente interporre il carbonio moderatore nel combustibile sotto forma di blocchi di dimensioni tali da garantire che in essi, un neutrone veloce possa sostanzialmente termalizzarsi a energie inferiori a quelle comprese nella zona di cattura risonante in ^{238}U . La distanza media che un neutrone da fissione deve percorrere in grafite per termalizzarsi è di circa 19 cm, per cui una pila che possa minimizzare

la perdita di neutroni per cattura risonante su ^{238}U richiede una matrice di elementi di combustibile uranio alternati a mattoncini di grafite di $\simeq 19$ cm di lato. Vi sarà comunque sempre una frazione residua di neutroni che subiscono cattura risonante su ^{238}U e se ne tiene conto introducendo il fattore p detto *probabilità di perdita per cattura risonante*, per cui il numero di neutroni residui, dopo la termalizzazione, diventa: $\eta\epsilon pN$. Tipicamente $p \approx 0.9$.

Un neutrone termalizzato dovrebbe poter quindi immediatamente rientrare a contatto con l'uranio combustibile, ma inesorabilmente alcuni neutroni non riescono a fuoriuscire dai blocchi di grafite moderatrice e ne vengono catturati. A queste catture contribuiscono anche materiali strutturali della pila stessa, come quelli per l'incapsulamento degli elementi di combustibile. Una ragione che porta alla scelta del carbonio come moderatore è la sua bassissima sezione d'urto di cattura termica per neutroni, pari a circa 0.0034 barn. Per tener conto della cattura residua comunque presente si introduce il *fattore di utilizzazione termica* f , che rappresenta la frazione di neutroni termici disponibili all'interazione con ^{235}U e ^{238}U . Anche f ha valori tipici dell'ordine di $\simeq 0.9$.

Il numero di neutroni che in definitiva sopravvive alla cattura del moderatore e degli altri materiali non fissili presenti è dato da $\eta\epsilon p f N$, e la criticità del reattore dipende dal suo confronto con N . Il fattore di moltiplicazione k_∞ è quindi dato da

$$k_\infty = \eta\epsilon p f \quad (13.10)$$

detta *formula dei quattro fattori*.

Nella progettazione di un reattore si cerca un compromesso per ottimizzare i tre fattori legati alla geometria della struttura, ϵ , p ed f . Blocchi troppo grandi di combustibile tendono a ridurre p , dato che l'assorbimento risonante ha luogo prevalentemente nella loro zona superficiale. Ciò fa sì che il volume interno dell'elemento di combustibile praticamente non veda neutroni catturabili in forma risonante. Quindi maggiori sono le dimensioni dell'elemento combustibile, più efficace è la sua superficie nello schermare la parte interna dell'uranio dall'assorbimento dei neutroni. Se però l'elemento combustibile fosse troppo grande lo stesso effetto si manifesterebbe anche per i neutroni termici utili alla fissione, che produrrebbero fissione prevalentemente nello strato superficiale dell'elemento combustibile, interessando meno la parte più interna dell'elemento combustibile.

La formula dei quattro fattori dà, per un pila di dimensioni infinite con moderatore a grafite, $k_\infty = 1.11$. In una pila reale, di dimensioni finite, bisogna considerare la frazione di perdita di neutroni, sia veloci che termici, dalla superficie esterna del suo volume. Si introducono allo scopo due fattori, ℓ_f e ℓ_t per tenerne conto e li si ingloba nella formula per la valutazione del fattore di moltiplicazione che diventa

$$k = \eta\epsilon p f (1 - \ell_f) (1 - \ell_t) \quad (13.11)$$

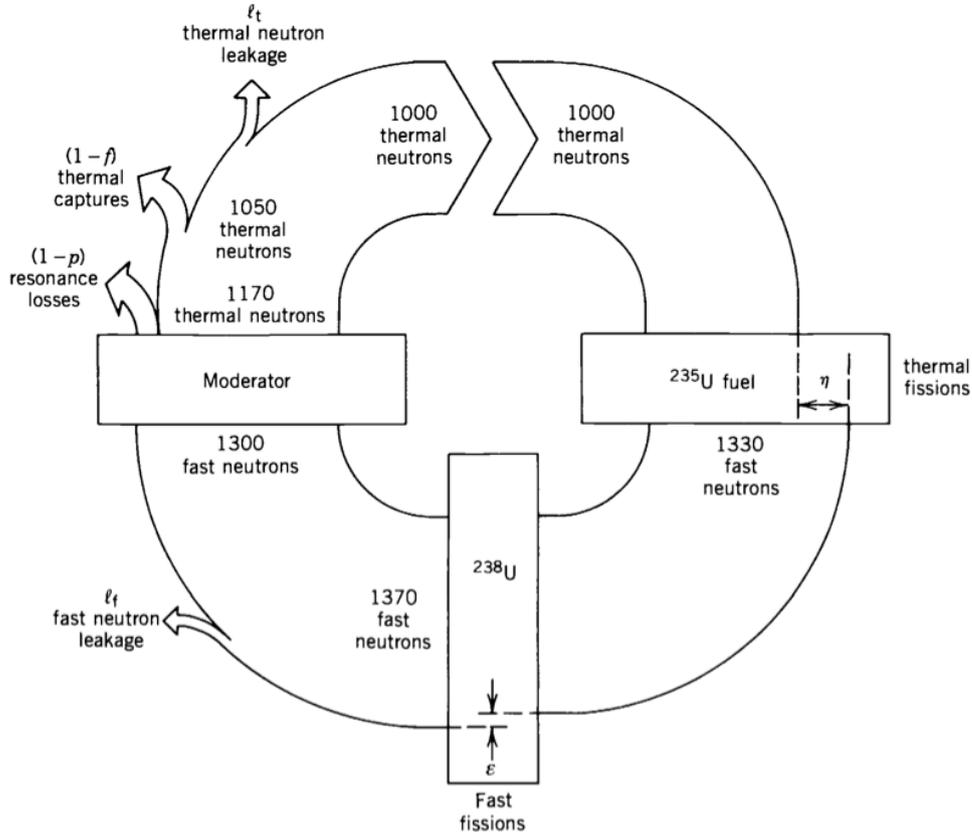


Figura 13.8: Rappresentazione dei processi in atto durante una singola generazione di neutroni. Il ciclo considera k esattamente uguale ad 1.000

Al crescere delle dimensioni del reattore diminuisce il rapporto fra la sua area esterna ed il suo volume, e quindi il numero di neutroni che sfuggono. Se ℓ_f ed ℓ_t sono piccoli allora $(k_\infty - k) \approx k(\ell_f - \ell_t)$. La perdita totale $(\ell_f - \ell_t)$ desce dunque al crescere dell'area esterna. La perdita di neutroni inoltre cresce con la distanza che un neutrone può coprire prima di essere assorbito, detta *lunghezza di migrazione* M , che dipende da due contributi: la lunghezza di diffusione L_d per neutroni termici, e la lunghezza di rallentamento L_s , necessaria a un neutrone veloce per raggiungere energie termiche

$$M = (L_d^2 + L_s^2)^{1/2} \quad (13.12)$$

Per la grafite si ha $L_s = 18.7$ cm ed $L_d = 50.8$ cm.

Supponendo un reattore di forma sferica e raggio R è ragionevole supporre che $(k_\infty - k) \propto R^{-2}$ e che $(k_\infty - k)$ dipenda da M . Se quindi questi sono i

soli parametri coinvolti, un ragionamento dimensionale dà

$$k_{\infty} - k \propto \frac{M^2}{R^2} \quad (13.13)$$

da cui un valore critico R_c per il raggio legato alla criticità $k = 1$

$$R_c \propto \frac{M}{\sqrt{k_{\infty} - 1}} \quad (13.14)$$

La costante di proporzionalità che rende la precedente un'uguaglianza dipende dalla geometria e per una forma sferica vale π .

$$R_c = \frac{\pi M}{\sqrt{k_{\infty} - 1}} \quad (13.15)$$

La stima per un reattore a uranio naturale moderato a grafite dá $R_c = 5$ m. La dimensione può essere ridotta, mantenendo le condizioni di criticità, se si circonda la pila del reattore con del materiale che *rifletta* all'interno della pila i neutroni che vogliono uscirne.

Si vedano ora i tempi caratteristici coinvolti nel processo di moltiplicazione neutronica. La costante di tempo τ che caratterizza i neutroni in un reattore comprende il tempo necessario a moderarli, dell'ordine di 10^{-6} s, e quello associato alla diffusione a energie termiche prima dell'assorbimento, dell'ordine di 10^{-3} s. Supponendo di avere N neutroni al tempo t , ce ne saranno mediamente kN al tempo $t + \tau$, k^2N al tempo $t + 2\tau$, e così via. L'accrescimento dN del loro numero in un intervallo di tempo dt è

$$dN = (kN - N) \frac{dt}{\tau}, \quad \text{da cui} \quad N(t) = N_0 e^{(k-1)t/\tau} \quad (13.16)$$

Se $k = 1$ allora $N = \text{cost.}$, ovvero il modo desiderato di operatività di un reattore. Se $k < 1$ il numero dei neutroni decade esponenzialmente col tempo, e se invece $k > 1$ esso cresce esponenzialmente col tempo, con una costante caratteristica espressa da $\tau/(k - 1)$.

Un reattore supercritico dell'1% ($k = 1.01$) ha una costante temporale dell'ordine di 0.1 s, da cui la *necessità* di poter governare celermente il controllo dei parametri che determinano il valore del fattore k di moltiplicazione di un reattore. Il controllo viene praticamente attuato mediante inserzione o estrazione di barre di cadmio nel volume attivo della pila, dato che il cadmio ha un altissimo potere d'assorbimento di neutroni termici.

13.4 Il reattore nucleare preistorico di Oklo

L'abbondanza relativa di ^{235}U nei giacimenti terrestri di uranio, circa due miliardi di anni fa, era dell'ordine del 3.813%, sufficientemente maggiore

di quella attuale, che è 0.7202%. Questo fa supporre che si potessero raggiungere condizioni di criticità senza dover arricchire in ^{235}U . Ciò si è in effetti prodotto spontaneamente in almeno una occasione. Le condizioni in questione hanno comportato la presenza di una concentrazione di uranio sufficientemente alta, tipicamente maggiore del 10% della massa totale, unitamente ad una concentrazione ridotta di materiali i cui nuclei abbiano un'alta sezione d'urto di assorbimento per neutroni, e contemporaneamente la presenza di sufficiente acqua quale moderatore, maggiore del 50% della massa totale.

Queste condizioni hanno caratterizzato la zona di depositi di minerali uraniferi di Oklo, nel Gabon.

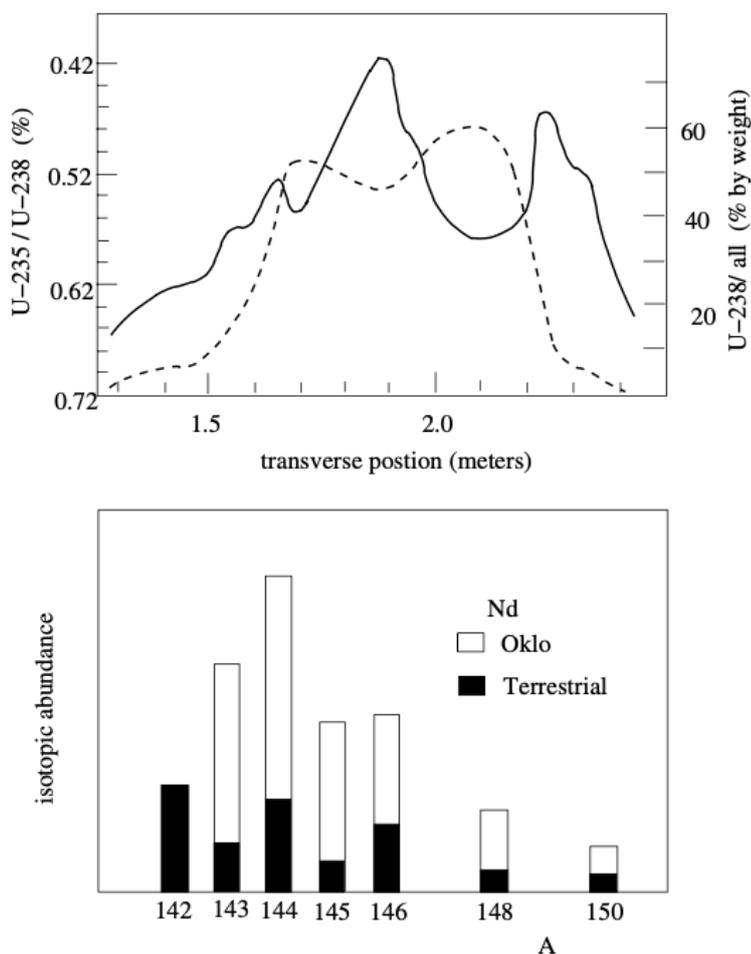


Figura 13.9: Composizione dei depositi di Oklo.

Ciò è sostanzialmente legato al fatto che circa due miliardi di anni fa si svilupparono sulla Terra delle alghe verdi-azzurre, micro-organismi in grado di effettuare la fotosintesi clorofilliana. La loro diffusione determinò lo sviluppo

dell'atmosfera ad alto contenuto di ossigeno che caratterizza ancora oggi la Terra.

L'uranio è solubile in acqua solo in presenza di ossigeno, quindi è stato l'aumento dei livelli d'ossigeno a permettere la soluzione di uranio in acqua e il suo conseguente trasporto fino a luoghi in cui poteva depositarsi in concentrazioni crescenti. Un ruolo importante è stato poi giocato dalla particolare conformazione del terreno in cui si trova la vena uranifera di Oklo che con un'inclinazione di circa 45° permise l'accumulo di acqua in un serbatoio naturale dove l'ossido di uranio si poteva concentrare.

Dalla figura [13.10](#) si nota che nel minerale di questo deposito il rapporto fra ^{235}U e ^{238}U scende quasi fino allo 0.42 %, e oltretutto vi è presenza di prodotti di fissione. Quindi una parte di ^{235}U è stata utilizzata prima dell'estrazione del minerale dalla miniera!

Si suppone che la struttura naturale abbia costituito una sorta di reattore che ha funzionato in condizione \sim critica per circa 10^6 anni in un periodo situato grosso modo 1.8×10^9 anni fa.

Un risultato interessante degli studi sul reattore naturale di Oklo è il limite stringente ottenuto in merito alla dipendenza dal tempo del valore di costanti fondamentali. Questo viene dall'osservazione che l'abbondanza in Oklo del nuclide ^{149}Sm è quella tipica degli scarti di un reattore, ovvero circa 40 volte inferiore al valore dell'abbondanza naturale dell'isotopo, pari al 13.8%. Un'abbondanza così bassa è dovuta alla cattura risonante di neutroni termici che trasformano ^{149}Sm in ^{150}Sm .

La cattura di neutroni termici sul nuclide (A, Z) dipende dalla presenza di stati altamente eccitati del nuclide $(A + 1, Z)$ che possono decadere o emettendo un fotone o un neutrone di energia $E_n \sim kT \sim 0.2 \text{ eV}$.

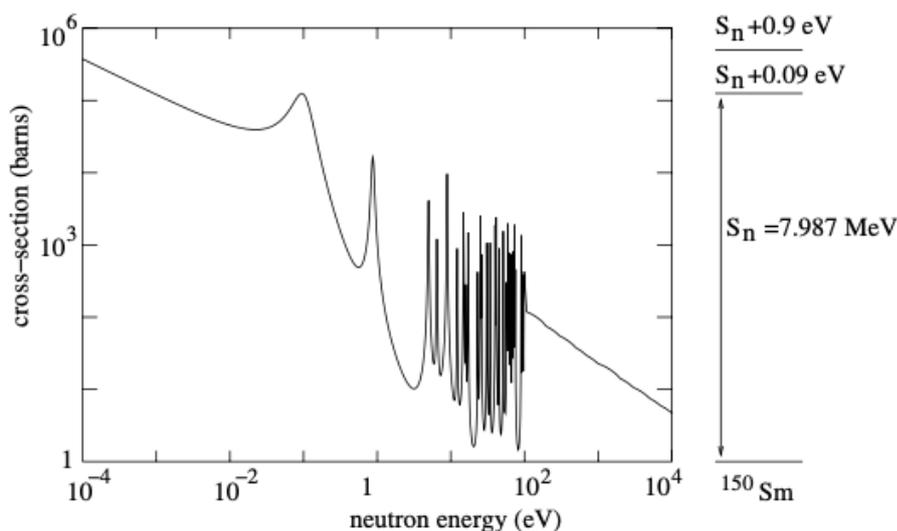


Figura 13.10: Sezione d'urto di cattura radiativa nel ^{149}Sm .

Lo stato eccitato del nuclide $(A + 1, Z)$ ha quindi, rispetto al suo stato fondamentale, un'energia $E \sim S_n + 0.02 \text{ eV}$, dove $S_n \simeq 8 \text{ MeV}$ è l'energia di estrazione del neutrone. Se questo tipo di cattura risonante di neutroni termici sul ^{149}Sm era attiva anche 1.8×10^9 anni fa, ciò significa che il valore energetico del livello è cambiato meno di 0.02 eV nello stesso periodo, ovvero un limite al cambiamento inferiore a 10^{-8} .

Poichè la posizione dei livelli nucleari dipende dal valore di costanti fondamentali, il limite ottenuto si riflette sul limite all'eventuale cambiamento del valore delle costanti fondamentali nello stesso arco di tempo. Siccome l'1% circa dell'entità energetica dei livelli è di origine elettrostatica, un limite di 10^{-8} sul cambiamento del valore dei livelli può essere conservativamente considerato come un limite di 10^{-6} sul cambiamento del valore della costante di struttura fine nell'arco di 2 miliardi di anni.

Capitolo 14

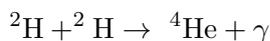
Fusione nucleare

Il grafico in figura [14.1](#) suggerisce un'alternativa alla fissione per estrarre energia dai nuclei, partendo dai nuclei più leggeri e risalendo la curva verso i nuclei più stabili. Se si fondono due nuclei leggeri sino a formare un nucleo con $A < 56$ si ha un rilascio d'energia.

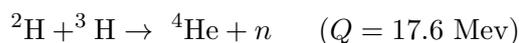
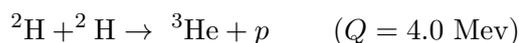
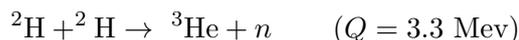
La fusione presenta chiari vantaggi rispetto alla fissione, come sorgente d'energia: i nuclei leggeri sono abbondanti e facili da reperire e i prodotti della fusione sono anch'essi leggeri e non radioattivi. C'è però anche un significativo svantaggio rispetto alla fissione, ovvero la necessità di vincere la mutua repulsione coulombiana fra due nuclei per riuscire a fonderli.

La fissione indotta da neutroni non richiede il superamento di alcuna barriera coulombiana per cui sono sufficienti neutroni incidenti di basse energie, per i quali oltretutto la sezione d'urto con l' ^{235}U cresce al calare della loro energia cinetica. Una volta superata la barriera coulombiana la fusione fra due nuclei diventa molto probabile in quanto i due nuclei si sovrappongono evolvendo verso uno stato di minima energia. Il processo base della fusione risulta quindi più semplice da capire rispetto alla fissione.

La più elementare reazione di fusione concepibile, $p+p \rightarrow {}^2\text{He}$, non può aver luogo, data l'instabilità di ${}^2\text{He}$. Una reazione di fusione possibile è invece



in cui il ruolo del fotone γ è essenzialmente di bilanciare l'energia, dato che ${}^4\text{He}$ non ha stati eccitati. L'energia rilasciata è $Q = 23.8$ MeV, superiore alle energie di separazione da ${}^4\text{He}$ sia del protone che del neutrone. Sono però più probabili le reazioni



Più è stabile il prodotto finale, maggiore è l'energia rilasciata nel processo. La fusione in step successivi di quattro protoni a formare ${}^4\text{He}$, che si vedrà

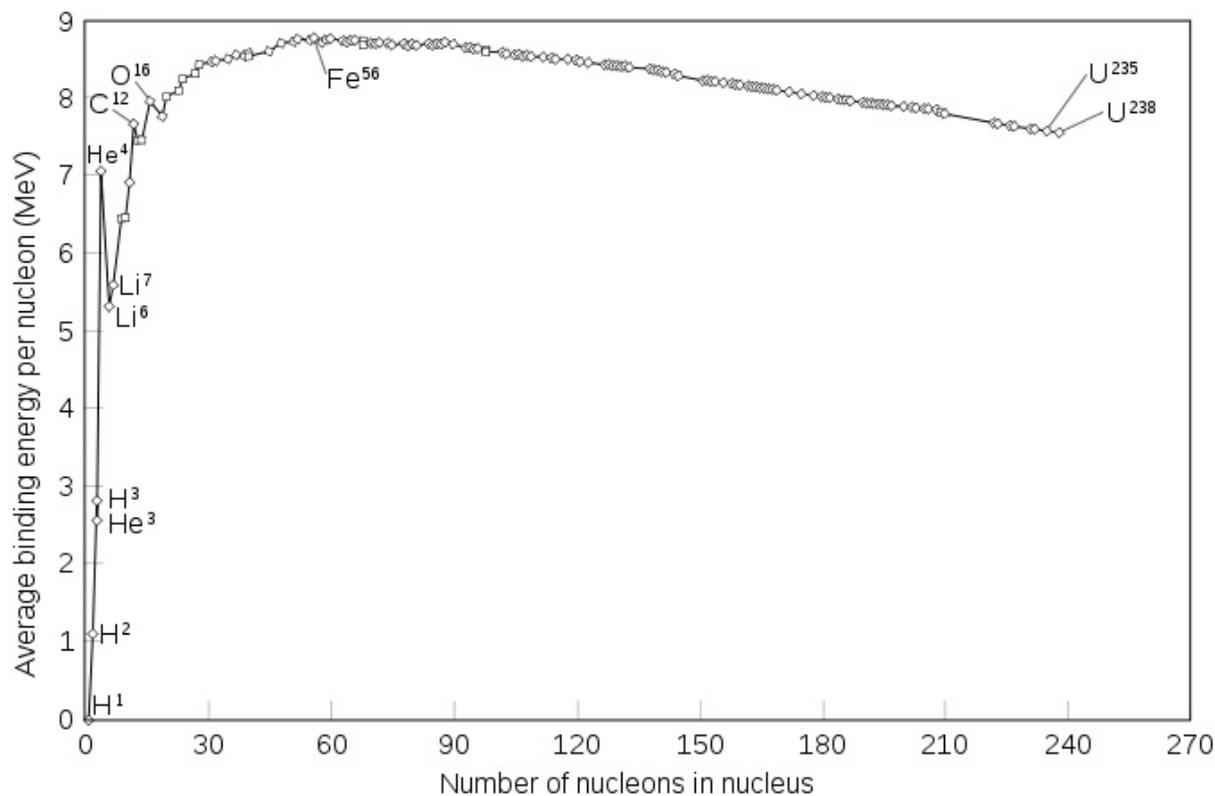
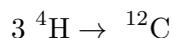


Figura 14.1: Energia media di legame per nucleone $|B/A|$.

a fine capitolo, è responsabile dell'energia termonucleare rilasciata in stelle di tipo solare. Il passo successivo in una stella, quando tutto l'idrogeno disponibile si è ormai fuso in elio, è la fusione dell'elio. La reazione più semplice da immaginare, ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$ non è osservata in quanto il ${}^8\text{Be}$ si disgrega in due ${}^4\text{He}$ in un tempo proporzionale a quello con cui si è formato ($\sim 10^{-16}$ s). Ha invece luogo un processo più complicato



La probabilità che tre particelle interagiscano in uno stesso punto contemporaneamente è però trascurabile. Nelle stelle il processo avviene in due step: si produce dapprima una piccola concentrazione in equilibrio di ${}^8\text{Be}$, quindi si ha la cattura di una α sul ${}^8\text{Be}$. Questo è un processo risonante nella produzione di ${}^{12}\text{C}$, quindi la sezione d'urto diventa abbastanza grande da dare una ragionevole probabilità di cattura della particella α prima che il ${}^8\text{Be}$ si disgreghi.

L'alta barriera coulombiana nelle reazioni dell'elio implica che esso può *bruciare* soltanto nelle stelle più calde e vecchie. A temperature ancora più alte possono aver luogo nelle stelle altre reazioni di fusione che procedono sino alla formazione di ${}^{56}\text{Fe}$.

14.1 Caratteristiche della fusione

14.1.1 Rilascio energetico

Il calcolo dell'energia rilasciata nel processo di fusione è più diretto che per la fissione, basta calcolare il Q valore della reazione appropriata. Nella gran parte dei casi, si tratti di applicazioni pratiche o di processi stellari, le particelle interagenti hanno energie cinetiche comprese nell'intervallo $1 \div 10$ keV, quindi piccole a confronto dei Q -valori coinvolti che sono di alcuni MeV. Le energie rilasciate e l'energia finale totale dei prodotti di reazione b ed Y , coincidono sostanzialmente col Q valore

$$\frac{1}{2}m_b v_b^2 + \frac{1}{2}m_Y v_Y^2 \simeq Q \quad (14.1)$$

Trascurando ragionevolmente anche gli impulsi iniziali, quelli nel canale d'uscita sono uguali in modulo e opposti in verso

$$m_b v_b \simeq m_Y v_Y \quad (14.2)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_b v_b^2 &\simeq \frac{Q}{1 + m_b/m_Y} \\ \frac{1}{2}m_Y v_Y^2 &\simeq \frac{Q}{1 + m_Y/m_b} \end{aligned} \quad (14.3)$$

che permettono di calcolare la distribuzione in energia per le reazioni di fusione elementari viste nel paragrafo precedente. La particella più leggera prende la parte maggiore dell'energia disponibile

$$\frac{m_b v_b^2/2}{m_Y v_Y^2/2} = \frac{m_Y}{m_b} \quad (14.4)$$

Nel caso della reazione deuterio-trizio ciò assegna al neutrone prodotto l'80% dell'energia disponibile, e nella reazione deuterio-deuterio il neutrone o il protone emessi acquisiscono il 75% dell'energia disponibile.

14.1.2 Rateo di fusione

La fusione tra due nuclei può come detto aver luogo se si riesce a vincere la repulsione coulombiana fra le loro cariche protoniche; l'energia potenziale coulombiana fra i due nuclei vale

$$U_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} \quad (14.5)$$

con Z_1 e Z_2 i numeri atomici dei due nuclei di raggi R_1 ed R_2 . La quantità $(R_1 + R_2)$ rappresenta dunque la distanza classica di massimo avvicinamento possibile fra i due nuclei. Ricordando che si può porre $R = R_0 A^{1/3}$ si

ha

$$U_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} \quad (14.6)$$

Se si considera ad esempio un caso per cui $A_1 \approx A_2 \approx 2Z_1 \approx 2Z_2 = 8$, si ottiene $U_C \approx 4.8$ MeV, per l'ammontare di energia E che dovrebbe essere fornita ai due nuclei onde permettere loro di superare la barriera coulombiana. È una quantità d'energia relativamente ridotta che si può ottenere facilmente accelerando uno dei due nuclei con sistemi elettrostatici quali ad esempio acceleratori di Crockroft-Walton o Van de Graaff. Ciò che si ottiene però al momento dell'urto è che quasi tutti i nuclei interagiscono elasticamente; affinché la fusione abbia luogo è infatti anche necessario che i due nuclei permangano vicini per un certo tempo che può eccedere quello in gioco durante l'urto indotto da fasci accelerati, tranne nei rari casi in cui l'urto che si produce è centrale, ovvero ha luogo con parametro d'urto $b \simeq 0$.

Un modo che la natura ha trovato per ottenere le condizioni che favoriscono la fusione è di riscaldare a sufficienza una miscela "confinata" di nuclei onde fornire loro abbastanza energia termica da permettergli di superare la barriera coulombiana, e ciò ha luogo nella formazione di una stella grazie all'intervento dell'interazione gravitazionale che "confina" e favorisce il "riscaldamento". Si può stimare la temperatura necessaria affinché la fusione possa aver luogo in una stella secondo quanto detto, ricordando il valore della costante k_B di Boltzmann ($k_B = 8.61673324 \times 10^{-11}$ MeV K⁻¹), da cui

$$T \simeq \frac{4.8}{k_B} \simeq 5.6 \times 10^{10} \text{ K} \quad (14.7)$$

che è però un valore molto superiore a quello tipicamente presente all'interno della maggior parte delle stelle che è dell'ordine di $10^7 \div 10^8$ K. Fu proprio questo semplice risultato che portò molti a rifiutare inizialmente l'idea di A. Eddington che l'energia delle stelle provenisse da reazioni di fusione nucleare al loro interno. Questo fatto rappresenta oltretutto anche uno degli ostacoli maggiori da superare per riuscire ad ottenere la fusione controllata in un reattore.

Le reazioni di fusione hanno in realtà luogo a temperature inferiori a quella stimata e ciò grazie alla combinazione di due fatti.

- Il primo e più importante è l'effetto tunnel, grazie al quale per ottenere la fusione non si deve necessariamente mettere in gioco un'energia superiore a quella dell'intera barriera coulombiana. Ricordando quanto detto a proposito del decadimento α , si ha che la penetrazione della barriera dipende da un certo numero di fattori il più importante dei quali è il fattore G di Gamow che dipende dalle velocità relative e che per due nuclei interagenti con numeri atomici Z_1 e Z_2 e masse m_1 ed

m_2 , può essere scritto in funzione dell'energia E come

$$G(E) = \sqrt{\frac{E_G}{E}} \quad \text{con} \quad E_G = 2m_r c^2 (\pi\alpha Z_1 Z_2)^2 \quad (14.8)$$

dove α è la costante di struttura fine ed $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, cioè la massa ridotta del sistema dei due nuclei in procinto di fondersi.

La probabilità di attraversamento della barriera, e quindi di fusione tra i due nuclei, è proporzionale ad $e^{-G(E)}$, e quindi aumenta all'aumentare di E . Se la si considera ad esempio per la fusione di due protoni all'interno di una stella tipica alla temperatura di 10^7 K, si ha $E_G \simeq 490$ keV ed $E \simeq 1$ keV, da cui si ottiene una probabilità di fusione estremamente bassa, proporzionale ad $e^{-22} \simeq 10^{-9.55}$.

- Il secondo fatto che unitamente al primo rende ragione dei ratei dei processi di fusione all'interno delle stelle, dipende dalla forma maxwelliana delle distribuzioni di energia al loro interno, per cui anche alle temperature di $10^7 \div 10^8$ K, vi sono comunque nuclei con energie cinetiche superiori a quella media della distribuzione, sulla coda alta della stessa e con valori quindi più adatti a favorire la fusione. È la cooperazione tra questi due effetti che favorisce la fusione nucleare in una stella.

Si consideri la fusione fra due tipologie di nuclei a e b , presenti in equilibrio termico alla temperatura T , con densità n_a e n_b in un certo volume definito. Si supponga anche che T sia sufficientemente alta da far sì che i nuclei a e b costituiscano un *plasma* completamente ionizzato. Si assuma anche che le velocità delle due tipologie di nuclei siano distribuite secondo Maxwell-Boltzmann, per cui la probabilità che vi siano due nuclei con velocità relativa v compresa nell'intervallo $(v + dv)$ è data da

$$P(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_r}{kT}\right)^{3/2} e^{(-mv^2/2kT)} v^2 dv \quad (14.9)$$

con m_r la massa ridotta del sistema dei due nuclei.

Detta σ_{ab} la sezione d'urto del processo di fusione si ha dunque, per il rateo R_{ab} delle reazioni di fusione per unità di volume

$$R_{ab} = n_a n_b \langle \sigma_{ab} v \rangle \quad (14.10)$$

con le parentesi $\langle \rangle$ che indicano la media, ovvero

$$\langle \sigma_{ab} v \rangle \equiv \int_0^\infty \sigma_{ab} v P(v) dv \quad (14.11)$$

Tenendo conto che molte sezioni d'urto nucleari a bassa energia mostrano un andamento tipicamente proporzionale all'inverso dell'energia cinetica E del

proiettile, e ricordando il ruolo dell'effetto tunnel, si può scrivere la sezione d'urto di fusione come

$$\sigma_{ab}(E) = S(E) \frac{1}{E} e^{-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}} \quad (14.12)$$

dove $S(E)$ è una funzione lentamente variabile di E che esprime i dettagli dei meccanismi nucleari dell'interazione. ¹ Sostituendo la [14.9] e la [14.12]

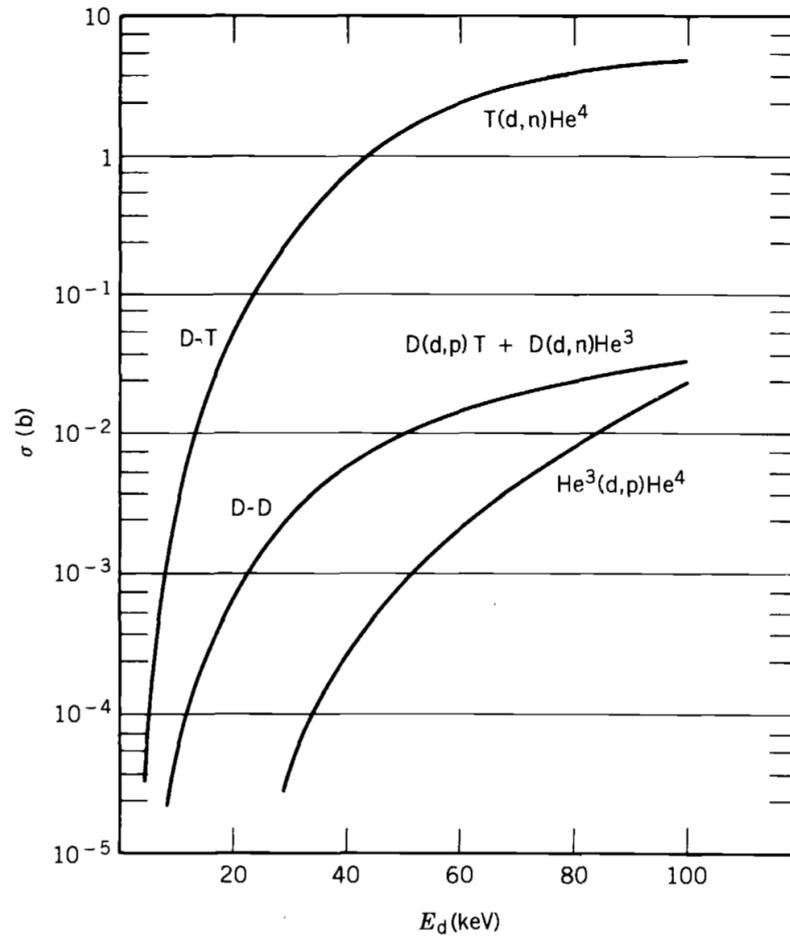


Figura 14.2: Sezioni d'urto per reazioni di fusione.

nella [14.11] si ha, per il rateo delle reazioni di fusione per unità di volume

$$R_{ab} = n_a n_b \sqrt{\frac{8}{\pi m_r}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty S(E) e^{-\left[\frac{E}{kT} - \sqrt{\frac{E_G}{E}}\right]} dE \quad (14.13)$$

¹L'assunzione di lenta variabilità per $S(E)$ implica ad esempio che si esclude la presenza di risonanze.

Il fatto che $S(E)$ sia lentamente variabile con E implica che il ruolo dominante nell'integrando sia svolto dal termine esponenziale e ne risulta che il termine Maxwelliano, calante con E , si combina con quello crescente con E dovuto all'effetto tunnel, dando luogo ad un massimo nell'integrando, detto *picco di Gamow*, in corrispondenza al valore

$$E = E_0 = \left[\frac{1}{4} E_G (kT)^2 \right]^{1/3} \quad (14.14)$$

Il processo di fusione può quindi aver luogo in corrispondenza del ristretto intervallo di energie $E_0 \pm \Delta E_0$, con

$$\Delta E_0 = \frac{4}{2^{1/3} \sqrt{3}} E_G^{1/6} (kT)^{5/6} \quad (14.15)$$

come mostrato in figura [14.3](#). Nel caso di due protoni che si fondono alla

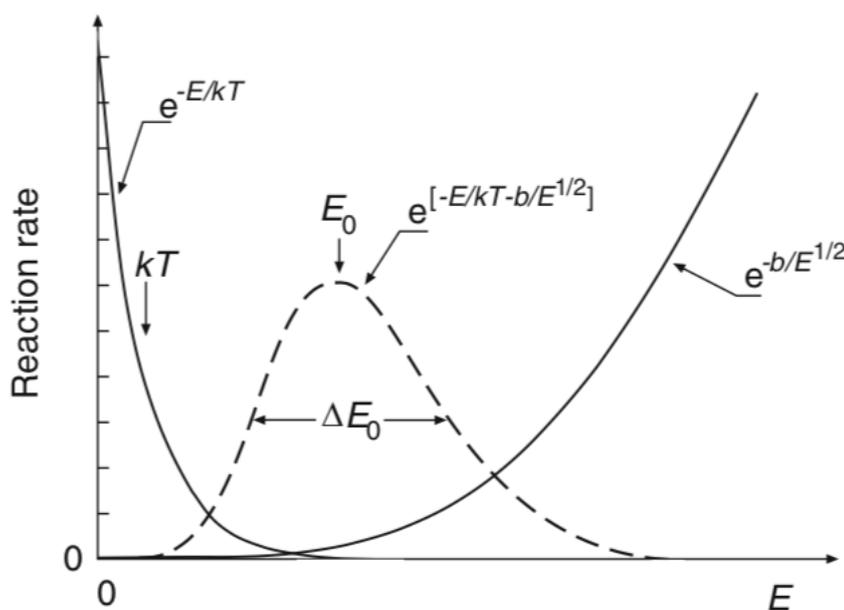
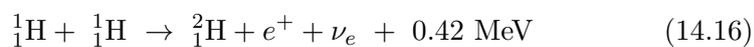


Figura 14.3: Picco di Gamow. In figura $b \equiv E_G$.

temperatura $T = 2 \times 10^7$ K (la temperatura interna del Sole è stimata essere $T_\odot \simeq 1.57 \times 10^7$ K), si ha $E_G = 493$ keV, $kT = 1.7$ keV, $E_0 = 7.2$ keV e $\Delta E_0 = 8.2$ keV.

Per tornare quindi all'energia prodotta in una stella, e considerando più precisamente il Sole, si ha che la quasi totalità dell'energia prodotta in esso proviene dal cosiddetto ciclo *protone-protone*, che ha più di un canale possibile, il principale dei quali, detto catena PP-I e illustrato in figura [14.4](#),

inizia con la fusione di nuclei di idrogeno e la conseguente produzione di nuclei di deuterio



Il deuterio si fonde quindi con altro idrogeno e produce ${}^3_2\text{He}$



Infine due nuclei di ${}^3_2\text{He}$ si fondono e formano ${}^4_2\text{He}$

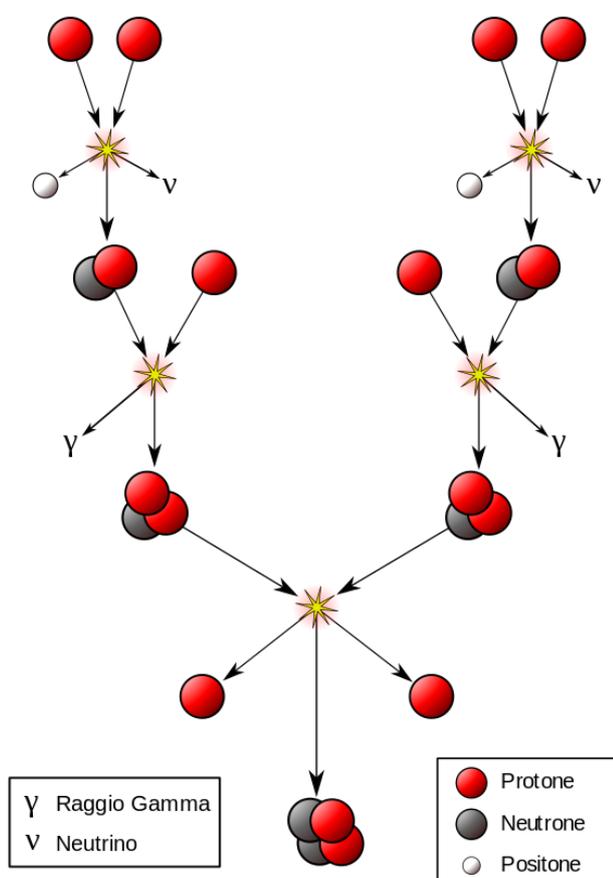
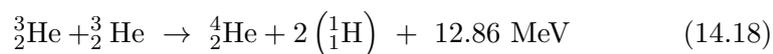


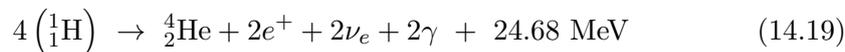
Figura 14.4: Catena PP-I



La notevole quantità d'energia rilasciata nel corso dell'ultima reazione di fusione è dovuta alla grande energia di legame dell' ${}^4_2\text{He}$.

La prima delle reazioni indicate, la [14.16](#), essendo dovuta all'interazione debole, procede con un rateo estremamente basso ed è questo il motivo della lunga *vita media* del Sole!

Il ciclo nella sua completezza può quindi essere descritto come



Dato il valore di T_\odot tutta la materia all'interno del Sole è ionizzata e costituisce un plasma. I positroni prodotti annichilano nel plasma con gli elettroni presenti rilasciando un'ulteriore energia di 1.02 MeV, per cui l'energia totale prodotta in ogni ciclo del tipo [14.19](#) ammonta a 26.72 MeV. Bisogna però tener conto che ogni neutrino che sfugge nello spazio porta via mediamente un'energia pari a 0.26 MeV. Ne risulta quindi che per ogni protone coinvolto nella catena PP-I vengono mediamente irraggiati 6.55 MeV.

La catena PP-I non è però la sola, vi sono altri cicli di fusione che contribuiscono all'energia prodotta in una stella e di cui si tratterà oltre, accennando alla nucleosintesi degli elementi nelle stelle.

Appendice A

Richiami di Relatività ristretta

Qui di seguito sono richiamati in forma riassuntiva alcuni concetti fondamentali della relatività ristretta necessari alla trattazione di gran parte dei fenomeni che coinvolgono nuclei e particelle.

Si ricordano i postulati fondanti, ovvero che le leggi della fisica sono indipendenti dall'osservatore purchè questo sia solidale con un qualsiasi sistema di riferimento inerziale, e inoltre la velocità c della luce nel vuoto è la massima velocità raggiungibile in natura, è indipendente dal sistema di riferimento inerziale e costituisce una costante universale.

Scelti allora due sistemi di riferimento inerziali S ed S' , cartesiani ortogonali, con le origini O ed O' coincidenti all'istante $t = t' = 0$ ed S' in moto con velocità $v = v_z = \beta c$ rispetto ad S , la relazione fra le coordinate di un qualsiasi evento descritto rispetto a un sistema di riferimento o rispetto all'altro, è data dalle trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

con $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta z') \\ x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Le componenti *covarianti* di un quadrivettore x sono indicate da apici in caratteri greci μ, ν , ecc., per cui: x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv$

$$(x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z) \equiv (x^0, \mathbf{x}).$$

Le componenti *controvarianti* di un quadrivettore x sono invece indicate da pedici in caratteri greci, per cui: x_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e quindi: $x \equiv (x_0 = x^0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z) \equiv (x_0, -\mathbf{x})$.

Il prodotto scalare di due quadrivettori x ed y è dato, con la solita regola di Einstein di somma sugli indici ripetuti, da

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (\text{A.3})$$

ed è una quantità invariante per le trasformazioni di Lorentz, che equivalgono alla composizione di una *rotazione* e di una *traslazione*; similmente nello spazio tridimensionale il prodotto scalare di due qualsiasi vettori è invariante per rotazioni.

Il segno "−" nel prodotto scalare implica che lo spazio quadrivettoriale non è Euclideo.

Quanto visto ora si può anche esprimere introducendo il tensore metrico $g^{\mu\nu}$ caratterizzato dall'aver i termini diagonali pari a $(1, -1, -1, -1)$ e uguali a 0 tutti i termini fuori dalla diagonale. I termini controvarianti del tensore metrico coincidono con quelli covarianti, cioè $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ e si ha

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{e} \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (\text{A.4})$$

Grazie al tensore metrico il prodotto scalare si può scrivere come

$$x \cdot y = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (\text{A.5})$$

Il prodotto scalare di un quadrivettore per se stesso, $x^\mu x_\mu = x^2$ è anche una quantità Lorentz-invariante.

Nel caso sia $x^2 = x^\mu x_\mu > 0$ il quadrivettore è detto di tipo *tempo*, se invece $x^2 = x^\mu x_\mu = 0$ esso è detto di tipo *luce*, se infine $x^2 = x^\mu x_\mu < 0$ esso è detto di tipo *spazio*.

La trasformazione di Lorentz fra due sistemi di riferimento inerziali si può anche scrivere come

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu \quad (\text{A.6})$$

e l'invarianza del prodotto scalare fra due quadrivettori implica

$$a^\mu_\nu a^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\nu \quad (\text{A.7})$$

con δ^λ_ν il simbolo di Kronecker.

Anche il vettore impulso \mathbf{p} e l'energia totale E di una particella definiscono un quadrivettore p , comunemente detto *quadrivettore energia-impulso* o *quadri-impulso*

$$p = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \quad (\text{A.8})$$

Le trasformazioni di Lorentz correlano anche le singole componenti del quadrivettore energia-impulso di una particella fra due diversi sistemi inerziali S ed S' :

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_z \right) \\ p'_x = p_x \\ p'_y = p_y \\ p'_z = \gamma \left(p_z - \beta \frac{E}{c} \right) \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Similmente a quanto visto per le coordinate, presi due quadrivettori energia-impulso, $p = (p^0, \mathbf{p})$ e $q = (q^0, \mathbf{q})$, di due diversi sistemi fisici, o particelle, il prodotto scalare dei due, $p \cdot q = (p^0 q^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q})$ è Lorentz-invariante, ed è quindi una costante del moto. Nel caso particolare del prodotto scalare di un quadrivettore energia-impulso per se stesso si ha

$$p \cdot p = p^\mu p_\mu = p^2 = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 = \text{cost.} \quad (\text{A.10})$$

che data l'indipendenza dal particolare sistema di riferimento inerziale, può essere considerato nel sistema a riposo con la particella, da cui $\mathbf{p} = 0$, e correlato con l'energia a riposo $E_0 = mc^2$ della particella

$$p \cdot p = \frac{E_0^2}{c^2} = m^2 c^2 \quad (\text{A.11})$$

con m la massa della particella.

L'impulso e l'energia totale di una particella di massa m , in moto con velocità \mathbf{v} rispetto a un osservatore inerziale sono dati da

$$\begin{cases} \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = m\gamma\beta c \\ E = m\gamma c^2 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

e ne consegue

$$\beta = \frac{c \mathbf{p}}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2} \quad (\text{A.13})$$

La più generale relazione fra impulso \vec{p} , energia E e velocità $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ può quindi essere scritta in una forma valida sia per corpi dotati di massa che per corpi di massa nulla, come ad esempio il fotone

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{\beta} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (\text{A.14})$$

Si può anche definire l'energia cinetica E_k di una particella rispetto a un osservatore inerziale, come differenza fra la sua energia E rispetto a tale osservatore e la sua energia a riposo E_0 , indipendente dal particolare sistema di riferimento inerziale

$$E = m\gamma c^2 = E_0 + E_k = mc^2 + E_k \quad (\text{A.15})$$

da cui, ricordando che $E = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}$,

$$E_k = E - mc^2 = mc^2 (\gamma - 1) = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \quad (\text{A.16})$$

e ancora

$$c |\vec{p}| = \sqrt{E_k^2 + 2mc^2 E_k} \quad (\text{A.17})$$

Considerando ora:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}} 2pc^2 = \frac{c^2}{E} p = \frac{p}{m\gamma} \quad (\text{A.18})$$

si ottiene:

$$dE = \frac{p}{m\gamma} dp \implies dE = v dp \quad (\text{A.19})$$

La somma e la differenza fra quadrivettori sono ancora dei quadrivettori, ne consegue che moltiplicando scalarmente per se stesse, o elevando a quadrato, somme o differenze di quadrivettori, si ottengono delle quantità Lorentz-invarianti. Se ad esempio si considerano quattro quadrivettori $q_i = (q_i^0, q_i^1, q_i^2, q_i^3)$ e se ne definisce la somma $q = \sum_i q_i$, anche $q \cdot q = q^2$ è una quantità Lorentz-invariante

$$q^2 = \left(\sum_i q_i^0 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^1 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^2 \right)^2 - \left(\sum_i q_i^3 \right)^2 \quad (\text{A.20})$$

Se q_i è il vettore energia-impulso di un gruppo di particelle, allora $q \cdot q = q^2$ è connesso al quadrato dell'energia a riposo del sistema fisico costituito da quel gruppo di particelle.

A.1 Coordinate parallele e trasverse

Trattando di decadimenti o di interazioni fra particelle o fra particelle e nuclei, spesso ci si trova nella condizione in cui il sistema fisico e la struttura sperimentale sono meglio descritti se ci si riferisce a una geometria spaziale con simmetria cilindrica, in cui l'asse z di simmetria è parallelo alle velocità delle particelle incidenti o nel caso di decadimenti, è parallelo alla velocità della particella che decadrà, se questa è inizialmente in moto nel sistema di riferimento scelto.

è quindi utile riesprimere le trasformazioni di Lorentz e altri risultati già individuati in funzione di componenti parallele "||" e ortogonali, o trasverse, "⊥" alla direzione della velocità relativa \vec{v} fra due sistemi di riferimento inerziali. La [A.6](#) diventa allora, se le origini dei due sistemi coincidono per

$$t = t' = 0$$

$$\begin{cases} x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x_{\parallel}) \\ x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta x^0) \\ \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

dove $\beta = |\vec{v}|/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, x_{\parallel} è la componente di x nella direzione di \vec{v} , per cui $\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \vec{v}) \vec{v}/v^2$, e $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$.

In questo caso la trasformazione di Lorentz è definita da tre soli parametri, ovvero le tre componenti di \vec{v} . Se i due sistemi di riferimento fossero anche ruotati uno rispetto all'altro si sarebbe nel caso più generale in cui la trasformazione dipende da sei parametri tre dei quali sarebbero gli angoli di Eulero.

Come già visto precedentemente la trasformazione di Lorentz inversa dal sistema accentato a quello non accentato si ottiene sostituendo nelle [A.21](#) i termini accentati con i non-accentati e cambiando il segno della velocità

$$\begin{cases} x^0 = \gamma(x^{0'} + \beta x'_{\parallel}) \\ x_{\parallel} = \gamma(x'_{\parallel} + \beta x^0) \\ \vec{x}_{\perp} = \vec{x}'_{\perp} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Similmente si ha, per il quadrivettore energia-impulso

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} \equiv p^{0'} = \gamma(p^0 - \beta p_{\parallel}) \\ p'_{\parallel} = \gamma(p_{\parallel} - \beta p^0) \\ \vec{p}'_{\perp} = \vec{p}_{\perp} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Si introducono ora due variabili molto utili per l'analisi dei fenomeni dinamici relativistici. La prima è la *rapidità*, definita come

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \frac{E + cp_{\parallel}}{E - cp_{\parallel}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + cp_{\parallel}/E}{1 - cp_{\parallel}/E} = \operatorname{arctanh} \left(\frac{cp_{\parallel}}{E} \right) = \operatorname{arctanh}(\beta_L) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

e che risulta più appropriata della componente *longitudinale*¹ ($\beta_L = cp_{\parallel}/E$) della velocità, in quanto ha il vantaggio di essere additiva per variazioni longitudinali della velocità. Una particella con rapidità y in un definito sistema inerziale presenta cioè una rapidità pari ad $y + dy$ in un sistema di riferimento che si muove con rapidità dy nella direzione $-z$, rispetto al sistema di riferimento originale, come si può dedurre dalla formula relativistica di addizione delle velocità.

¹Dalla [A.13](#) si ha: $\vec{\beta} = \vec{\beta}_L + \vec{\beta}_{\perp}$.

Nella fisica sperimentale delle particelle e degli ioni a energie relativistiche si utilizza comunemente un'altra grandezza, legata alla rapidità e detta *pseudorapidità*, indicata con η e definita come

$$\eta = -\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right) \quad (\text{A.25})$$

dove ϑ è l'angolo compreso fra il tri-impulso \vec{p} della particella e la direzione positiva dell'asse del fascio incidente. Solitamente la distribuzione dei prodotti di reazione in funzione dell'angolo polare varia molto e bruscamente in prossimità dei piccoli angoli in avanti e dei grandi angoli all'indietro, riferendosi alla pseudorapidità anzichè all'angolo polare si hanno andamenti più dolci.

La pseudorapidità può essere espressa in funzione del tri-impulso ottenendo

$$\eta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|\vec{p}| + p_{\parallel}}{|\vec{p}| - p_{\parallel}}\right) = \operatorname{arctgh}\left(\frac{p_{\parallel}}{|\vec{p}|}\right) \quad (\text{A.26})$$

Si osservi che la pseudorapidità η si ottiene dalla rapidità y al limite quando la particella considerata ha un'energia a riposo mc^2 trascurabile rispetto al proprio quadri-impulso p , per cui $E \simeq p$. Si noti che comunque la pseudorapidità dipende esclusivamente dall'angolo polare e non dall'energia della particella. La rapidità permette anche di costruire la variabile Lorentz-invariante

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta\varphi)^2} \quad (\text{A.27})$$

che rappresenta la separazione angolare fra gli impulsi di due particelle, con φ l'angolo azimutale.

A.2 Legge relativistica del moto di una particella

La legge relativistica del moto di una particella di massa m si ottiene dalla seconda legge di Newton, ricordando che $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} \quad (\text{A.28})$$

Sviluppando la derivata si ha

$$m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v} = m\frac{d\left[(1-\beta^2)^{-1/2}\right]}{dt}\vec{v} = \frac{m}{2}\frac{\left(2\frac{v}{c^2}a_t\right)}{(1-\beta^2)^{3/2}}\vec{v} = m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta} \quad (\text{A.29})$$

La forza agente risulta quindi la somma di due termini, uno parallelo all'accelerazione e uno parallelo alla velocità. Non si può dunque definire alcuna

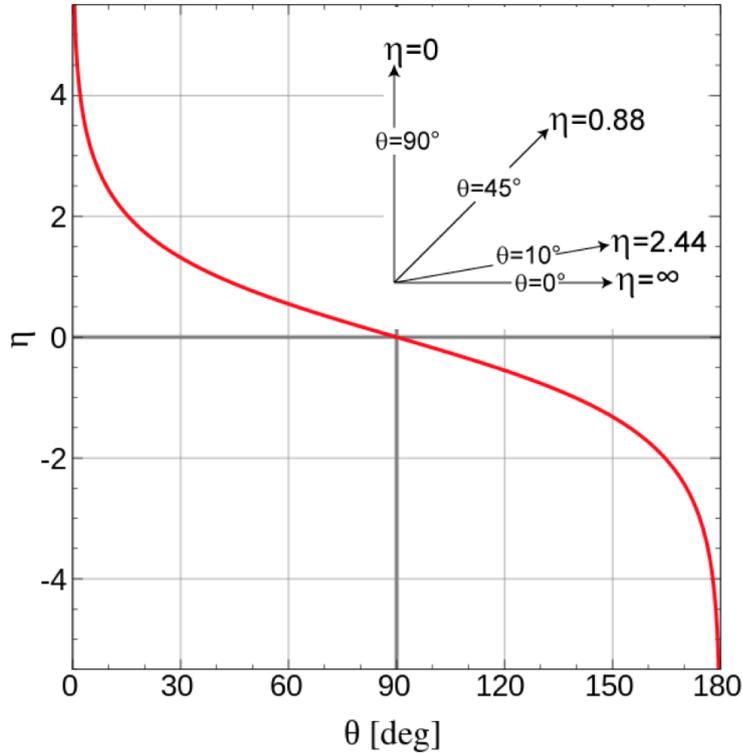


Figura A.1: Pseudorapidità η in funzione dell'angolo polare ϑ .

”massa” come il rapporto tra forza e accelerazione, e ne consegue che ad alte velocità la massa non rappresenta l'inerzia rispetto al moto. Moltiplicando scalarmente entrambi i membri della [A.29](#) per $\vec{\beta}$ si ottiene

$$\vec{F} \cdot \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \cdot \vec{\beta} + m\gamma^2 \beta^2 \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma (1 + \gamma^2 \beta^2) \vec{a} \cdot \vec{\beta} = m\gamma^3 \vec{a} \cdot \vec{\beta}$$

da cui

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{\beta}}{m\gamma^3} \quad (\text{A.30})$$

che sostituita in [A.29](#) dà

$$\vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\beta}) \vec{\beta} = m\gamma \vec{a} \quad (\text{A.31})$$

L'accelerazione è quindi anch'essa la somma di due termini, uno parallelo alla forza e uno parallelo alla velocità.

Forza e accelerazione risultano parallele ed equiverse in due soli casi, ovvero quando forza e velocità sono parallele, per cui $\vec{F} = m\gamma^3 \vec{a}$, o quando forza e velocità sono ortogonali, per cui $\vec{F} = m\gamma \vec{a}$. Le costanti di proporzionalità sono diverse nei due casi.

Appendice B

Cinematica relativistica del decadimento in due corpi

I decadimenti nucleari finora studiati coinvolgono spesso strutture *figlie* emesse da un nucleo *genitore* con energie simili o superiori agli equivalenti energetici delle masse delle particelle figlie stesse. Questi casi vanno quindi trattati secondo il corretto approccio relativistico, come del resto sarà necessario con i decadimenti di singole particelle.

Riferendosi ai concetti riportati in Appendice [A](#), si analizza ora il decadimento di una struttura o particella *genitore* in due strutture o particelle *figlie*, ovvero il decadimento in due corpi, che è anche la forma più semplice di reazione.

Si consideri il decadimento di una particella di massa M inizialmente a riposo rispetto a un osservatore inerziale solidale col sistema del laboratorio (SL), che in questo caso coincide con quello del centro di massa (CM), e siano m_1 ed m_2 le masse delle particelle figlie. Il quadri-impulso della particella genitore è quindi $P = (Mc, 0, 0, 0)$, e indicati con $p_1 = (E_1/c, \vec{p}_1)$ e $p_2 = (E_2/c, \vec{p}_2)$ i quadri-impulsi delle particelle figlie, la conservazione del quadri-impulso richiede che sia

$$P = p_1 + p_2 \quad \text{da cui,} \quad \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \quad (\text{B.1})$$

Per cui nel sistema (CM) le due particelle figlie sono emesse lungo la stessa direzione, in versi opposti con impulsi di uguale modulo. Si può dunque omettere il pedice nell'impulso e la conservazione dell'energia assume la forma

$$E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} = Mc^2 \quad (\text{B.2})$$

Raccogliendo e quadrando una prima volta si ottiene:

$$\begin{aligned} Mc^2 - \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} &= \sqrt{m_2^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \quad \implies \\ M^2 c^4 + (m_1 c^2 - m_2 c^2)(m_1 c^2 + m_2 c^2) &= 2Mc^2 \sqrt{m_1^2 c^4 + |\vec{p}|^2 c^2} \end{aligned}$$

quadrando nuovamente ed estraendo $|\vec{p}|^2$ si ha

$$\begin{aligned}
M^4c^2 + (m_1 - m_2)^2(m_1 + m_2)^2c^2 + 2M^2c^2(m_1 - m_2)(m_1 + m_2) &= \\
= 4M^2(m_1^2c^2 + |\vec{p}|^2) &\implies \\
|\vec{p}|^2 = \frac{M^4c^2 + (m_1 - m_2)^2(m_1 + m_2)^2c^2 - 2M^2m_1^2c^2 - 2M^2m_2^2c^2}{4M^2} &= \\
\frac{M^4c^2 + (m_1 - m_2)^2(m_1 + m_2)^2c^2 - M^2(m_1 + m_2)^2c^2 - M^2(m_1 - m_2)^2c^2}{4M^2} &=
\end{aligned}$$

da cui infine:

$$|\vec{p}| = \frac{\sqrt{[M^2c - (m_1 - m_2)^2c][M^2c - (m_1 + m_2)^2c]}}{2M} \quad (\text{B.3})$$

valida soltanto se

$$M \geq m_1 + m_2 \quad (\text{B.4})$$

che implica la possibilità per una particella di decadere soltanto se la sua massa supera la somma delle masse dei prodotti del decadimento.

Se dunque la massa di una particella supera la somma delle masse di altre due particelle, allora essa sarà instabile e potrà di conseguenza decadere in quelle due particelle figlie, a meno che il decadimento non sia interdetto dal rispetto di qualche altra legge di conservazione quale quella della carica, del momento angolare, ecc. Quella ora espressa è quindi una condizione necessaria, ma non sufficiente, all'avvenire di un particolare decadimento.

Va anche osservato che sia gli impulsi che le energie delle particelle figlie sono fissati dalle loro masse unitamente alla massa della particella genitore. Ciò invece non vale nel caso di decadimento in più di due particelle figlie: in tal caso l'impulso di una particella figlia può assumere qualsiasi valore compreso fra 0 e un certo valore massimo determinato dalle masse delle particelle coinvolte.

Tornando al decadimento in due corpi, le energie delle particelle figlie si ottengono dalla [B.2](#). Quadrando per E_1 ed E_2

$$E_1^2 = m_1^2c^4 + p^2c^2 \quad , \quad E_2^2 = m_2^2c^4 + p^2c^2$$

$$\text{da cui: } E_1^2 - m_1^2c^4 = p^2c^2 = E_2^2 - m_2^2c^4 \implies E_2^2 = E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4$$

$$\text{quindi: } E_2 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4}$$

Inoltre dalla [B.2](#)

$$E_1 + E_2 = Mc^2 \implies E_2 = Mc^2 - E_1$$

$$\text{da cui: } Mc^2 - E_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2c^4 + m_2^2c^4 + m_2^2c^4}$$

$$\text{e quadrando: } M^2c^4 - 2E_1Mc^2 = m_2^2c^4 - m_1^2c^4$$

da cui infine:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{M^2 c^2 + m_1^2 c^2 - m_2^2 c^2}{2M} \\ E_2 = \frac{M^2 c^2 + m_2^2 c^2 - m_1^2 c^2}{2M} \end{cases} \quad \text{e similmente,} \quad (\text{B.5})$$

Si noti anche che non c'è una direzione preferita per l'emissione della particella figlia, e il decadimento è quindi *isotropo*. Se però si sceglie la direzione di uno qualsiasi dei due prodotti del decadimento, ad esempio tramite il posizionamento di un rivelatore, allora la direzione d'emissione dell'altro risulta fissata dalla conservazione dell'impulso e come detto i prodotti del decadimento si muovono *back-to-back* nel sistema di riferimento del centro di massa del genitore.

Nel caso in cui le due particelle figlie abbiano masse identiche, $m_1 = m_2 = m$, come ad esempio nel decadimento $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, le formule [B.5](#) si semplificano con le energie delle due particelle figlie date da $E_1 = E_2 = Mc^2/2$, e l'impulso espresso da $|\vec{p}| = c\sqrt{M^2 - 4m^2}/2$.

è interessante anche il caso di decadimento in due corpi di una particella genitore *in volo*, ovvero descritta da un osservatore non a riposo con il sistema del suo centro di massa, ma in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. L'importanza di questo caso è chiara non appena si pensi che è spesso il solo modo di misurare la massa di particelle-genitore neutre, cioè di carica elettrica nulla.

Si scrivano i quadri-impulsi della particella genitore e delle due particelle figlie

$$P = (E/c, 0, 0, p) \quad (\text{B.6})$$

$$p_1 = (E_1/c, \vec{p}_{1\perp}, p_{1z}) \quad , \quad p_2 = (E_2/c, \vec{p}_{2\perp}, p_{2z})$$

nell'ipotesi di aver scelto l'asse z parallelo alla direzione di volo, e quindi alla velocità, della particella madre. La conservazione dell'impulso richiede allora che i vettori bidimensionali degli impulsi trasversi delle due particelle abbiano lo stesso modulo, la stessa direzione e versi opposti:

$$\vec{p}_{1\perp} = -\vec{p}_{2\perp} \equiv \vec{p}_{\perp} \quad (\text{B.7})$$

Le energie e le componenti lungo z degli impulsi delle particelle sono collegate ai valori nel sistema del CM da un *Lorentz boost* con velocità pari a quella della particella madre (vedi Appendice [A](#)). Indicando con un apice ' le variabili cinematiche nel CM, le trasformazioni di Lorentz per le particelle figlie sono

$$\begin{cases} E_1 = \gamma(E'_1 + vp'_{1z}) \\ p_{1z} = \gamma\left(p'_{1z} + \frac{\beta E'_1}{c}\right) \\ \vec{p}_{1\perp} = \vec{p}'_{1\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} E_2 = \gamma(E'_2 + vp'_{2z}) \\ p_{2z} = \gamma\left(p'_{2z} + \frac{\beta E'_2}{c}\right) \\ \vec{p}_{2\perp} = \vec{p}'_{2\perp} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

e ricordando le [A.13](#) dell'Appendice [A](#) si ha

$$\beta = \frac{c p}{E} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{E}{M c^2} \quad (\text{B.9})$$

Il problema è così risolto.

Si possono ora in primo luogo calcolare gli angoli che gli impulsi delle due particelle figlie fanno con l'asse z e l'uno rispetto all'altro, in funzione dell'impulso \vec{p} della particella genitore. A tale scopo è interessante affrontare il problema senza l'uso diretto delle trasformazioni di Lorentz, partendo dalla conservazione energia-impulso

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_2^2 c^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (\text{B.11})$$

Sostituendo nella [B.10](#) p_2^2 con $(\vec{p} - \vec{p}_1)^2$, si ottiene un'equazione che contiene l'impulso incognito p_1 e l'angolo ϑ_1 fra \vec{p}_1 e l'asse z . Risolvere per p_1 è una procedura lunga, anche se diretta, che fornisce

$$p_1 = \frac{(M^2 + m_1^2 - m_2^2) c^2 p \cos\vartheta_1 \pm 2E \sqrt{M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \text{sen}^2 \vartheta_1}}{2(M^2 + p^2 \text{sen}^2 \vartheta_1)} \quad (\text{B.12})$$

L'esistenza di valori reali per p_1 richiede che $(M^2 p'^2 - m_1^2 p^2 \text{sen}^2 \vartheta_1) \geq 0$ e questa condizione è soddisfatta per ogni angolo ϑ_1 se $(M p' / m_1 p) > 1$. In questo caso bisogna anche scartare la soluzione che prevede il segno " - " in quanto condurrebbe a valori negativi e privi di significato fisico per p_1 , con $\vartheta_1 > \pi/2$. Se d'altronde $(M p' / m_1 p) < 1$, allora i valori possibili per ϑ_1 sono superiormente limitati in quanto $\text{sen}\vartheta_{1max} = (M p' / m_1 p)$. In questo caso entrambi i segni danno risultati possibili: per ogni valore $\vartheta_1 < \vartheta_{1max}$ si hanno due possibili valori di p_1 e quindi corrispondentemente anche due possibili valori di p_2 .

Per il decadimento in due corpi si può anche dedurre la correlazione tra l'angolo ϑ_1 che la particella figlia 1 fa nel sistema SL con la direzione della velocità della particella genitore, e l'angolo corrispondente ϑ_1^* nel sistema CM, ottenendo

$$\text{tg}\vartheta_1 = \frac{\text{sen}\vartheta_1^*}{\gamma(v/v_1^* + \text{cos}\vartheta_1^*)} \quad (\text{B.13})$$

con v modulo della velocità in SL della particella genitore, e v_1^* modulo in CM della velocità della particella figlia.

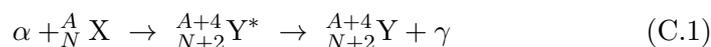
Il passo successivo, la trattazione della dinamica relativistica del decadimento in tre corpi, fornisce risultati utili ad esempio anche quando si vogliono assegnare i corretti numeri quantici di spin, parità, isospin ai mesoni.

Appendice C

La scoperta del neutrone

Nel 1930, W.Bothe ed H.Becker osservarono che se le particelle α emesse dal polonio con energie cinetiche dell'ordine dei 5 MeV¹, vengono fatte incidere su alcuni elementi leggeri quali ${}^9_4\text{Be}$, ${}^{11}_5\text{B}$ o ${}^7_3\text{Li}$, si osservava la produzione di una inusuale radiazione molto penetrante. Il berillio risultava il bersaglio più efficace in quanto, a parità di intensità di particelle α incidenti, forniva i fasci più intensi della nuova radiazione.

Questa non risultava poi sensibile all'azione di campi elettrici e per questo si pensò potesse trattarsi di radiazione γ , secondo uno schema di reazione



ma non si conoscevano radiazioni γ così penetranti, e vi erano inoltre dei dettagli dei risultati sperimentali di difficile interpretazione, supponendo si trattasse di raggi γ .

Due anni dopo I.Joliot-Curie e F.Joliot mostrarono che tale nuova radiazione era in grado di attraversare spessori di materiali pesanti quali il piombo, anche tre volte superiori a quanto potessero fare i raggi γ più energetici emessi dalle sorgenti radioattive note. Ponendo inoltre paraffina o altri bersagli idrogenati sul percorso della radiazione penetrante sconosciuta, questa estraeva da tali bersagli, protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV.

Ciò poteva apparire non inconsistente con l'ipotesi di γ incidenti che diano luogo a diffusione Compton, ma le energie richieste a tali γ dovrebbero essere irrealisticamente grandi, dell'ordine di circa 50 MeV, per estrarre dai nuclei protoni con energie cinetiche fino a ≈ 5.3 MeV, ovvero con impulsi fino a ≈ 100 MeV/ c . Ettore Majorana congetturò che il tipo di interazione che aveva luogo fra la nuova radiazione e i protoni, richiedeva che la prima fosse costituita da particelle neutre e non da γ .

Sulla scorta dei risultati ottenuti dai coniugi Joliot-Curie, J.Chadwick riprodusse le misure con paraffina e con altri bersagli idrogenati, quindi ricchi di

¹L'isotopo ${}^{208}\text{Po}$, con una vita media di 2.9 anni, emette α da 5.21 MeV; l'isotopo ${}^{209}\text{Po}$, con una vita media di 103 anni, emette α da 4.98 MeV; l'isotopo ${}^{210}\text{Po}$, con una vita media di 138.4 giorni, emette α da 5.41 MeV.

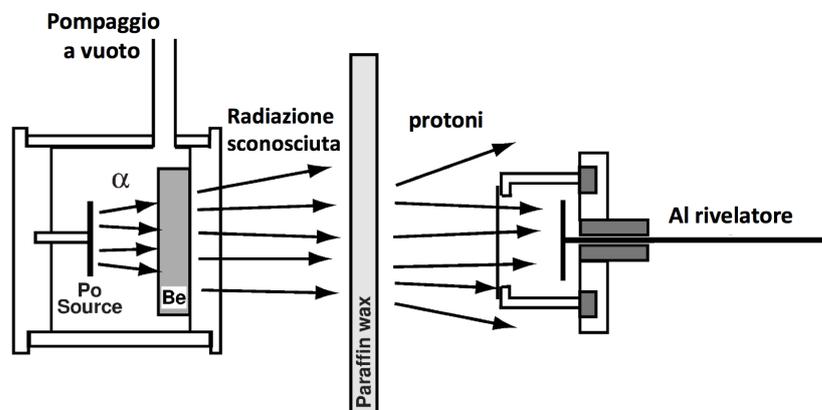


Figura C.1: Schema delle misure dei coniugi Joliot-Curie e di Chadwick.

protoni bersaglio, misurando il range dei protoni prodotti.

Egli osservò che l'ipotesi di avere γ da ≈ 50 MeV contrastava con l'applicazione della conservazione dell'energia alle reazioni coinvolte nelle misure sperimentali



in quanto

$$c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{13}_6\text{C}) \right] \simeq 3727.4 + 8392.8 - 12109.6 \simeq 11 \text{ MeV} \quad (\text{C.3})$$

mentre invece le conservazioni di energia e impulso risultavano soddisfatte ipotizzando che nella reazione fosse prodotta una particella neutra di massa simile a quella del protone



per cui

$$\begin{aligned} c^2 \left[M_\alpha + M({}^9_4\text{Be}) - M({}^{12}_6\text{C}) - M_n \right] &\simeq \\ &\simeq 3727.4 + 8392.8 - 11175.0 - M_n c^2 \simeq (945.2 - M_n c^2) \text{ MeV} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

da cui si ottiene che se $M_n = M_p$ allora l'energia cinetica massima della particella neutra n prodotta è pari a $\simeq 6$ MeV.

Chadwick provò così che i risultati ottenuti non erano consistenti col fatto che la nuova radiazione fosse costituita da raggi γ , in quanto ciò avrebbe comportato la violazione della conservazione di energia e impulso, mentre erano invece consistenti con l'avvenuta produzione di particelle di massa sostanzialmente equivalente a quella dei protoni, ma elettricamente neutre, come congetturato da Majorana, ovvero i neutroni.

Appendice D

Struttura iperfine

Si analizza ora un semplice esempio di struttura iperfine dello spettro di un atomo per vedere come questo sia legato ai valori dei momenti del nucleo di quell'atomo.

Si consideri per semplicità un atomo con un solo elettrone e un nucleo sferico di momento angolare totale J . Sia I lo stato di momento angolare dell'atomo. Dall'analisi spettroscopica si ha che la massima lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica emessa vale λ_0 .

L'interazione fra il momento di dipolo magnetico nucleare $\boldsymbol{\mu}_J$ e il campo magnetico \mathbf{B}_e dovuto al moto orbitale dell'elettrone atomico, determina una variazione di energia degli stati data da

$$U = -\boldsymbol{\mu}_J \cdot \mathbf{B}_e \quad (\text{D.1})$$

Inoltre $\boldsymbol{\mu}_J$ è parallelo a \mathbf{J} e \mathbf{B}_e , dato il segno della carica dell'elettrone, è antiparallelo ad \mathbf{I} . Conglobando i vari fattori nel termine A/\hbar^2 , detto *costante iperfine*, si ha

$$U = \frac{A}{\hbar^2} \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \quad (\text{D.2})$$

Questo contributo energetico risulta molto piccolo rispetto alle energie tipiche dei livelli atomici, e lo si può quindi considerare una *perturbazione*. Con ciò si ha, al primo ordine perturbativo, per le energie degli stati dell'atomo

$$E = E_0 + E', \quad \text{con} \quad E' = \langle U \rangle = \frac{A}{\hbar^2} \langle \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \rangle \quad (\text{D.3})$$

Per l'interazione elettrone-nucleo, I e J non sono quindi più buoni numeri quantici per descrivere gli stati dell'atomo, per cui si considera il momento angolare totale dell'atomo

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J} \quad (\text{D.4})$$

con $|I - J| \leq F \leq (I + J)$. Quadrando la D.4 si ricava

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^2 - \mathbf{I}^2 - \mathbf{J}^2) \quad (\text{D.5})$$

da cui i valori d'aspettazione

$$\langle \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)] \quad (\text{D.6})$$

Il termine perturbativo E' , modificando l'energia E_0 del livello imperturbato, determina quindi una separazione dello stato elettronico I eventualmente in più stati, da cui il nome *struttura iperfine*, tra i quali si possono instaurare transizioni elettromagnetiche. La transizione di maggior lunghezza d'onda è quella associata al salto quantico d'energia minore.

Se ad esempio si considera il caso $J = 3/2$, $I = 3/2$, $\lambda = 12.39 \text{ m}$, ne consegue $F = 0, 1, 2, 3$. La transizione a energia minore è allora quella tra $F = 1$ ed $F = 0$, per cui

$$\Delta E(F = 1 \rightarrow F = 0) = E_0 - \frac{11}{4}A - E_0 + \frac{15}{4}A = A \quad (\text{D.7})$$

Poichè inoltre si ha anche $\Delta E = 2\pi\hbar c/\lambda$, uguagliando e sostituendo si ottiene il valore di A

$$\Delta E = A = 100 \times 10^{-9} \text{ eV} \quad (\text{D.8})$$

Dalle misure di ΔE si possono quindi ottenere i valori di J .

Appendice E

Applicazioni decadimento α

E.0.1 Convertitore termoelettrico a plutonio

Il ^{238}Pu decade α , con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y, rilasciando un'energia cinetica $E = 5.49$ MeV. Il nucleo figlio ^{234}U ha una vita media $\tau_U \simeq 3.5 \times 10^5$ y. L'energia così prodotta può essere convertita in energia elettrica tramite un generatore radiotermico (RTG) e quello che equipaggia la sonda spaziale Voyager 2 ha un'efficienza del 5.5% in questo processo.

Il Voyager 2, lanciato il 20/08/1977, raggiunse la minima distanza da Saturno il 26/08/1981. Saturno dista dal Sole 9.5 U.A., dove 1 U.A. corrisponde alla distanza fra Terra e Sole.

a) Si calcoli con quanto plutonio era stato equipaggiato l'RTG del Voyager 2 sapendo che questo, al momento di massimo avvicinamento a Saturno, disponeva di una potenza elettrica $W_{Sat} = 395$ W.

b) Quale potenza elettrica aveva ancora disponibile il Voyager 2 quando, il 24/08/1989 sorvolò alla minima distanza Nettuno, che dista 30.1 U.A. dal Sole? Quale potenza elettrica ha ancora disponibile oggi Voyager 2?

c) Sapendo che i pannelli solari che equipaggiavano lo Skylab avevano un'area attiva di 730 m² e gli fornivano 10.5 kW, quale area avrebbero dovuto avere pannelli solari equivalenti che avessero equipaggiato Voyager 2, in grado di alimentarlo come ha fatto l'RTG?

Soluzione:

a) Il tempo di dimezzamento $T_{1/2} \simeq 88.03$ y di ^{238}Pu corrisponde ad una vita media

$$\tau_\alpha = T_{1/2}/\ln 2 \simeq 88.03/0.6931 = 127 \text{ y.}$$

Dato che $\tau_\alpha/\tau_U \simeq 3.6 \times 10^{-4} \ll 1$, si può considerare il nucleo figlio ^{234}U come praticamente stabile e trascurare il contributo dei suoi decadimenti al funzionamento del sistema RTG.

Supponendo che l'RTG sia stato caricato di plutonio al momento del lancio del Voyager 2, si associ ad esso il tempo $t_0 = 0$ giorni, e sia $t_1 = 1467$ giorni

il tempo associato al sorvolo di Saturno da parte del Voyager 2. Si calcoli ora, tenendo conto dell'efficienza del sistema RTG, il numero $\Delta N(t_1)$ di decadimenti al secondo che garantiscono una potenza di 395 Watt, ricordando che $1 \text{ Watt} = 6.2415 \times 10^{12} \text{ MeV/s}$

$$\Delta N(t_1) = \frac{395 \times 6.2415 \times 10^{12}}{5.49 \times 0.055} \simeq 8.1649 \times 10^{15} \quad (\text{E.1})$$

Lo scopo è però risalire alla massa di plutonio con cui è stato caricato il sistema RTG, ovvero al numero N_0 di atomi di plutonio presenti all'istante t_0 . Si esprime quindi $\Delta N(t_1)$ tenendo conto della [4.1](#), con $\lambda = \tau_\alpha$

$$\begin{aligned} \Delta N(t_1) &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} - N_0 e^{-(t_1+1)/\tau_\alpha} = N_0 \left(e^{-t_1/\tau_\alpha} - e^{-t_1/\tau_\alpha} e^{-1/\tau_\alpha} \right) = \\ &= N_0 e^{-t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right) \quad \text{da cui,} \\ N_0 &= \Delta N(t_1) e^{t_1/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

e sostituendo i valori

$$N_0 \simeq 3.37524 \times 10^{25}$$

Quindi, essendo pari a 244.06 g la massa molare del plutonio e ricordando il numero di Avogadro, si ha che la quantità di ^{238}Pu con cui è stato inizialmente caricato il dispositivo RTG ammonta a circa 13.7 kg.

b) Per rispondere alla seconda domanda si ponga $t_2 = 4387$ giorni il tempo associato al sorvolo di Nettuno da parte del Voyager 2. Poichè la potenza disponibile grazie al dispositivo RTG è in qualsiasi momento t_i sempre proporzionale ad $N_0 e^{-t_i/\tau_\alpha} \left(1 - e^{-1/\tau_\alpha} \right)$, si ottiene la potenza disponibile al momento del sorvolo di Nettuno come

$$W_{Net} = W_{Sat} \frac{e^{-t_2/\tau_\alpha}}{e^{-t_1/\tau_\alpha}} \simeq 370.9 \text{ W} \quad (\text{E.3})$$

Similmente, la potenza ancora disponibile al 1 marzo 2018, supponendo immutata l'efficienza del dispositivo RTG, ammonta a circa 296 W.

c) Assumendo ragionevolmente che l'energia luminosa irradiata dal Sole scali come l'inverso del quadrato della distanza dal Sole stesso, detta $A_1 = 730 \text{ m}^2$ l'area attiva delle celle fotovoltaiche che fornivano allo Skylab 10.5 kW a una distanza di 1 U.A. dal Sole, l'area che dovrebbero avere celle equivalenti per fornire a Voyager 2 395 W a 9.5 U.A. (Saturno), equivale ad

$$A_2 = 730 \times \frac{395}{10500} \times 9.5^2 \simeq 2478.5 \text{ m}^2$$

L'area necessaria alla distanza di Nettuno sarebbe invece

$$A_3 = 730 \times \frac{370.9}{10500} \times 30.1^2 \simeq 23361.8 \text{ m}^2$$

quindi circa 9.5 volte maggiore e pari a quella di circa 3.3 campi da calcio.

20.3 ALPHA-DECAY APPLICATIONS

Alpha decays from long-lived heavy nuclei have two important characteristics that provide for important applications: they are emitted at a unique energy (in contrast to β decays) and (if the half-life is long enough) the emission rate is virtually constant.

Let's consider, for example, the α decay of ^{238}Pu ($t_{1/2} = 86 \text{ y}$), which is produced from the decay of ^{238}Np following neutron capture by ^{237}Np . The Q value is about 5.6 MeV and the decay rate of 1 g of ^{238}Pu would be

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \lambda N &= \frac{0.693}{t_{1/2}} \cdot \frac{1 \text{ g}}{238 \text{ g/mol}} 6 \times 10^{23} \text{ atoms/mol} \\ &= (2.6 \times 10^{-10} \text{ decays/s})(2.5 \times 10^{21} \text{ atoms/g}) \\ &= 6 \times 10^{11} \text{ decays/s/g} \end{aligned}$$

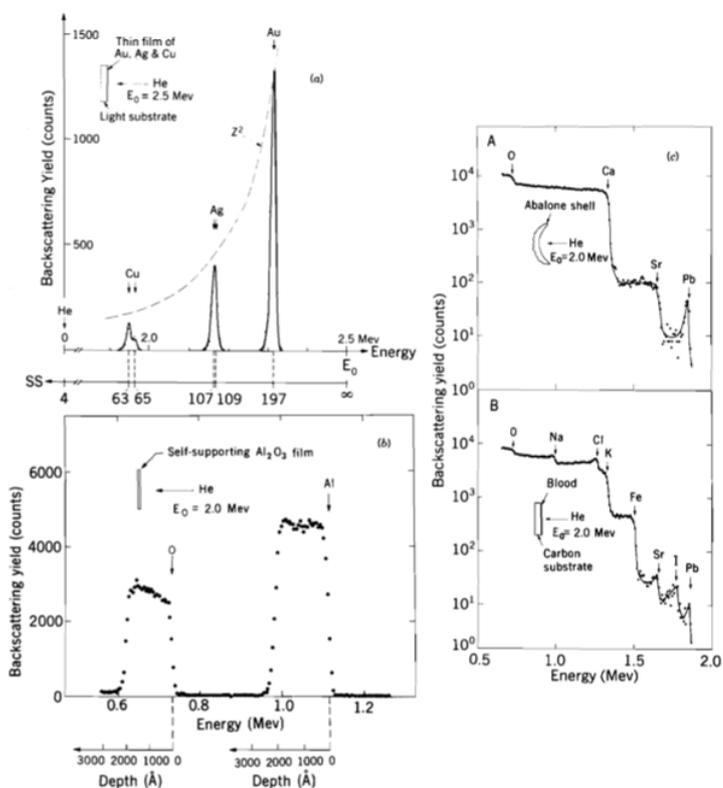


Figure 20.5 (a) Backscattering spectrum of 2.5-MeV α particles from a thin film of copper, silver, and gold. The dashed line shows the Z^2 behavior of the cross section expected from the Rutherford formula. Note the appearance of the two isotopes of copper. (b) In a thicker target, some particles may penetrate and lose energy before backscattering. This broadens the peaks into plateaus, the thickness of which depends on the thickness of the scattering target (about 200 nm in this case). (c) Scattering from complex substances can reveal the elements of which they are made. Figures from M.-A. Nicolet, J. W. Mayer, and I. V. Mitchell, *Science* 177, 841 (1972). Copyright © 1972 by the AAAS.

798 EXTENSIONS AND APPLICATIONS

Each decay releases 5.6 MeV, and the power output is therefore

$$P = \left(6 \times 10^{11} \frac{\text{decays/s}}{\text{g}} \right) \left(\frac{5.6 \times 10^6 \text{ eV}}{\text{decay}} \right) (1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})$$

$$= 0.6 \text{ W/g}$$

Each gram of ^{238}Pu produces a power output of 0.6 W. While this is not exactly enough to heat or light a house, it is quite sufficient to power simple electrical circuits, and it has the enormous advantage that it continues to operate at a constant rate even under very adverse conditions (in the vacuum and extreme cold of space, for example) and needs replacement only over time scales of the order of its half-life. The need for such stable and reliable power sources has resulted in many applications, from cardiac pacemakers to the Voyager spacecraft that photographed Jupiter, Saturn, and Uranus.

In cardiac pacemakers, the α -decay energy is deposited as heat and converted to an electric pulse through a thermoelectric converter. They are capable of producing about 300 μW of electric power, and do so continuously, limited only by the 86-year half-life of ^{238}Pu .

Alpha-particle scattering is important for both qualitative and quantitative analysis. Smoke detectors contain a small quantity of the isotope ^{241}Am ($t_{1/2} = 433 \text{ y}$) whose Q value is 5.6 MeV. Under normal conditions, the α particles ionize air molecules in the detector; the ions travel to electrodes and establish a small steady-state current in the device. The products of combustion include heavy ionized atoms; when these enter the detector, they collide with the ions responsible for the ambient current, and the resulting decrease in current triggers the alarm. The device is activated not by visible particles of smoke (as in the case of the photoelectric type of smoke detector) but instead by the charged ions resulting from combustion.

Quantitative analysis can be done by observing α particles scattered at large angles, called *Rutherford backscattering*. In our discussion of Rutherford scattering in Chapter 11, we assumed the target nucleus to be infinitely heavy, so the α particle emerges with its original incident energy. In actuality, a small energy is transmitted to the struck nucleus, and for backscattered particles ($\theta \approx 180^\circ$), the loss in energy of the α particle is

$$\Delta T = T \left[\frac{4m/M}{(1 + m/M)^2} \right] \quad (20.4)$$

where T is the incident α energy, m is the α -particle mass, and M is the mass of the target. The loss in energy is greatest for light nuclei, but even for heavy nuclei ($m/M \sim 0.02$) the energy loss is of order 0.5 MeV and can easily be detected. Scattering from a target consisting of a variety of isotopes or elements will produce a spectrum of α energies, each corresponding to a unique mass of the struck atom, from which we can infer the composition of the target. The separation between adjacent masses for heavy nuclei is of order 1% or 5 keV, which is somewhat (but not hopelessly) smaller than the resolution of a typical solid-state α -particle detector (20 keV), but for light nuclei, the separations between adjacent elements (and even between different isotopes of a single element) can be easily resolved. Figure 20.5 shows an example of a spectrum of

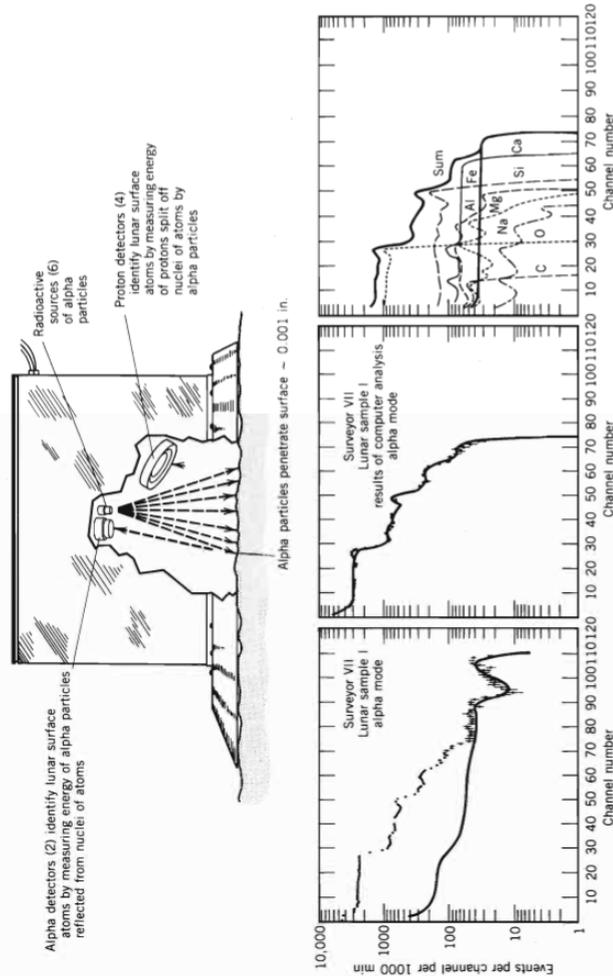


Figure 20.6 (Top) The α -particle scattering experiment from the Surveyor Moon lander. From A. L. Turkevich, Acc. Chem. Res. 6, 81 (1973). (Bottom) Data from the α -scattering experiment on the Moon. The figure at left shows the raw data; the solid line is background from a naturally occurring α -source. At center is shown the data with background subtracted, and at right is the analysis showing the constituents. The composition is dominated by oxygen and silicon, as are Earthly rocks. From J. H. Patterson et al., J. Geophys. Res. 74, 6120 (1969).

800 EXTENSIONS AND APPLICATIONS

backscattered α 's, from which it is possible to deduce the presence of various elements. This technique has been used for analysis of soil samples by the Surveyor spacecraft that landed on the Moon. The Surveyors contained a Rutherford backscattering apparatus including a source of ^{242}Cm , which decays with a half-life of 163 days. Figure 20.6 shows the Surveyor craft and its backscattering experiment.

Appendice F

γ -camera

...

.....

.....

Appendice G

Esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni

Gli esperimenti che Marcello Conversi, Ettore Pancini e Oreste Piccioni condussero a Roma a più riprese tra il 1943 e il 1947 furono cruciali in quanto permisero di evidenziare che le particelle penetranti provenienti dalla radiazione cosmica non erano, come inizialmente si riteneva, pioni, ovvero mesoni di Yukawa.

Gli esperimenti erano stati effettuati allo scopo di studiare se ci fossero differenze fra i processi di assorbimento della radiazione penetrante in diversi materiali, in funzione del segno della carica. Una particella di carica negativa

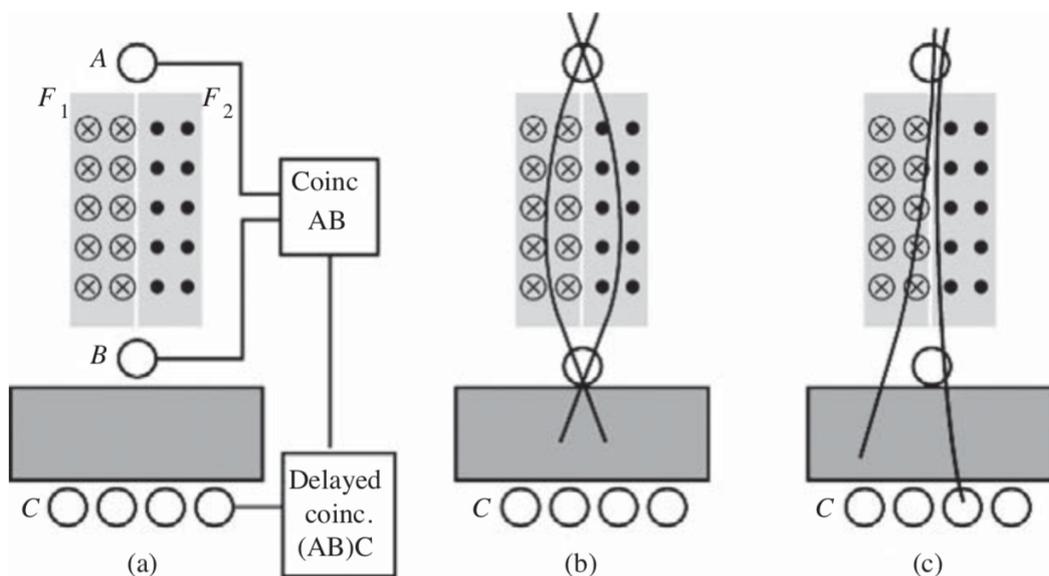


Figura G.1: Schema dell'esperimento di Conversi, Pancini e Piccioni.

dovrebbe essere catturata da un nucleo e nel caso in cui si tratti della par-

ticella mediatrice della forza nucleare dovrebbe interagire immediatamente ed efficacemente col nucleo stesso, prima di decadere spontaneamente. Una particella positiva, al contrario, dovrebbe essere respinta dal nucleo e decadere nello spazio vuoto fra atomo e atomo dell'assorbitore.

La struttura dell'apparato, una riproduzione completa del quale è mostrata in figura [G.2](#), si avvale di due blocchi di ferro, indicati con F_1 ed F_2 in figura [G.1](#), magnetizzati in versi opposti, normali al piano del disegno, allo scopo di focalizzare le particelle di un segno, come in (b), e defocalizzare quelle di segno opposto, come in (c).

La condizione di *trigger* dell'esperimento era la seguente: i due contatori Geiger A e B, posizionati al di sopra e al di sotto dei blocchi magnetizzati, devono produrre due segnali in coincidenza temporale stretta, mentre uno dei contatori Geiger posti sotto lo strato di materiale assorbitore deve produrre un segnale ritardato con un ritardo Δt compreso nell'intervallo $1 \mu s < \Delta t < 4.5 \mu s$. Questa condizione garantisce che l'energia delle particelle che la soddisfano sia sufficiente a permettere loro di attraversare i blocchi di ferro magnetizzato, ma non così grande da impedire che possano poi arrestarsi nel materiale assorbitore sottostante. Essa garantisce inoltre che nell'intervallo energetico così selezionato soltanto particelle di un dato segno di carica possano colpire e attivare sia il contatore Geiger A che il successivo B, e infine che le particelle fermatesi nell'assorbitore possano decadere entro un intervallo temporale compatibile con quello che con altri esperimenti, Rossi e Nereson avevano stimato coincidere con la vita media delle particelle penetranti che giungono al suolo per effetto della radiazione cosmica.

Riferendosi alla figura [G.1](#), in (b) si vedono le traiettorie di due particelle del segno "giusto" e nell'intervallo energetico opportuno a far produrre segnali in coincidenza stretta sia al Geiger A che al Geiger B, ma non a uno dei Geiger C. In (c) è illustrato il caso di particelle con carica del segno "sbagliato". In un primo esperimento effettuato nel 1945 gli autori utilizzarono un assorbitore di ferro e il risultato fu che le particelle positive catturate nell'assorbitore vi decadevano come se fossero state nel vuoto mentre invece le particelle negative non mostravano decadimento, come ci si spettava se fossero state catturate dai nuclei e avessero immediatamente interagito con questi, producendo quindi particelle che se rivelate, avrebbero dato segnali prima del ritardo di $1 \mu s$, a partire dal quale era attiva la coincidenza ritardata.

Gli autori ripeterono l'esperimento nel 1946 con un assorbitore di carbonio e con loro sorpresa, trovarono che sia le particelle positive che quelle negative decadevano come se si fossero trovate nel vuoto. Una ricerca sistematica mostrò dunque che le particelle penetranti dovute alla radiazione cosmica non erano efficacemente assorbite dai nuclei di materiali con numeri atomici troppo bassi.

Le previsioni di accurati calcoli dicevano però che se si fosse trattato di pioni

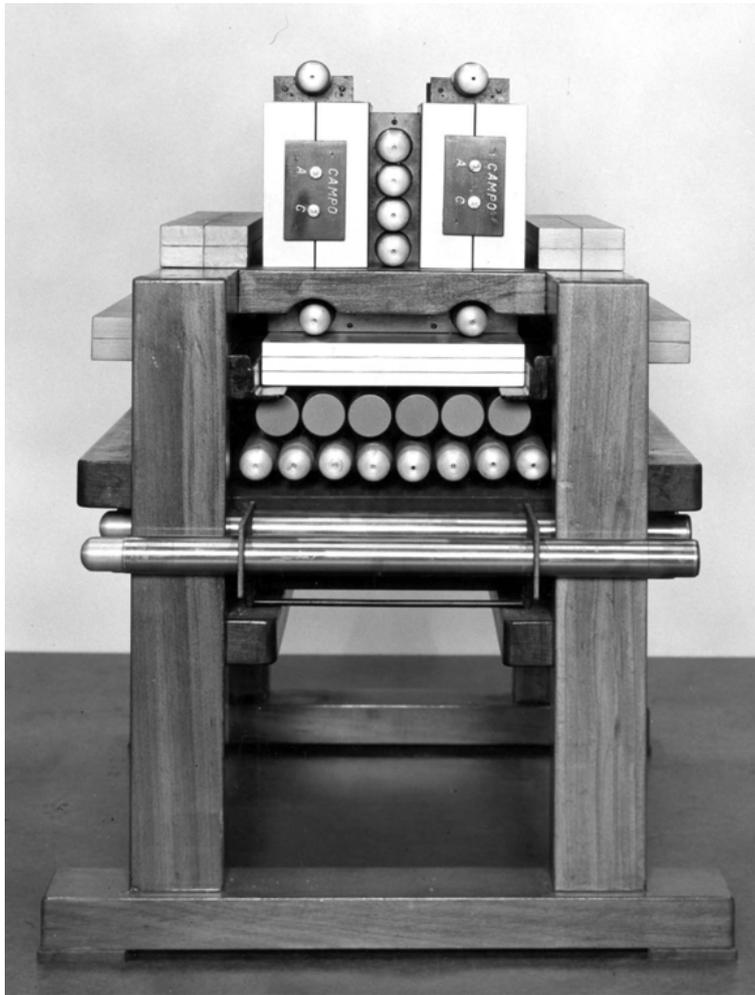


Figura G.2: Riproduzione dell'apparato di Conversi, Pancini e Piccioni.

avrebbero dovuto interagire così fortemente da essere catturati dai nuclei di qualsiasi sostanza. Si poteva dunque concludere che le particelle penetranti dovute alla radiazione cosmica e studiate nell'esperienza non erano mesoni di Yukawa.

Erano infatti muoni μ !

Appendice H

Instabilità di un nucleo prolato

Si parta da un nucleo genitore sferico di raggio $R_0 = r_0 A^{1/3}$ e si immagini di deformarlo leggermente, riferendosi a un sistema cartesiano ortogonale centrato nel suo baricentro, lungo un asse, ad esempio lungo z , in modo che assuma almeno approssimativamente la forma di un ellissoide di rotazione prolato di equazione

$$\frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \quad (\text{H.1})$$

La supposta incomprimibilità della materia nucleare implica che la defor-

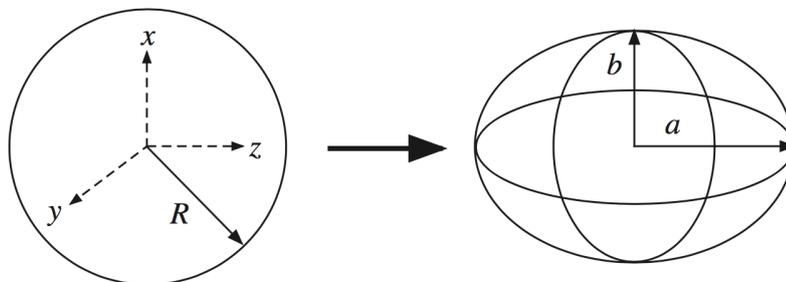


Figura H.1: Deformazione da sfera a ellissoide prolato.

mazione mantenga inalterato il volume

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \quad (\text{H.2})$$

Indicando con ϵ il termine perturbativo positivo che interviene a modificare il raggio R_0 della goccia sferica si può allora scrivere

$$a = R_0 (1 + \epsilon) \quad (\text{H.3})$$

e di conseguenza, per la [H.2](#)

$$b = \frac{R_0}{(1 + \epsilon)^{1/2}} < a \quad (\text{H.4})$$

La deformazione produce una variazione dell'energia di legame del nucleo. Detta quindi $B^*(A, Z)$ l'energia del nucleo perturbato si ha che se la differenza

$$\Delta B^*(A, Z) = B(A, Z) - B^*(A, Z) \quad (\text{H.5})$$

è negativa, allora il nucleo è stabile rispetto alla deformazione e una volta cessata la perturbazione, diseccitandosi, ritorna all'originaria condizione di equilibrio con forma sferica di raggio R_0 . Se invece $\Delta B^*(A, Z) > 0$, allora il nucleo è instabile rispetto alla deformazione e se questa viene esaltata fino al punto da provocare la scissione del nucleo in due frammenti di masse confrontabili, si ha il processo di fissione indotto da una perturbazione esterna. Per proseguire ci si riferisca sempre alla formula semiempirica di Weizsäcker e si osservi che i termini di volume, di simmetria e di accoppiamento, essendo dipendenti dalla densità del nucleo che nell'ipotesi di incomprimibilità rimane immutata per deformazioni del volume, rimangono anch'essi sostanzialmente immutati dalla deformazione. Nel calcolo della differenza fra le energie di legame intervengono quindi attivamente soltanto i termini di superficie e coulombiano

$$\Delta B^*(A, Z) = B_S(A) + B_C(A, Z) - B_S^*(A) - B_C^*(A, Z) \quad (\text{H.6})$$

Il termine coulombiano del nucleo deformato è chiaramente minore di quello del nucleo sferico in quanto la deformazione implica un aumento delle distanze medie fra i protoni; il termine di superficie del nucleo deformato è invece maggiore del suo omologo per il nucleo non deformato, in quanto la deformazione implica un aumento della superficie.

Supponendo che la carica elettrica sia uniformemente distribuita entro il volume dell'ellissoide di rotazione si ha

$$\begin{cases} \rho_Z(\vec{r}) = \frac{3Ze}{4\pi ab^2} & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1 \\ \rho_Z(\vec{r}) = 0 & \text{per, } \frac{(x^2 + y^2)}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} > 1 \end{cases} \quad (\text{H.7})$$

Calcolando quindi le energie di superficie e coulombiana del nucleo deformato si ottiene

$$B_S^*(A) = \beta_S(\epsilon) B_S(A) \quad , \quad B_C^*(A, Z) = \beta_C(\epsilon) B_C(A, Z) \quad (\text{H.8})$$

con

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{R_0}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \ln \frac{a + (a^2 - b^2)^{1/2}}{a - (a^2 - b^2)^{1/2}} \\ \beta_S(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{R_0^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{a^2 b}{R_0^2 (a^2 - b^2)^{1/2}} \arccos \left(\frac{b}{a} \right) \end{cases} \quad (\text{H.9})$$

Supposto ragionevolmente piccolo il parametro ϵ di deformazione, si possono sviluppare in serie le [H.9](#), fermandosi al primo termine non nullo in potenze di ϵ

$$\begin{cases} \beta_C(\epsilon) \simeq 1 - \frac{1}{5}\epsilon^2 \\ \beta_S(\epsilon) \simeq 1 + \frac{2}{5}\epsilon^2 \end{cases} \quad (\text{H.10})$$

ottenendo quindi per $\Delta B^*(A, Z)$

$$\Delta B^*(A, Z) \simeq \frac{1}{5}\epsilon^2 A^{2/3} \left[2b_S - b_C \frac{Z^2}{A} \right] \text{ MeV} \quad (\text{H.11})$$

Per $\Delta B^*(A, Z) = 0$ la goccia di liquido nucleonico è in equilibrio instabile, da cui si ricava il valore critico del rapporto Z^2/A

$$\left(\frac{Z^2}{A} \right)_0 = \frac{2b_S}{b_C} \simeq 49.4 \quad (\text{H.12})$$

Appendice I

Leggi di conservazione e loro violazioni

Conservation quantity or symmetry	Strong Interaction	EL-Mag	Weak
Mass m /Energy E	+	+	+
Momentum p			
Angular Momentum L, S			
Charge Q	+	+	+
Isospin T	+	-	-
Strangeness S	+	+	-
Charm C			
Beauty B , Topness T			
Parity P	+	+	-
Charge Conjugation C	+	+	-
Baryon Number B	+	+	+
Lepton Number (s)		+	+
Hypercharge Y	+	+	-
Time Reversal T	+	+	-
Charge Parity CP	+	+	-
CPT	+	+	+

Figura I.1: Leggi di conservazione e loro violazioni per le interazioni fondamentali: "+" significa conservazione e "-" significa violazione.

Appendice J

I raggi cosmici

I raggi cosmici sono particelle e nuclei in movimento nello spazio; la loro natura e origine sono varie e l'intensità dei flussi misurati copre 32 ordini di grandezza con energie cinetiche che si distribuiscono su uno spettro di circa quattordici ordini di grandezza, il cui estremo superiore raggiunge i 10^{22} eV (figura [J.2](#)). Ve ne sono di carichi e di neutri: la componente carica investe la Terra in media con un cosmico al secondo per cm^2 per steradiante.

La quasi totalità dei raggi cosmici che arrivano sulla superficie terrestre sono però in realtà prodotti secondari delle interazioni fra raggi cosmici primari, provenienti dallo spazio esterno e molecole dell'atmosfera terrestre, come è schematicamente illustrato in figura [J.1](#). Il cammino libero medio di un raggio cosmico fra due successive interazioni con nuclei degli atomi di molecole dell'atmosfera terrestre è pari a circa $\lambda_0 = 750$ m, in condizioni di atmosfera normale standard.

L'atmosfera agisce come un "calorimetro" e l'energia di un raggio cosmico primario può essere dedotta dallo studio dello spettro energetico dello sciamme che produce. Da alcuni anni vi sono anche sistemi di rivelazione diretta dei raggi cosmici primari, situati nello spazio esterno all'atmosfera terrestre, su satelliti o ospitati dalla stazione orbitale internazionale.

Uno sciamme include svariati prodotti secondari, alcuni anche a vita media così breve da decadere prima di aver percorso il tragitto che li separa dal suolo. Considerando che le energie cinetiche di tali oggetti sono alte e che quindi le loro velocità sono prossime a c , la dilatazione relativistica delle loro vite medie osservate dal suolo gli permette comunque spesso di giungere a terra. Li si può quindi osservare e studiare anche con apparati situati a terra; questo li rende però anche una sorgente di fondo spesso difficile da controllare, per altri tipi di esperimenti. La storia della scoperta dei raggi cosmici, delle loro caratteristiche e proprietà fisiche, delle loro origini e di come siano accelerati nel percorrere l'universo, del loro fondamentale contributo allo sviluppo di tecniche e strumenti d'indagine poi divenuti fondamentali per la fisica nucleare, subnucleare e stellare, per la cosmologia e per l'intero

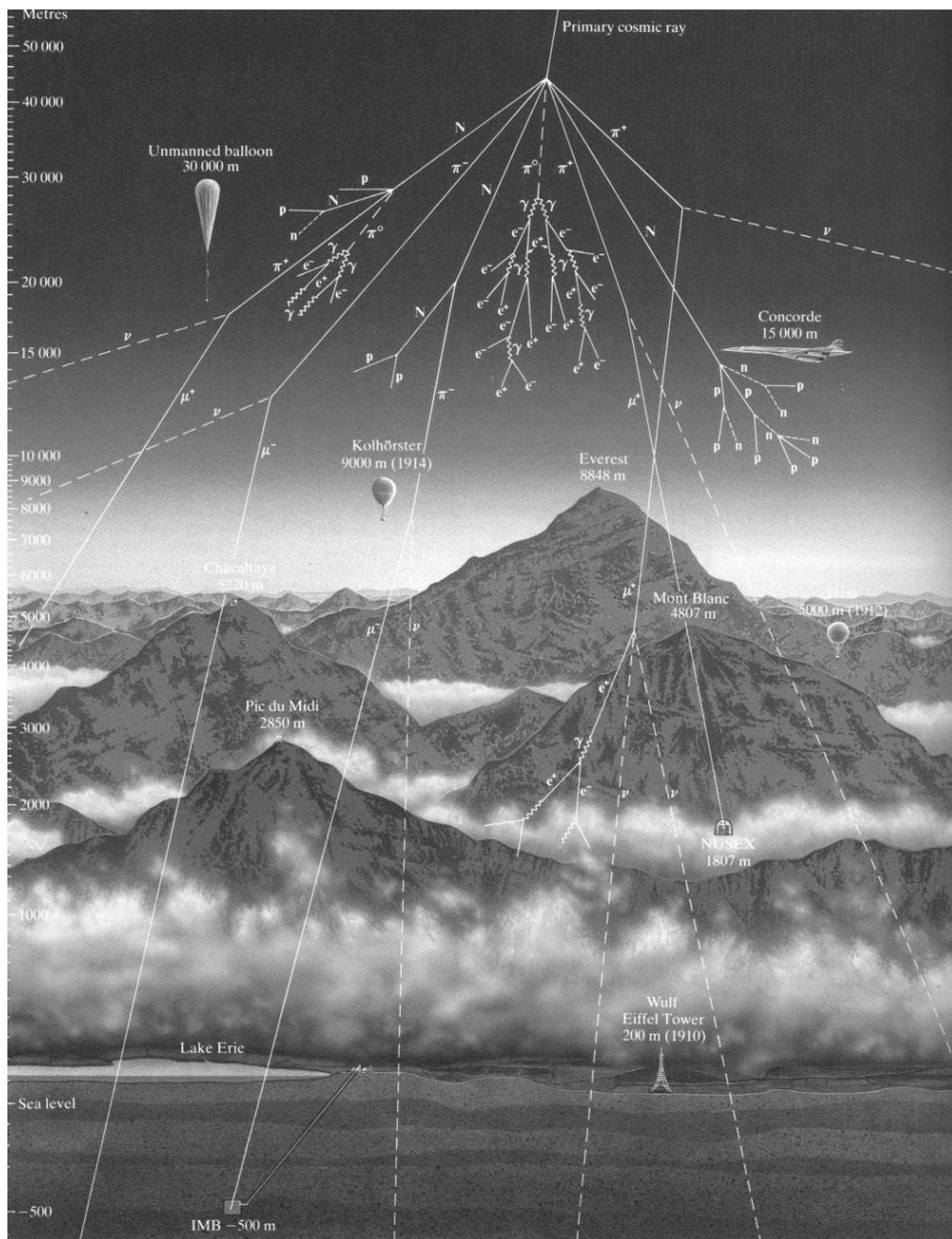


Figura J.1: Schema di sciame atmosferico prodotto da un protone cosmico primario di grande energia cinetica.

ambito scientifico, è un argomento affascinante e interessantissimo che non può essere compendiato in un capitolo. Qui si danno alcune informazioni sulle loro caratteristiche e ci si sofferma sui meccanismi di accelerazione che

li portano a energie oltre 10^7 volte superiori alle più alte ottenibili con gli acceleratori esistenti. L'individuazione di tali meccanismi è dovuta a E. Fermi¹ è interessante osservare che fino ai tardi anni '50, i raggi cosmici hanno rappresentato l'unica sorgente in grado di fornire particelle con energie superiori a 1 GeV.

Una bellissima trattazione storico-scientifica è: B. Rossi, "Cosmic Rays" - McGraw-Hill Book Company Inc. 1964, reperibile gratuitamente in rete; una panoramica aggiornata si trova in "M.Tanabashi et al. (Particle Data Group), Phys.Rev.D 98 (2018) 030001".

J.1 Alcune caratteristiche dei raggi cosmici

è interessante analizzare con un certo dettaglio la forma dello spettro energetico misurato dei raggi cosmici primari, riportato in figura J.2. Alle energie più basse i raggi cosmici sentono l'effetto del *vento solare* e dei campi magnetici terrestri e solari. Nell'intervallo energetico compreso fra 100 GeV e 10^6 GeV la discesa è ripida e descritta da una legge di potenza

$$N(E)dE \propto E^{-2.6}dE \quad (\text{J.1})$$

mentre il flusso primario cala di circa 10 ordini di grandezza. In corrispondenza all'estremo di tale intervallo, detto *ginocchio*, la pendenza diviene più pronunciata, circa $\propto E^{-3.1}$, e di conseguenza il flusso di cosmici primari cala più rapidamente. Questo andamento prosegue fino a circa 10^{10} GeV. In corrispondenza a questo punto, detto *caviglia*, la discesa guadagna ulteriore rapidità divenendo circa $\propto E^{-3.7}$, e a questo punto si raggiungono anche i limiti sperimentali di misurabilità del rateo. Per energie fino a 10^{15} eV il flusso è ancora abbastanza intenso da permettere di studiare la composizione dei raggi cosmici carichi primari che comprendono protoni (circa 87 %), particelle α (circa 12 %), e una residua percentuale del 1 % di nuclei più pesanti e si tratta sempre di strutture completamente ionizzate, in quanto gli elettroni che le completavano come atomi sono stati strappati dai processi di accelerazione subiti nel corso del tempo trascorso in moto nell'universo. Fra i cosmici primari vi sono anche elettroni in quantità pari al 2 % dei protoni. Le abbondanze relative delle particelle costituenti il flusso primario sono approssimativamente confrontabili con quelle individuate nella composizione del Sole e ciò suggerisce che i fenomeni di produzione e successiva accelerazione cosmica dei primari siano associati al collasso di supernove galattiche di età evolutiva medio-alta, com'è appunto per il Sole. Tali raggi cosmici giungono però sulla Terra attraversando il campo magnetico galattico di $\sim 10^{-7}$ Gauss, e ciò devia le loro velocità significativamente, tanto da non poter più ricostruire una correlazione con la posizione della loro supernova

¹E. Fermi, "On the origin of the cosmic radiation" - Phys. Rev. 75 (1949) 1169; "Galactic magnetic fields and the origin of cosmic radiation" - Ap. J. 119 (1954) 1.

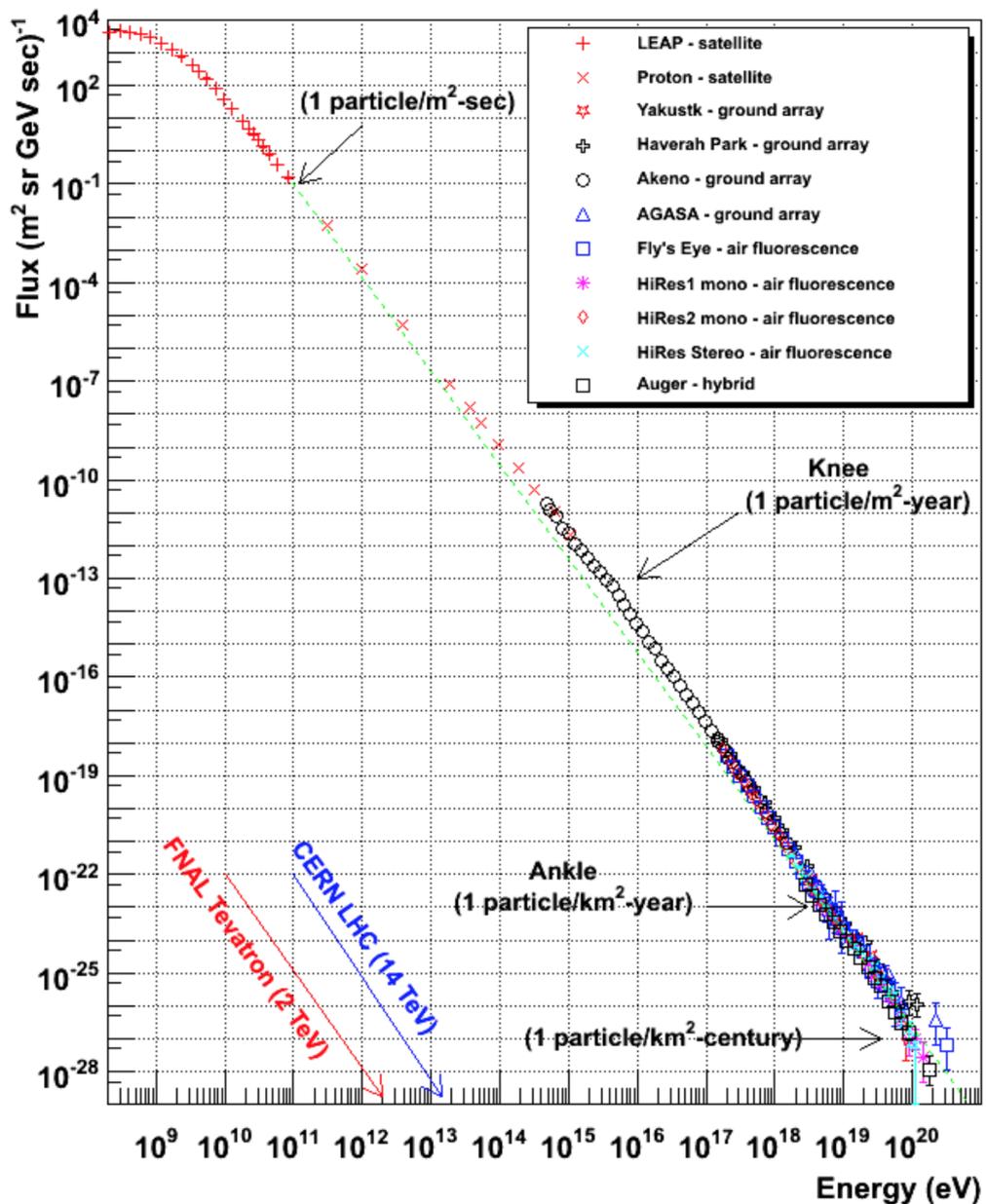


Figura J.2: Spettro in energia dei raggi cosmici.

d'origine.

Si ritiene che il ginocchio a 10^6 GeV nello spettro energetico sia correlabile a una sorta di limite massimo per il meccanismo d'accelerazione dovuto a supernove, anche se non ne è completamente chiaro il meccanismo.

L'idea generale per queste particelle primarie è che siano prevalentemente

confinare entro la nostra galassia dal suo campo magnetico, con una possibilità di sfuggirne ridotta, abbinata a un tempo medio di permanenza nella galassia di circa 2×10^7 anni.

Detti p e q l'impulso e la carica di un raggio cosmico, B ed R il modulo del campo magnetico galattico medio e il raggio della traiettoria seguita in esso dal raggio cosmico, dalla forza di Lorentz si ha

$$p \sim qBR \quad (\text{J.2})$$

da cui si deduce che ad esempio protoni da 10^5 GeV percorrono traiettorie con raggi dell'ordine di $R \sim 3 \times 10^{16}$ m.

Per capire gli ordini di grandezza in gioco si sa che il raggio galattico è stimato in circa 10^{20} m, e i resti di supernova della Nebulosa del Granchio distano dalla Terra circa 2×10^{19} m. Si può dunque dedurre che raggi cosmici di energie $\gtrsim 10^9$ GeV non possano restare confinati nella nostra galassia e se individuati dovrebbero quindi essere di origine extragalattica. Data la debolezza dei campi magnetici da essi attraversati, le deviazioni impresse alle loro estreme velocità potrebbero quindi essere così ridotte da far sì che esse puntino a ritroso con una certa probabilità verso le sorgenti di provenienza. Se i meccanismi di produzione e confinamento corrispondono a quanto descritto, non dovrebbero essere peculiari della sola nostra galassia, e una conferma di ciò viene dall'aver scoperto radiazione di sincrotrone nelle bande radio dello spettro elettromagnetico di molte altre galassie; la radiazione di sincrotrone, come visto, è infatti un effetto che si produce quando particelle cariche relativistiche si muovono ad esempio lungo traiettorie curve in campi magnetici.

Per quanto concerne la conferma dell'individuazione nelle supernovae della principale fucina di produzione e accelerazione di raggi cosmici galattici, si è ottenuto un brillante risultato osservativo grazie al telescopio spaziale "Fermi". Supponendo infatti che l'esplosione di una supernova generi molti protoni che vengono poi accelerati dall'onda d'urto dell'esplosione con meccanismi suggeriti da Fermi e che tratteremo, si ha che l'interazione di questi protoni energetici col gas interstellare produce pioni neutri² π_0 che date le energie in gioco, hanno impulsi fortemente allineati con quelli dei protoni che li hanno generati. Questi π_0 decadono rapidamente³ e prevalentemente in coppie di raggi γ , ognuno d'energia pari a circa 67.49 MeV, di impulso tanto più allineato con quello del π_0 genitore quanto maggiore è l'energia cinetica di questo. In definitiva dovrebbe esserci un fiotto di γ da circa 67.49 MeV proveniente da ogni supernova e abbastanza ben allineati otticamente con la direzione di provenienza della luce visibile della supernova. I risultati ottenuti dal satellite "Fermi" concernono proprio l'individuazione di due di

²Si veda: F.W. Stecker, S. Tsuruta, G.G. Fazio, "The production of cosmic gamma rays in interstellar and intergalactic cosmic-ray collisions" - SAO Special Report 259 (1967).

³La vita media del pione neutro π_0 è: $\tau_{\pi_0} = 8.4 \times 10^{-17}$ s.

queste sorgenti da resti di supernova⁴, e sono stati scherzosamente definiti "prova della pistola fumante".

Tornando allo spettro in energia dei raggi cosmici, si può senz'altro dire che una sua peculiarità è di avere un andamento a legge di potenza, e lo scopo di una teoria sui meccanismi di produzione e accelerazione dei raggi cosmici dovrebbe essere primariamente di spiegare l'origine di questo andamento e riprodurlo qualitativamente e quantitativamente.

J.2 Meccanismi d'accelerazione alla Fermi

Fermi propose nel 1949 un meccanismo di accelerazione delle particelle cosmiche dovuto a campi magnetici variabili. Considerando le nuvole di gas interstellare presenti nella galassia come strutture di materia completamente ionizzata, quindi plasma, si deduce che in esse non si possono mantenere campi elettrici stazionari, data la presenza di cariche libere che in tal caso si ricombinerebbero annullando i campi elettrici stessi. Il meccanismo di accelerazione deve quindi essere riconducibile all'effetto di soli campi magnetici variabili nel tempo che determinano quindi campi elettrici indotti. Questo suggerisce che le accelerazioni possano dunque prodursi sia in sorgenti estese con campi magnetici relativamente deboli, come le nubi interstellari derivanti da onde d'urto dovute a esplosioni di supernovae, che in prossimità di oggetti estremamente compatti e con campi magnetici rapidamente variabili, quali stelle a neutroni rotanti, pulsar,

Il fenomeno di accelerazione può inoltre essere sia diretto che stocastico. In quest'ultimo ogni particella carica è supposta accrescere gradualmente la propria energia per attraversamenti successivi di una regione con disuniformità del campo magnetico, tipicamente presenti entro una nuvola di gas ionizzato interstellare. Una disuniformità di campo magnetico in una nuvola di plasma può infatti agire come "specchio magnetico" che riflette la particella carica.

Sia $V = \beta c$ la velocità della nuvola di gas ionizzato, e quindi di uno "specchio magnetico" solidale con essa, rispetto a un osservatore inerziale, e si supponga inoltre ragionevolmente che la massa della nuvola sia enormemente maggiore di quella di qualsiasi particella carica interagente con un suo specchio magnetico.

Si pensi inoltre l'accadere di questa interazione di riflessione come un fenomeno puramente stocastico durante il quale la particella carica acquisisce energia e sia τ_{esc} il tempo di permanenza della particella carica entro la nuvola, durante il quale subisce interazioni. Con queste ipotesi si può dedurre uno spettro energetico a legge di potenza ma il meccanismo non risulta

⁴M.Ackermann et.al, "Detection of the Characteristic Pion-Decay Signature in Supernova Remnants" - Science 339 (2013) 807.

abbastanza efficiente da giustificare le energie più elevate dello spettro misurato, in quanto il guadagno d'energia per interazione risulta, come si vedrà, proporzionale a β^2 .

Per ottenere un risultato più completo e giustificare le parti più energetiche dello spettro riproducendone la pendenza media, bisogna immaginare che le particelle cariche siano accelerate anche da riflessioni su specchi magnetici trasportati da onde d'urto dirette, e in tal caso si trova che i guadagni d'energia subiti sono proporzionali a β .

Si consideri una regione di spazio in una nuvola ionizzata, contenente un numero N_0 grande di particelle cariche accelerabili supponendo che posseggano tutte la stessa energia iniziale E_0 . Si scriva l'energia E_a di una di queste particelle dopo ogni collisione con uno specchio magnetico come

$$E_a = E_b (1 + \delta) \quad \text{da cui,} \quad \frac{\Delta E}{E_b} = \frac{E_b - E_a}{E_b} = \delta \quad (\text{J.3})$$

con E_b l'energia della stessa particella prima della collisione. Questa scelta troverà giustificazione nei processi d'interazione fra particella e le disuniformità di campo magnetico ... che si descriveranno. Dopo le prime k collisioni la particella avrà quindi un'energia

$$E_k = E_0 (1 + \delta)^k \quad (\text{J.4})$$

Detta P_{esc} la probabilità che la particella sfugga dalla regione d'accelerazione dopo ogni processo di guadagno energetico, si calcoli la probabilità $P_{esc,k}$ che essa si fuoriesca dopo k interazioni, quando dunque ha raggiunto un'energia E_k

$$P_{esc,k} = \underbrace{(1 - P_{esc}) \dots (1 - P_{esc})}_{k \text{ volte}} P_{esc} = P_{esc} (1 - P_{esc})^k \quad (\text{J.5})$$

Il numero n_k di particelle che fuoriescono dalla regione d'accelerazione con energia E_k è dunque

$$n_k = N_0 P_{esc,k} = N_0 P_{esc} (1 - P_{esc})^k \quad (\text{J.6})$$

che esprimendo k dalla [J.4](#) come $k = \ln(E_k/E_0) / \ln(1 + \delta)$, si può scrivere

$$\begin{aligned} n_k &= N_0 P_{esc,k} = N_0 P_{esc} (1 - P_{esc})^{\frac{\ln(E_k/E_0)}{\ln(1+\delta)}} = \\ &= N_0 P_{esc} \left(\frac{E_k}{E_0} \right)^{\frac{\ln(1-P_{esc})}{\ln(1+\delta)}} = n(E_k) \end{aligned} \quad (\text{J.7})$$

Ricordando quindi che per la [J.4](#) si ha $\Delta E_k \propto E_k$, si ottiene, per la distribuzione delle particelle che subiscono un processo di accelerazione come quello ipotizzato

$$\frac{dn}{dE} \simeq \frac{n(E_k)}{\Delta E_k} \propto \frac{n(E_k)}{E_k} \propto E^{\frac{\ln(1-P_{esc})}{\ln(1+\delta)} - 1} \quad (\text{J.8})$$

Posto $\xi = 1 - \frac{\ln(1 - P_{esc})}{\ln(1 + \delta)}$, si ha

$$\frac{dn}{dE} \propto E^{-\xi} \quad (\text{J.9})$$

che ha la forma di legge di potenza cercata. Essendo poi sia $P_{esc} \ll 1$ che $\delta \ll 1$, si ottiene

$$\frac{\ln(1 - P_{esc})}{\ln(1 + \delta)} \simeq -\frac{P_{esc}}{\delta} \quad \text{da cui,} \quad \xi \simeq 1 + \frac{P_{esc}}{\delta} \quad (\text{J.10})$$

Se si indica con T_r la durata media caratteristica di un processo di accelerazione per riflessione su specchio magnetico, il numero di processi d'accelerazione subiti da una particella in una singola nuvola sarà mediamente $\langle k \rangle = \tau_{esc}/T_r$, per cui l'energia massima raggiungibile dalla particella carica in una nuvola di gas ionizzato in cui permanga per un tempo τ_{esc} sarà

$$E_{max} \lesssim E_0 (1 + \delta)^{\tau_{esc}/T_r} \quad (\text{J.11})$$

Si osservi che anche la vita media di ogni perturbazione magnetica accelerante entro una nuvola di gas ionizzato, gioca un ruolo, se inferiore a τ_{esc} .

Si consideri ora specificamente il modo, immaginato da Fermi, in cui una particella carica di energia, velocità e impulso iniziali E_1 , \mathbf{v}_1 e \mathbf{p}_1 , rispetto a un osservatore inerziale, può essere accelerata dalla collisione con una disuniformità del campo magnetico entro una nuvola di gas ionizzato interstellare, in movimento con velocità $\mathbf{V} = \beta c$ rispetto allo stesso osservatore inerziale.

Siano ϑ_1 l'angolo fra \mathbf{p}_1 e \mathbf{V} , e ϑ_2 l'angolo fra \mathbf{p}_2 e \mathbf{V} , dove il pedice "2" indica i valori delle grandezze dinamiche dopo la collisione. Si indichino inoltre con l'apice le grandezze riferite al sistema solidale con la nuvola, e quindi con la disuniformità di campo magnetico, supposta come detto di massa molto maggiore di quella m della particella che subisce accelerazione, quindi sostanzialmente coincidente con il sistema del centro di massa.

Si ha in tal caso, in approssimazione ultra-relativistica⁵ ($E_i \gg mc^2$)

$$E'_1 \simeq \gamma E_1 (1 - \beta \cos \vartheta_1) \quad , \quad \text{con} \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (\text{J.12})$$

Nel sistema del centro di massa l'energia cinetica della collisione si conserva, per cui $E'_2 = E'_1$ e riconducendosi al sistema di riferimento dell'osservatore inerziale

$$E_2 = \gamma E'_2 (1 + \beta \cos \vartheta'_2) = \gamma^2 E_1 (1 - \beta \cos \vartheta_1) (1 + \beta \cos \vartheta'_2) \quad (\text{J.13})$$

⁵Per la trattazione relativistica degli urti si veda l'Appendice [B](#)

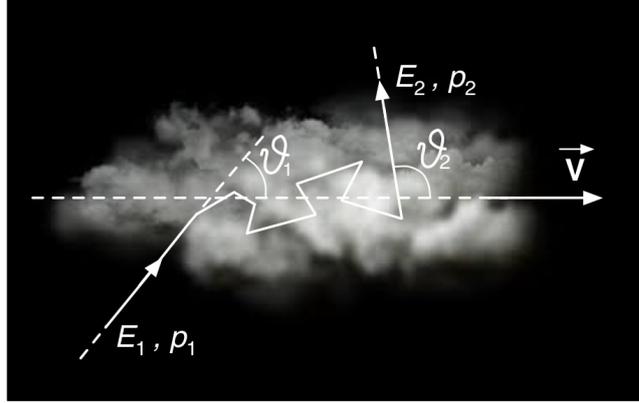


Figura J.3: Interazione fra raggio cosmico e disuniformità di campo magnetico in nuvola di gas interstellare in moto con velocità $\mathbf{V} = \beta c$.

L'incremento medio di energia della particella si ha mediando su tutti i possibili angoli, per cui

$$\langle \cos\vartheta_1 \rangle = 0 \quad (\text{J.14})$$

e di conseguenza

$$\langle E_2 \rangle = \gamma^2 E_1 (1 - \beta \langle \cos\vartheta_1 \rangle) \quad \text{con,} \quad -1 < \cos\vartheta_1 < 1 \quad (\text{J.15})$$

Si osservi che la probabilità P_{int} dell'interazione fra una particella e una disuniformità magnetica è proporzionale alla loro velocità relativa $|\mathbf{V} - \mathbf{v}_1|$

$$P_{int} \propto |\mathbf{V} - \mathbf{v}_1| \propto (\beta^2 + \beta_1^2 - 2\beta\beta_1 \cos\vartheta_1)^{1/2}$$

che se la particella è relativistica e $V \ll c$ diventa

$$P_{int} \propto (1 - 2\beta \cos\vartheta_1)^{1/2} \simeq 1 - \beta \cos\vartheta_1 \quad (\text{J.16})$$

Quindi si ha, per il valor medio di $\cos\vartheta_1$

$$\langle \cos\vartheta_1 \rangle \simeq \frac{\int_{-1}^1 (1 - \beta \cos\vartheta_1) \cos\vartheta_1 d(\cos\vartheta_1)}{\int_{-1}^1 (1 - \beta \cos\vartheta_1) d(\cos\vartheta_1)} = -\frac{1}{3} \frac{V}{c} = -\frac{1}{3} \beta \quad (\text{J.17})$$

Sostituendo quanto ottenuto nella [J.15](#) si ha, per il guadagno medio in energia

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{E_2}{E_1} \right\rangle &\sim \gamma^2 (1 - \beta \langle \cos\vartheta_1 \rangle) \simeq (1 - \beta^2)^{-1} \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right) \simeq \\ &\simeq (1 + \beta^2) \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right) = 1 + \frac{4}{3} \beta^2 + O(\beta^4) \end{aligned} \quad (\text{J.18})$$

da cui

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \simeq \frac{4}{3} \beta^2 \quad (\text{J.19})$$

Essendo tipicamente $\beta^2 \sim 10^{-2}$, data la relativamente piccola velocità casuale media delle disuniformità magnetiche del mezzo interstellare rispetto a c , si deduce che il meccanismo originale di Fermi non è efficiente quanto serve per giustificare gli alti valori energetici coperti dallo spettro dei raggi cosmici. Inoltre il valore che ne deriva per la pendenza ξ della legge di potenza, detto indice spettrale, è almeno un ordine di grandezza maggiore di quanto trovato sperimentalmente, ovvero di ≈ 2.6 .

Un risultato quantitativamente in grado di giustificare le zone alte dello spettro energetico almeno fino a valori di circa 10^{14} eV/nucleone, si ha immaginando che sempre con un meccanismo tipo Fermi, le disuniformità magnetiche su cui si riflettono le particelle acquisendo energia siano associate non a nubi interstellari in moto casuale nella galassia, ma a onde d'urto il cui fronte possa essere immaginato localmente "piano", che si trasmettono nel mezzo interstellare con velocità supersonica $U \gg v_s$, con v_s la velocità del suono nel mezzo, come le onde d'urto associate a esplosioni di supernovae. Trattando il problema in questi termini si ottiene, per l'incremento medio di energia delle particelle cariche interagenti con fronti d'onda supersonici

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \simeq \frac{U}{c} \equiv \beta \quad (\text{J.20})$$

e l'indice spettrale che si ricava di conseguenza per l'andamento a legge di potenza vale ≈ 2 .

Il motivo fondamentale per cui neppure questi meccanismi risultano però abbastanza efficienti da giustificare le zone più energetiche dello spettro è sostanzialmente dovuto alla non sufficiente durata dell'azione dei meccanismi stessi, a sua volta dovuta alla vita media delle disuniformità magnetiche entro le onde d'urto. Le energie più alte rivelate sono probabilmente dovute sia a meccanismi più efficienti, anche nel breve termine, come quelli presenti in corrispondenza di stelle a neutroni, con intensi campi magnetici associati, sia a strutture acceleranti più durature, sia alla concomitanza delle due cose. Il cosmo e i processi che si producono in esso costituiscono quindi, ai fini delle energie raggiungibili, il più efficiente sistema d'accelerazione di particelle cariche, anche se non si è in grado di poterne governare direzione e collimazione.

Bibliografia

- [1] A. Das T. Ferbel, Introduction to Nuclear and Particle Physics, World Scientific, 2003, (2a edizione)
- [2] E. Fermi, Nuclear Physics, University of Chicago Press, 1950, (Edizione R.)
- [3] K.S. Krane., Introductory Nuclear Physics, John Wiley & Sons, 1988
- [4] B. Povh et al., Particles and Nuclei - An introduction to the physical concepts, Springer, 2015, (7a edizione)
- [5] E. Segrè, Nuclei e Particelle, Zanichelli, 1982, (2a edizione)
- [6] C. Villi et al., Lezioni di Istituzioni di Fisica Nucleare, CLEUP - PD, 1976, (Edizione aggiornata)