

Fisica Generale 1 – 018IN

Energia

Prof. Pierre Thibault
pthibault@units.it



Vis viva



Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646-1716)



↓
quantità di
moto

$\neq$
energia



René Descartes (1596-1650)

Thomas Young: "energy"

Coriolis: "énergie cinétique" $\frac{1}{2}mv^2$



Energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad \leftarrow \text{punto materiale di massa } m$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \leftarrow \text{insieme di punti materiali}$$

$$* \text{Unità: } 1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$$

* Energia : un scalare !

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Esempio : macchina di } 1000 \text{ kg a } 50 \text{ km/h} : K = \frac{1}{2} 1000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{50}{3.6} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$
$$= 97 \text{ kJ}$$

$$\text{a } 60 \text{ km/h} : 140 \text{ kJ}$$

Teorema lavoro-energia cinetica

Ricordo: Moto uniformemente accelerato in 1D:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

✓

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma(x - x_0)$$

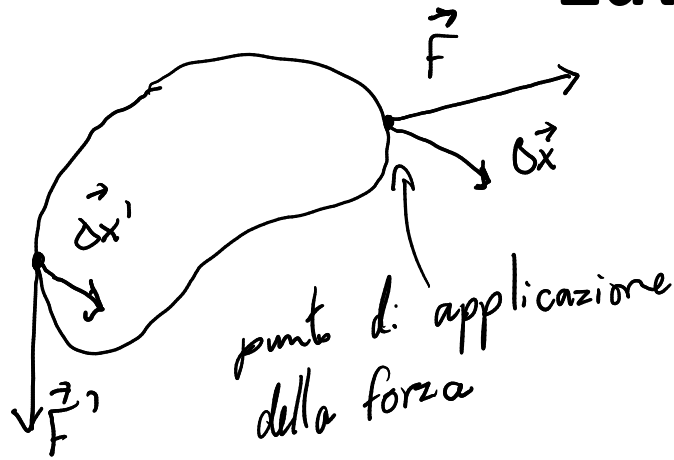
$$K - K_0 = F \underbrace{(x - x_0)}_{\text{spostamento}}$$

$$\Delta K = F \underbrace{\Delta x}_W \text{ lavoro compiuto da una forza costante } F \text{ su una distanza } \Delta x$$

* non è ancora un risultato generale, ma vedremo che $\Delta K = W$

Corpo esteso

Lavoro



$$W_{tot} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} + \vec{F}' \cdot \Delta \vec{r}' + \dots$$

* se il corpo non ruota e non si deforma, $\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}' = \dots$

$$W_{tot} = (\sum \vec{F}) \cdot \Delta \vec{r}$$

in questo caso, non importa dove si applica la forza

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

spostamento del punto di applicazione

* $\vec{F}$ parallela a $\Delta \vec{r}$: $W = F \Delta x$

* $\vec{F}$ perpendicolare: $W = 0$

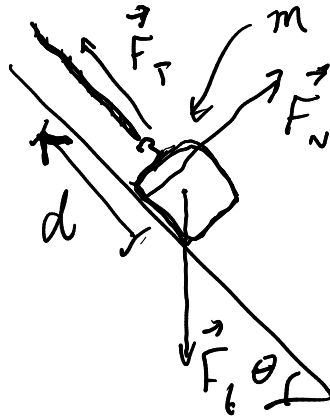
* $\vec{F}$ verso opposto: $W = -F \Delta x$

* Unità del lavoro: J

Lavoro

Esempio:

Un blocco trascinato
da un cavo su una
distanza d



senza attrito

* lavoro compiuto dalla forza
di tensione:

$$W_T = F_T d$$

* lavoro compiuto dalla forza normale:

$$W_N = 0 \quad F_N \perp \text{spostamento}$$

* lavoro compiuto dalla
forza di gravità:

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \Delta \vec{r}$$

$$= -F_g d \sin \theta$$

$$\begin{aligned} * W_{tot} &= W_T + W_g + W_N \\ &= (F_T - F_g \sin \theta) d \end{aligned}$$

Teorema lavoro-energia cinetica

2^a legge di Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (punto materiale di massa m)

$$dW = (\sum \vec{F}) \cdot d\vec{r}$$

← lavoro compiuto durante spostamento $d\vec{r}$ $d\vec{r}$ spostamento infinitesimale

$$= m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

durata dello spostamento

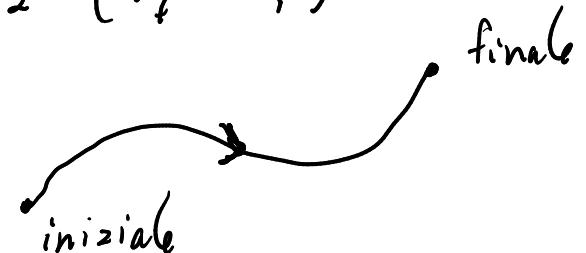
$$= m\vec{a} \cdot \vec{v} dt$$

$$= m \left(\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) dt$$

$$\frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \vec{v}$$

$$W_{tot} = \int dW = \int_i^f (\sum \vec{F}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} dt = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$$

$$W_{tot} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$



Teorema lavoro-energia cinetica

$$W_{\text{tot}} = \Delta K$$

Osservazioni:

* conseguenza diretta di $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
↳ si applica a punti materiali

* non è conservazione dell'energia

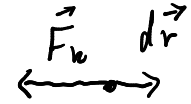
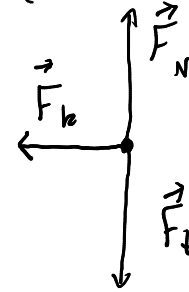
anche se dà risultati
uguali in casi importanti

* W_{tot} non è "lavoro" nel senso termodinamico

* Lavoro compiuto da una forza costante: $\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \underbrace{(\vec{r}_f - \vec{r}_i)}_{\substack{\text{spostamento} \\ \text{totale, indep. della} \\ \text{traiettoria}}}$

Esempio

La distanza di arresto di una macchina (che slitta)



Lavoro compiuto dalla forza di attrito

$$W_{\text{tot}} = \int_i^f \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = - \int_0^d F_k dx = -F_k d$$

$$W_{\text{tot}} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\Rightarrow -F_k d = -\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$d = \frac{mv_i^2}{2F_k} = \frac{v_i^2}{2\mu_k g}$$

$$F_k = F_N \mu_k = mg \mu_k$$

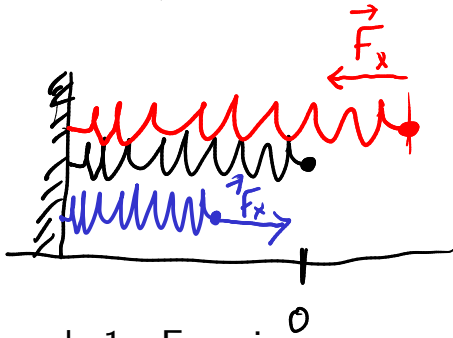
Esempio

Lavoro compiuto da una forza variabile



Robert Hooke (1635-1703) "legge di Hooke"

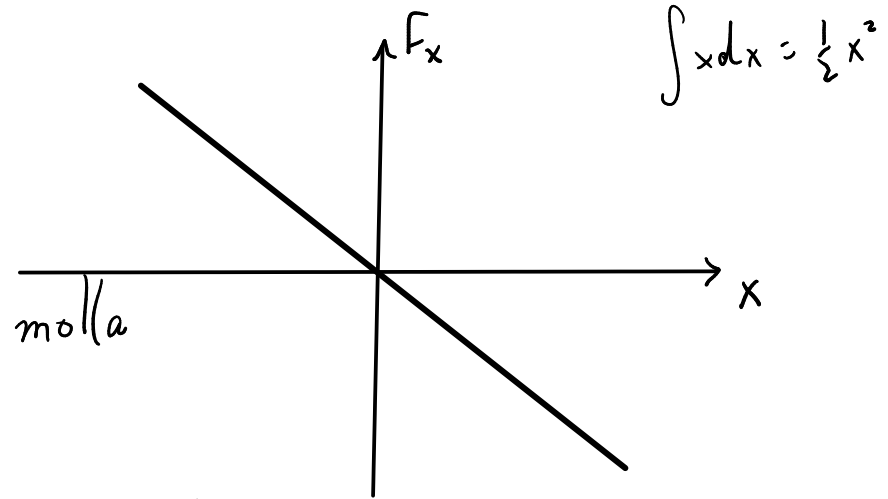
Modello per la forza prodotta da una molla



$$W_{tot} = \int_i^f \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Caso importante (e semplice): relazione lineare tra distanza e forza

$$F_x = -kx$$



$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_x \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -\frac{k}{2} (x_f^2 - x_i^2)$$

indipendente del percorso

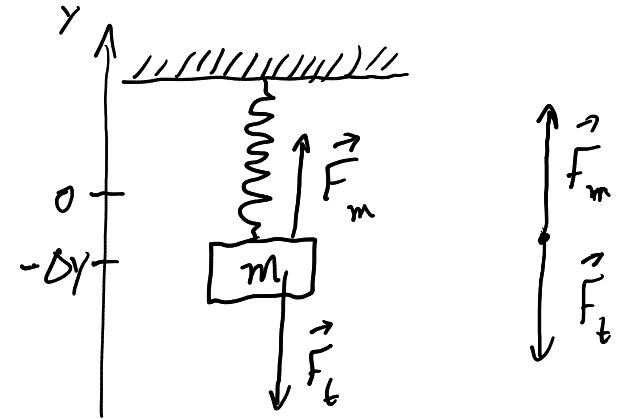
Esempio

1) blocco sospeso con una molla

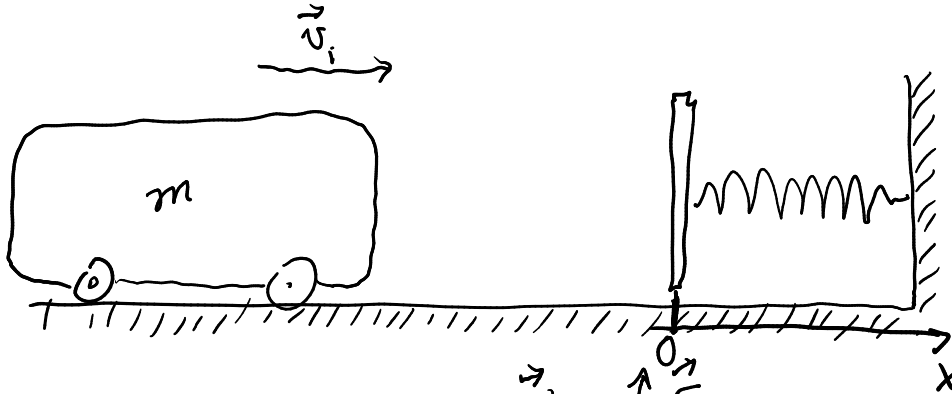
* costante della molla: k

* blocco immobile: $\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$

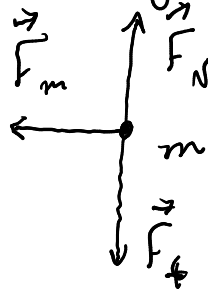
$$\vec{F}_m + \vec{F}_t = 0 \quad k\Delta y = mg \quad \Delta y = \frac{mg}{k}$$



2)



dopo contatto
con la molla



Quale deve essere k in tal
modo che l'accelerazione sia
al massimo a_{max}

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ solo la componente orizzontale
ci interessa

$$F_m = ma_x$$

Esempio

$$F_m = ma_x$$

$$-kx = ma_x$$

$$a_x = \frac{-k}{m} x$$

$$a_{max} = \left| \frac{-k}{m} x_{max} \right| \rightarrow x_{max} = \frac{ma_{max}}{k}$$

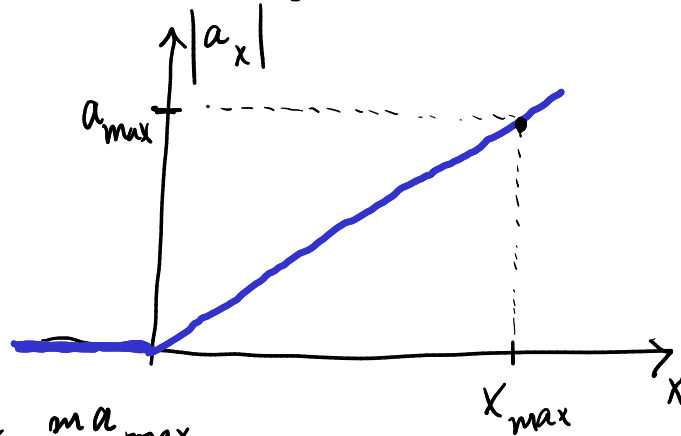
Teorema lavoro - energia cinetica

$$W = \Delta K$$

iniziale: v_i , $x_i = 0$

finale: $v_f = 0$, $x_f = x_{max} = \frac{ma_{max}}{k}$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}mv_i^2$$



Domanda equivalente:
quale deve essere k
in tal modo che la
molla non si
comprima di più
di $x_{max} = \frac{ma_{max}}{k}$

$$W = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2) = -\frac{k}{2}x_f^2$$

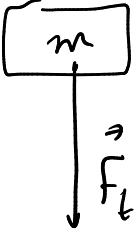
~~$$\frac{k}{2}x_{max}^2 = \frac{1}{2}mv_i^2$$~~

~~$$\frac{k}{2} \frac{m^2 a_{max}^2}{k^2} = \frac{1}{2}mv_i^2$$~~

$$k = \frac{ma_{max}^2}{v_i^2}$$

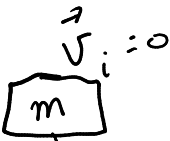
$$k < m \frac{a_{max}^2}{v_i^2}$$

Lavoro compiuto dalla forza di gravità

y_i —  $\vec{F}_g$

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = mg(y_f - y_i)$$

indipendente del percorso!

y_f — y_i —  $\vec{v}_i = 0$

$$W = \Delta K$$
$$W = mg(y_f - y_i)$$

la componente x dello spostamento non influisce questo risultato!

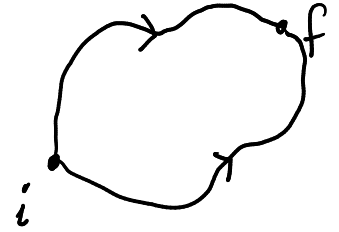
$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$
$$= \frac{1}{2}mv_f^2$$

y_f —  $\vec{v}_f$

$$v_f = \sqrt{2g(y_f - y_i)}$$

Forze conservative

Una forza è definita come conservative se



* $\int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r}$ è indipendente del percorso

oppure

* $\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
diversi percorsi

oppure

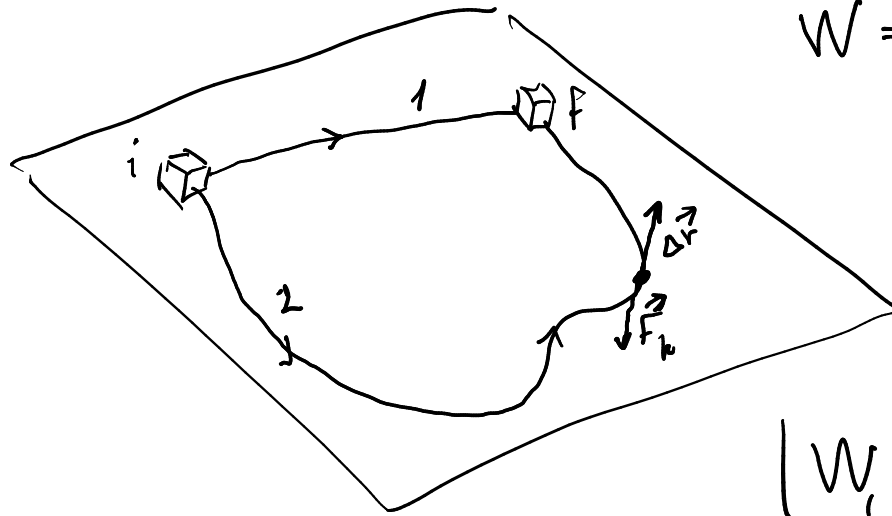
* $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ← integrale su un percorso chiuso

* esiste una funzione $U(\vec{r})$ tale che $\vec{F} = \nabla U$

$$\nabla U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}$$

Forze conservative

esempio di forza non-conservativa: attrito



$$W = \int_i^f \vec{F}_k \cdot d\vec{r}$$
$$= -F_k S$$

lunghezza
del percorso

$$|W_1| < |W_2|$$

Forze conservative e non conservative

Conservative

- * Gravità
- * Forza elastica
- * Forza elettrica
- * ...

Non-conservative

- * Attrito
- * Resistenza dell'aria
- * Forza compinta da una persona
- * ...

Abbiamo speso un tempo considerevole per discutere le forze conservative; che cosa diremo delle forze non conservative? Approfondiremo l'argomento più di quanto non si faccia solitamente, e stabiliremo che non esistono forze non conservative! In realtà, tutte le forze fondamentali nella natura appaiono conservative. Questa non è una conseguenza delle leggi di Newton. Infatti, per quanto ne sapeva Newton, le forze avrebbero potuto essere non conservative, come apparentemente è l'attrito. Quando diciamo che l'attrito *apparentemente* lo è, usiamo un punto di vista moderno, essendo stato scoperto che tutte le forze elementari, le forze fra le particelle a livello fondamentale, sono conservative.



Energia potenziale

$$W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{dipende solo da } \vec{r}_i, \vec{r}_f \quad \text{se } \vec{F} \text{ è conservativa}$$

$$= [-U(\vec{r}_f)] - [-U(\vec{r}_i)]$$

energia potenziale

In altre parole: $-\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}) + \text{costante}$

$$W_{if} = -\Delta U_{if}$$

il lavoro compiuto da i a f
è uguale al negativo della
differenza di energia potenziale

$$U(\vec{r}) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} + \text{costante}$$

Energia potenziale

* Modo di immagazzinare energia per essere ^{usato} successivamente
per compiere un lavoro "potenziale di compiere un lavoro"

* Gravità

$$\int \vec{F}_t \quad \vec{F}_t = -mg\hat{j} \quad d\vec{r} = dy\hat{j}$$

$$U(y) = mgy$$

$$U(y) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int (-mg dy) = mgy + \text{cst.}$$

* Elastica:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -kx dx$$

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$U(x) = - \int (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 + \text{cst}$$

Pompaggio idroelettrico



- Fonti di energia rinnovabile spesso variabile
- Stoccaggio è essenziale
- Pompaggio idroelettrico in Italia: capacità 8 TWh annui.

$h = 1050 \text{ m}$
 $V = 9000000 \text{ m}^3$
 $= 90 \text{ TJ}$

$$U = mgh = \rho V g h = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9 \times 10^6 \text{ m}^3 \cdot 1050 \text{ m} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Potenza

$P = \frac{dW}{dt}$ quantità di energia trasferita per unità di tempo

Unità: Watt $1W = \frac{1J}{1s}$ $1.4 MW = \frac{1.4 MWh}{1h}$

Unità di energia elettrica comune: $kWh = 1000W \cdot 3600:$
 $= 3.6 MJ$

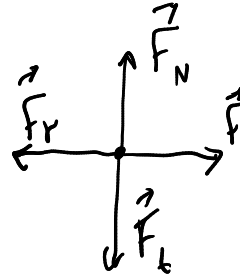
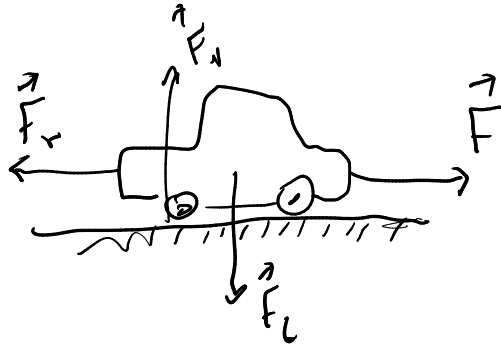
$90 TJ = 25 GWh = 25 \times 10^6 kWh$

Entraque: flusso massimo per la turbina $130 m^3/s$

Potenza massima? $P = \left| \frac{dW}{dt} \right| = \left| \frac{dU}{dt} \right| = \frac{d}{dt}(mgh) = \frac{dm}{dt} gh = \rho \frac{dV}{dt} gh = 1.4 MW$

Esercizio

Una macchina di 10^3 kg necessita 16 hp di potenza per andare a velocità costante di 80 km/h . Quale potenza è necessaria per salire una pendenza di 10° ? ($1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$) (alla stessa velocità)



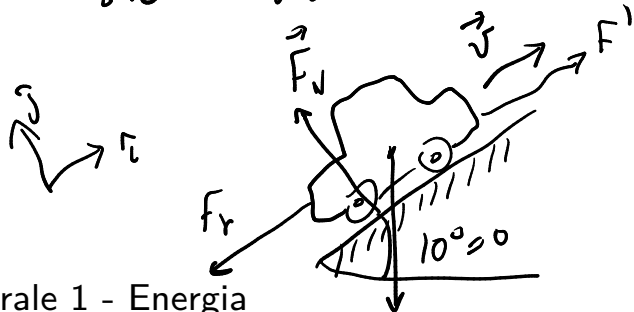
velocità costante: $\vec{a} = 0$

$$m\vec{a} = 0 = \sum \vec{F}$$

$$F_r = F$$

$W = Fd$ ← lavoro compiuto dalla forza di trazione su una distanza d

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(Fd) = F \frac{dd}{dt} = Fv \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P}{v} \quad F_r = \frac{P}{v}$$

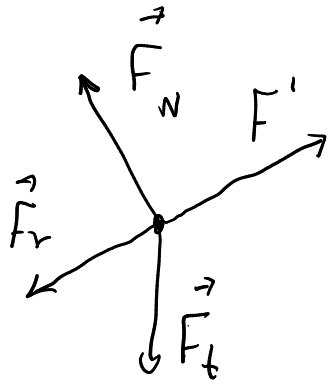


componente x : $F' - F_r - mg \sin \theta = 0$

$$\Rightarrow F' = F_r + mg \sin \theta$$

Esercizio

$$P' = F'v = \underbrace{F_r v}_{P} + mgv \sin \theta = 67 \text{ hp}$$



Osservazioni: * F_r è lo stesso di prima perché dipende solo dalla velocità

* F' deve compensare per F_r e per il cambio di altezza

$$P = \frac{dW}{dt} = \int_i^f \frac{d}{dt} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt}_{\text{potenza totale dal tempo iniziale al tempo finale}}$$

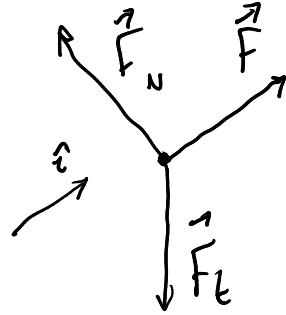
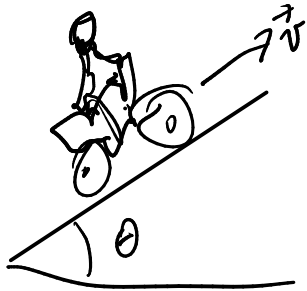
$$\vec{v} dt = d\vec{r}$$

Potenza istantanea

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Esercizio

Velocità massima di un motorino elettrico di $\overbrace{3000\text{W}}^{\text{potenza del motore}}$ in salita di 10%. La massa motorino + guidatore: 200 kg
(si trascura la resistenza dell'aria)



componente lungo la strada:

$$F - mg \sin \theta = 0 \quad \checkmark \text{ no accelerazione}$$

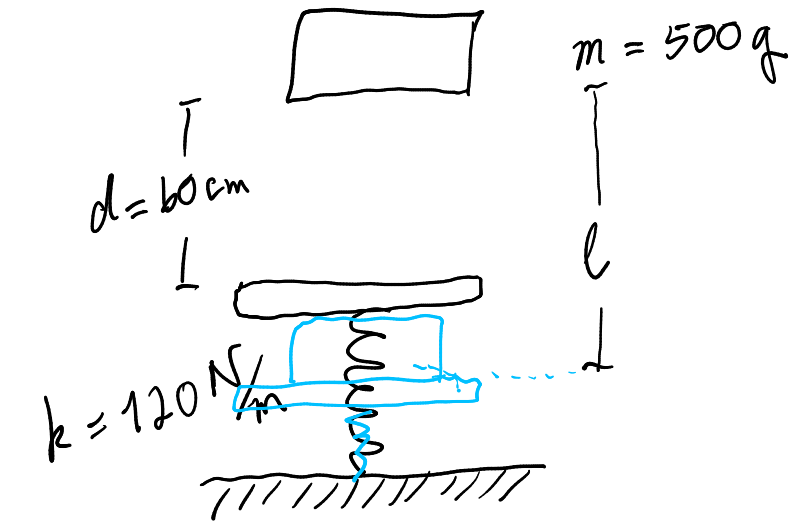
$$F = mg \sin \theta$$

$$P = Fv = mgv \sin \theta$$

$$v = \frac{P}{mg \sin \theta} = 55 \text{ km/h}$$

$$\tan \theta = 0.1 \Rightarrow \theta \approx 5.7^\circ$$

Esercizio



inizialmente



dopo contatto



$$l = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kd}{mg}} \right) + d$$

$$= 86.6 \text{ cm}$$

Qual è l al momento in cui l'assieme blocco-piataforma si ferma?

Teorema lavoro-energia cinetica

$$\Delta K = 0 \quad \text{perché } v_{\text{iniziale}} = 0 \text{ e } v_{\text{finale}} = 0$$

$$W = \Delta K = 0 = W_g + W_m$$

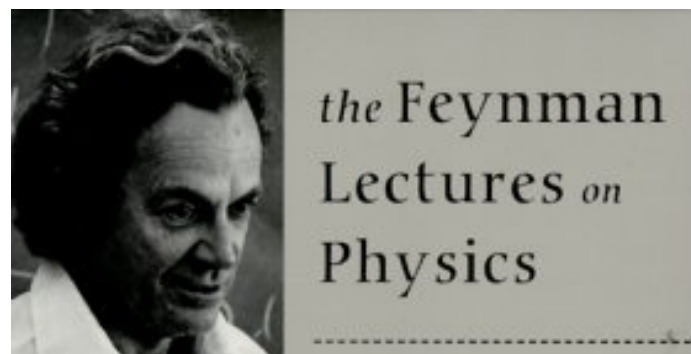
$$W_g = mgl \quad W_m = -\frac{1}{2}k(l-d)^2$$

$$mgl - \frac{1}{2}k(l-d)^2 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$mgl - \frac{1}{2}kl^2 + kld - \frac{1}{2}kd^2 = 0 \quad \dots$$

Conservazione dell'energia

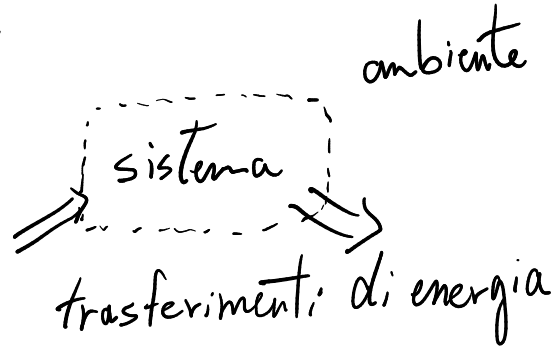


There is a fact, or if you wish, a *law*, governing all natural phenomena that are known to date. There is no known exception to this law—it is exact so far as we know. The law is called the *conservation of energy*. It states that there is a certain quantity, which we call energy, that does not change in the manifold changes which nature undergoes.

It is important to realize that in physics today, we have no knowledge of what energy *is*.

Conservazione dell'energia

1) sistema



esempi di sistemi:

- * un corpo solo
- * due (o più) corpi che interagiscono
- * un corpo deformabile
- * una regione dello spazio

2) conservazione dell'energia

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum \text{trasferimenti} \leftarrow \text{lavoro} + \text{calore}$$

3) meccanica:

$$E_{\text{sistema}} = \boxed{K + U} + U$$

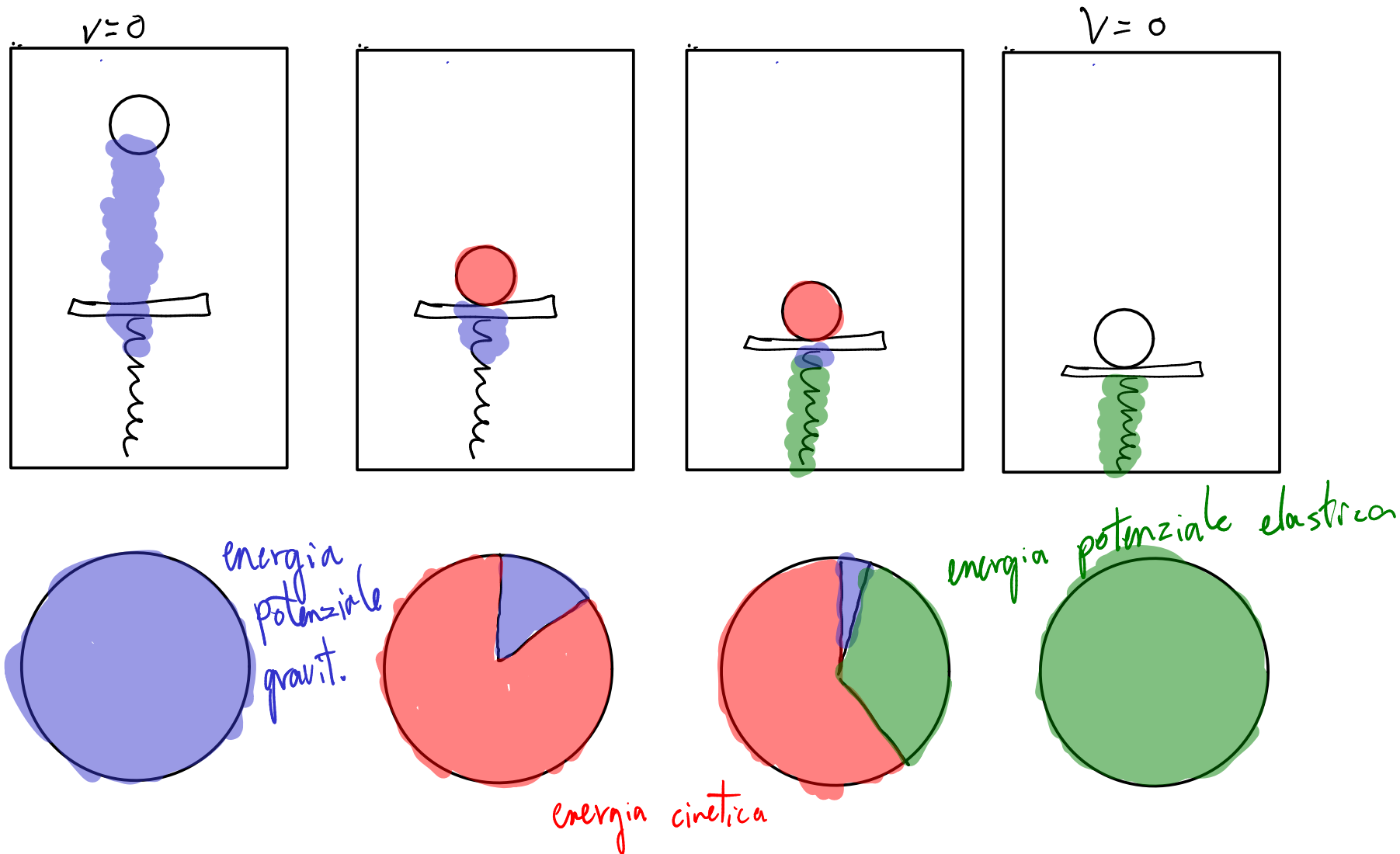
energia meccanica (pointing to the box)
energia interna (pointing to the second U)
(termodinamica) (pointing to the second U)

Meccanica:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Delta K + \Delta U$$

= W
lavoro compiuto sul sistema

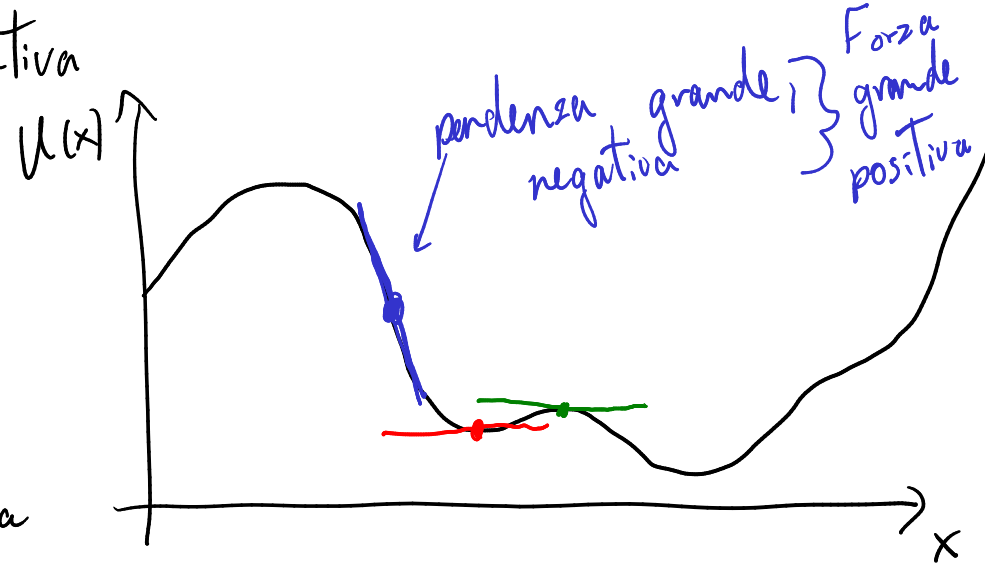
Conservazione dell'energia



Energia potenziale

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

forza conservativa

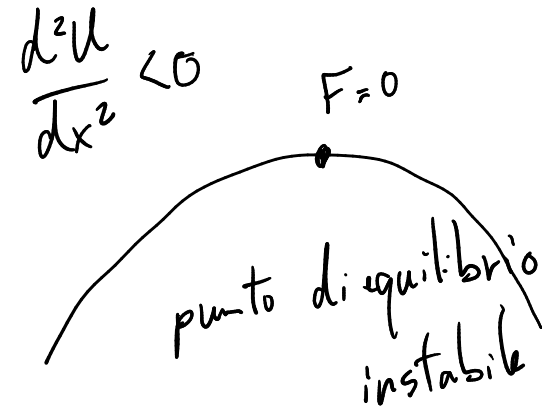
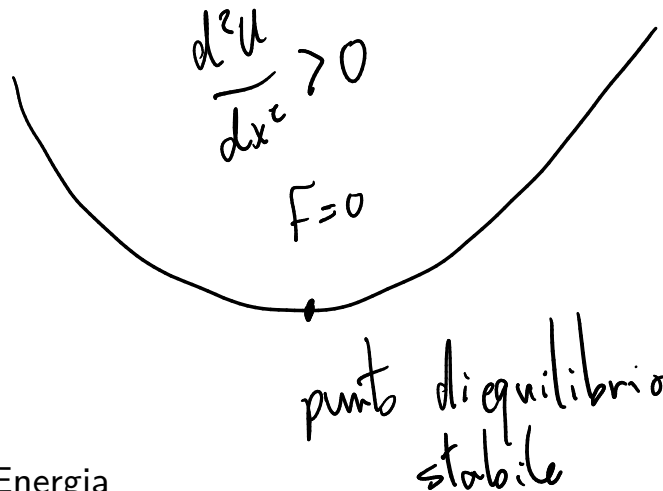


1D

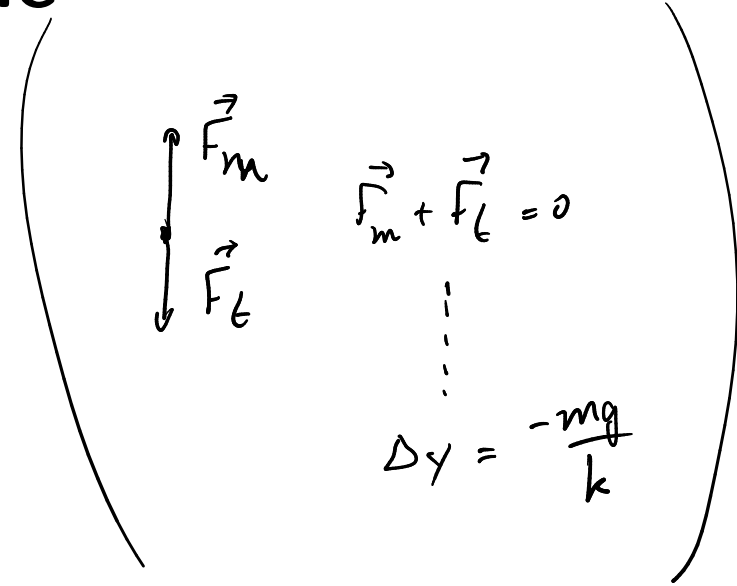
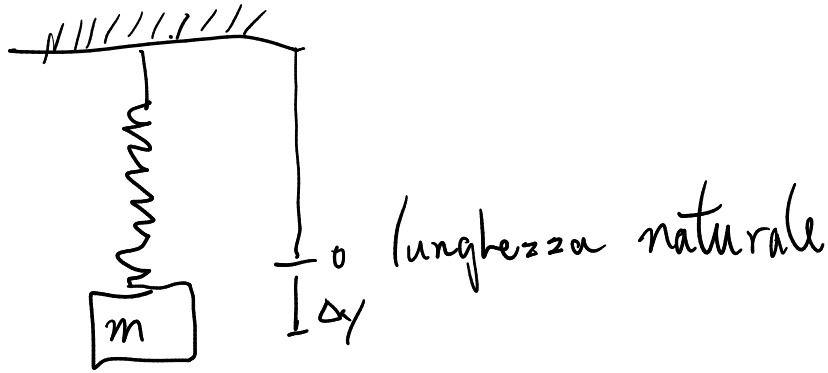
$$U(x) = - \int F_x dx$$

$$\frac{dU}{dx} = - F_x$$

forza = - pendenza



Energia potenziale



Energia potenziale totale

$$U(y) = mgy + \frac{1}{2}ky^2$$

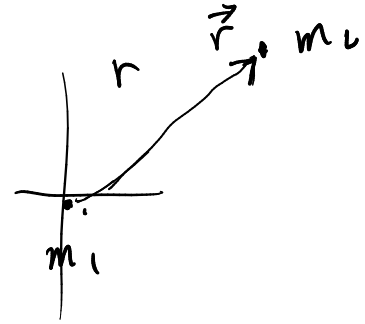
equilibrio: $\frac{dU}{dy} = 0 = mg + ky = 0$

$$\Rightarrow y = -\frac{mg}{k} \quad \text{punto di equilibrio}$$

Energia potenziale gravitazionale

Legge universale della gravitazione:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



Lavoro compiuto da questa forza:

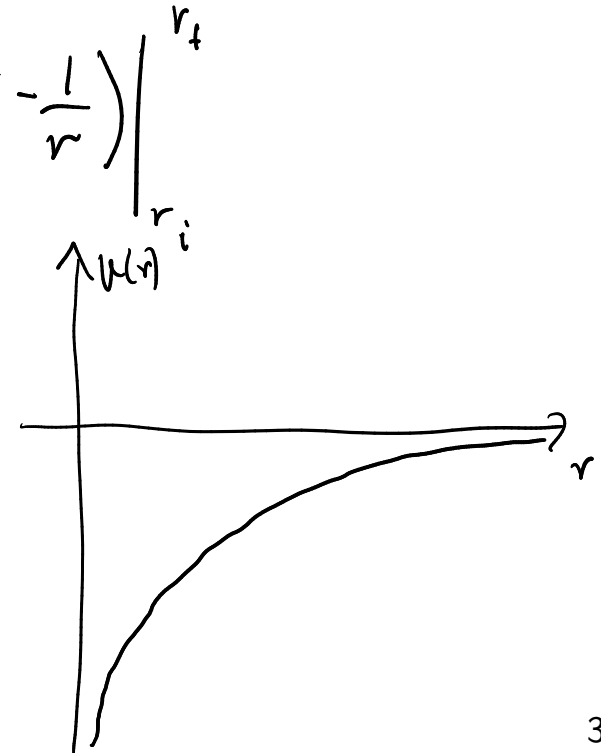
$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = G \int_{r_i}^{r_f} \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_i}^{r_f}$$

$$U(r) = -W = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

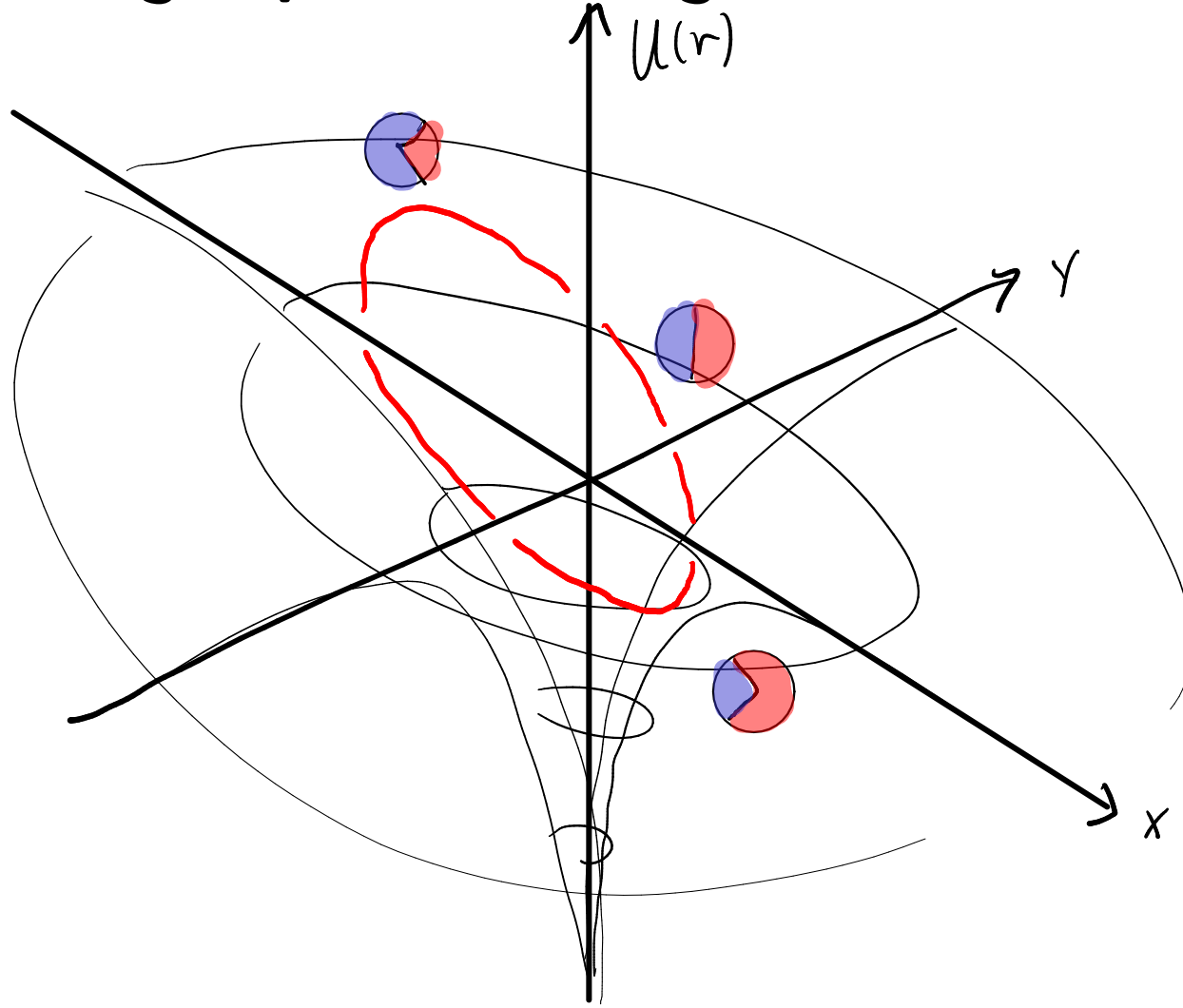
Energia meccanica totale di un satellite in orbita

alorno la terra:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G m_2 m}{r} = \text{costante}$$



Energia potenziale gravitazionale



Velocità di fuga

corpo in un campo gravitazionale: $E = K + U$

* no lavoro esterno

* nessun dissipazione

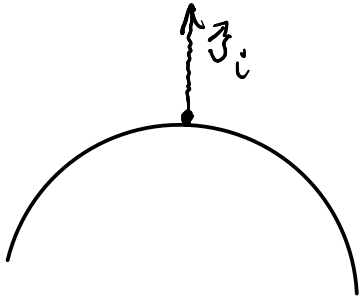
$\Rightarrow$ energia conservata

$$\Delta E = 0$$

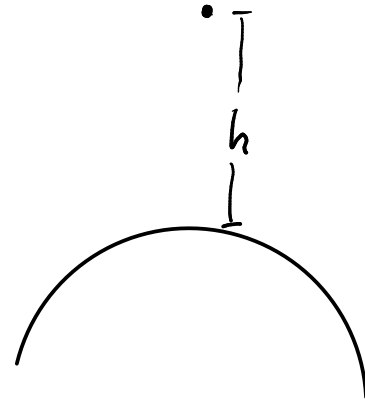
$$E_i = E_f$$

$$E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{Gmm_t}{R_t}$$

raggio
della terra $\nearrow$



$$E_f = K_f + U_f = 0 - \frac{Gmm_t}{R_t + h}$$



Velocità di fuga

$$E_i = E_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v_i^2 = G m m_t \left(\frac{1}{R_t} - \frac{1}{R_t + h} \right) \quad (*)$$

$$= G m m_t \left(\frac{(R_t + h) - R_t}{R_t (R_t + h)} \right)$$

$$\frac{1}{2} m v_i^2 (R_t^2 + R_t h) = G m m_t h$$

$$\left(\frac{1}{2} m v_i^2 R_t - G m m_t \right) h = -\frac{1}{2} m v_i^2 R_t^2$$

$$h = \frac{-\frac{1}{2} m v_i^2 R_t^2}{\left(\frac{1}{2} m v_i^2 R_t - G m m_t \right)} = \frac{R_t}{\left(\frac{2 G m_t / R_t}{v_i^2} - 1 \right)}$$

Altezza raggiunta se velocità iniziale è v_i :

$$h = \frac{R_t}{\left(\frac{2 G m_t}{R_t v_i^2} - 1 \right)}$$

Velocità di fuga

$$\text{Velocità di fuga: } h \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{2 G m_t}{R_t v_i^2} = 1$$

oppure:

$$(*) \text{ con } h \rightarrow \infty : \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{G m m_t}{R_t}$$

$$\frac{G m_t}{R_t^2} = g$$

$$v_i = v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2 G m_t}{R_t}}$$

$$= \sqrt{2 g R_t} \approx 11000 \text{ m/s} \approx 40000 \text{ km/h}$$

Riassunto

* Energia cinetica: $K = \frac{1}{2}mv^2$

↳ additiva

↳ dipende dal sistema di riferimento

* Lavoro: $W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$

↳ il "contributo energetico" di una forza lungo un percorso

↳ se indipendente del percorso
 $\Rightarrow \vec{F}$: conservativa

* Teorema lavoro-energia cinetica $\Delta K = W_{tot}$

↳ conseguenza della 2° legge di Newton

"sempre" valida per 1 punto materiale

* Energia potenziale

$$U(\vec{r}) = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + \text{costante}$$

↳ forza conservativa

↳ potenziale di compiere un lavoro

↳ modo di immagazzinare energia

* Conservazione dell'energia meccanica

$$\Delta E_{\text{sistem}} = \Delta K + \Delta U = W$$

↳ lavoro compiuto sul sistema

Spesso: si può definire un sistema per cui

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K_i + U_i = K_f + U_f$$