

FISICA NUCLEARE (9)

- Radioattività γ
 - Energetica dei decadimenti γ
 - Regole di selezione per i decadimenti γ
- Processi d'urto
 - Sezioni d'urto
 - Lunghezza di attenuazione
 - Luminosità
 - Sezione d'urto in funzione dell'impulso
 - Sezione d'urto invariante
 - Probabilità di transizione e sezione d'urto
- Approccio quantistico

Radioattività γ

- Nucleo eccitato emette γ se en. d'eccitazione non basta ad espellere nucleone ($\sim 7\div 8$ MeV): è solo modo in cui può liberarsi dall'eccesso d'energia, assieme a conversione interna
- Se en. d'eccitazione $>$ energia separazione nucleone, nucleo si diseccita γ quando emissione nucleone vietata da regole di conservazione parità o momento angolare
- γ da nuclei analogo X da atomi \Rightarrow diseccitazione con emissione γ d'energia = diff. fra due stati, a meno di **rinculo del nucleo**
- Emissione γ segue tipicamente decad. α o β che lasciano eccitato nucleo figlio
- Vite medie $\lesssim 10^{-9}$ s. Più lunghe se associate a stati **isomerici**
- Spesso **conversione interna** compete con emissione γ
- Possibili transiz. radiative in cascata con nucleo che emette due o più γ *in sequenza*
- Radiazione γ ha lung. d'onda $\lambda = \hbar/p_\gamma \simeq R$, con $R = r_0 A^{1/3} \Rightarrow$
$$p_\gamma = E_\gamma / c \simeq \hbar / (r_0 A^{1/3})$$
per nuclei leggeri $E_\gamma \sim$ qualche MeV, e cala al crescere di A

Energetica dei decadimenti γ

Nucleo di massa M decad γ da stato eccitato E_i a stato finale E_f

Impulso ed en. rinculo del nucleo: \mathbf{p}_R ed E_R

Conservazioni:

$$\left. \begin{aligned} E_i &= E_f + E_\gamma + E_R \\ 0 &= \mathbf{p}_R + \mathbf{p}_\gamma \end{aligned} \right\}$$

quindi $\mathbf{p}_R = -\mathbf{p}_\gamma$ da cui,
e ricordando $E_R = \sqrt{M^2 c^4 + p_R^2 c^2}$

$$E_i - E_f = \Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$$

quindi $E_\gamma = Mc^2 \left[-1 \pm \left(1 + 2 \frac{\Delta E}{Mc^2} \right)^{1/2} \right]$ ma $\Delta E \approx \text{MeV} \ll$ energie a riposo $\approx A \times 10^3 \text{ MeV}$
 \Rightarrow sviluppando $\sqrt{}$ fino al terzo termine ...

$$E_\gamma \simeq \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

Termine legato a rinculo dell'ordine di 10^{-5} ; trascurabile per **effetto Mössbauer**,
dove M è massa macroscopica del cristallo bersaglio

Probabilità di transizione

Piccolo valore $\alpha = e^2/\hbar c \simeq 1/137 \Rightarrow$ prob. P transiz. radiativa calcolabile con perturbazioni dipendenti da t e la solita **regola d'oro**:

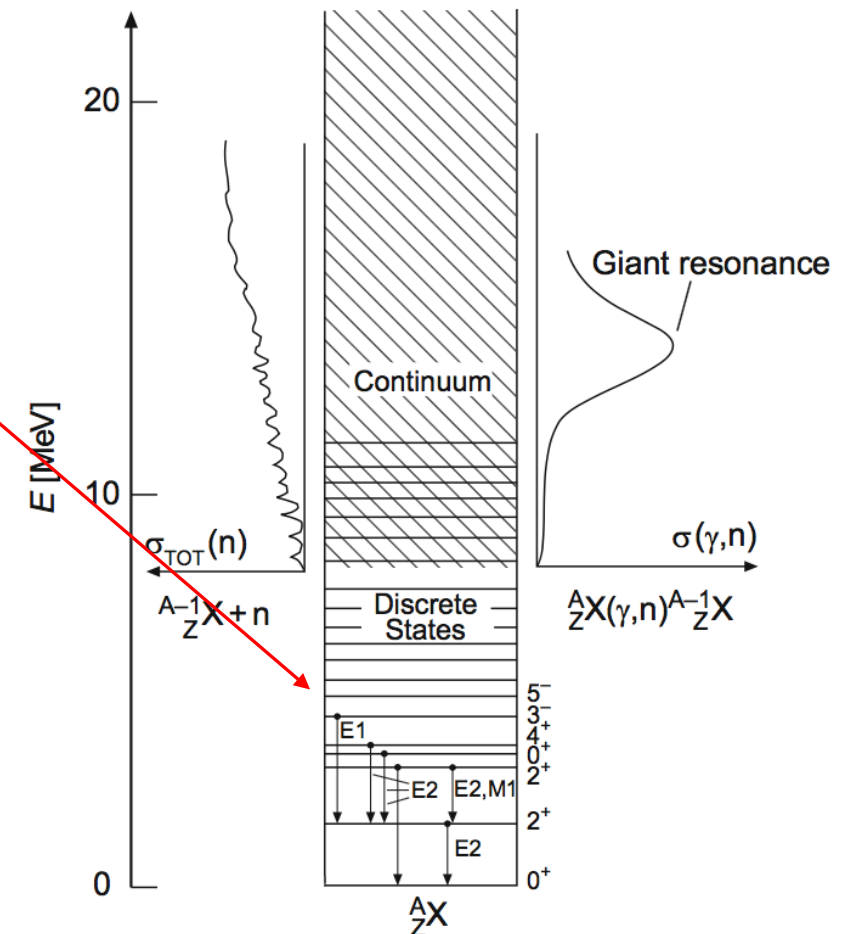
$$P = 2\pi |M_{if}|^2 dn/(\hbar dE)$$

M_{if} el. matrice Ham. interaz. tra campo e.m. e (cariche + mom. magnetici) dei nucleoni

Regole di selezione

Nucleo **pari-pari** con $A \approx 100$. Sopra lo stato fondamentale stati discreti individuali J^P

- Eccitazione nuclei **pari-pari** corrisponde generalmente a **rottura legame** fra coppia di nucleoni e richiede $\approx 1 \div 2$ MeV
Con $A \gtrsim 40$, eccitazioni $\gtrsim 2$ MeV
- **Stati collettivi** in **nuclei deformati** sono eccezione, non spiegabili come eccitazione di singola particella
- In nuclei **dispari-pari** e **dispari-dispari**, numero stati eccitati a basse energie (\sim centinaia di keV), è considerevolmente maggiore



Stati eccitati a bassa energia decadono solitamente emettendo radiazione e. m. :

- si descrive con sviluppo in serie di sovrapposizione di diversi termini multipolari, ognuno con propria distribuzione angolare (ϑ, φ)

Radiazione elettrica di dipolo, quadrupolo, ottupolo, ecc., indicata con **E1**, **E2**, **E3**, ecc. ; similmente la corrispondente radiazione multipolare magnetica con **M1**, **M2**, **M3**, ecc.

- **Cons. mom. angolare e parità, determinano multipolarità permesse nella transizione**

Tabella 5.1: Regole di selezione per decadimenti γ

Multipolarità	Elettrica			Magnetica		
	$E\ell$	$ \Delta J $	ΔP	$M\ell$	$ \Delta J $	ΔP
Dipolo	E1	1	-	M1	1	+
Quadrupolo	E2	2	+	M2	2	-
Ottupolo	E3	3	-	M3	3	+

Tabella 5.2: Esempi di transizioni nucleari elettromagnetiche

$J_i^{P_i}$	$J_f^{P_f}$	ΔP	L	Transizioni permesse
0^+	0^+	No	—	Nessuna
$(1/2)^+$	$(1/2)^-$	Sì	1	E1
1^+	0^+	No	1	M1
2^+	0^+	No	2	E2
$(3/2)^-$	$(1/2)^+$	Sì	1, 2	E1, M2
2^+	1^+	No	1, 2, 3	M1, E2, M3
$(3/2)^-$	$(5/2)^+$	Sì	1, 2, 3, 4	E1, M2, E3, M4

- Nucleo eccitato ${}^A_Z X^*$ può anche decadere nello stato fondamentale ${}^A_Z X$ senza emettere γ ma cedendo l'energia d'eccitazione a e^- atomico per **conversione interna**

Vita media stato eccitato è quindi \ll che per il solo decadimento γ , dato che le probabilità si sommano

con λ_c prob. di conversione interna

$$\lambda_{tot} = \lambda_\gamma + \lambda_c$$

Sezione d'urto

Misura tassi e dist. ang. prodotti di reazione, descrive dinamica interaz., forma pot. d'interazione e intensità accoppiamento

- Fascio collimato di particelle **a** (intensità I_a) incidenti su bersaglio nuclei **X**: $I_a = dN_a/dt = n_a v_a S$
 n_a = densità nel fascio ; v_a = loro velocità ; S = sez. retta fascio
 $j_a = n_a v_a$
- N_t nuclei bersaglio per unità d'area ; R_b rateo particelle in uscita dalla reazione \Rightarrow **sezione d'urto σ**

(no ombra)

$$I_a N_t \sigma = R_b$$

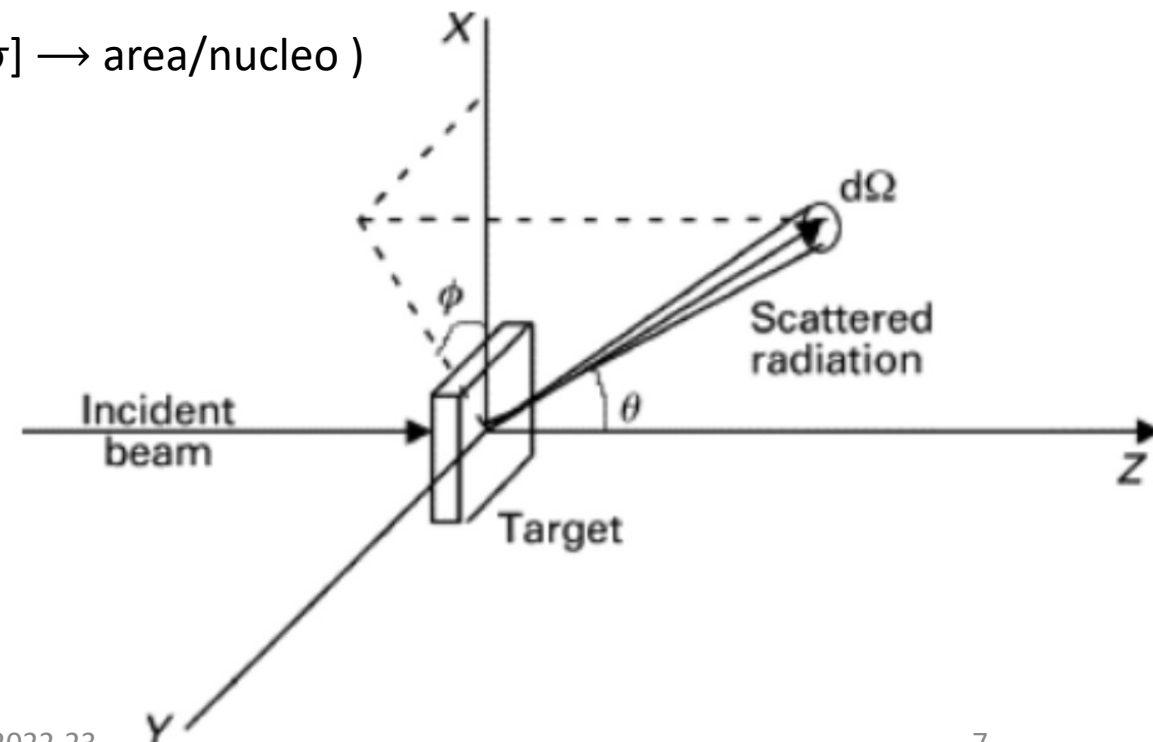
$$\sigma = \frac{R_b}{I_a N_t}$$

($[\sigma] \rightarrow$ area/nucleo)

Sez. d'urto reazione: area efficace \propto probabilità che la reazione avvenga

Tasso di reazione dN/dt : # di particelle che attraversando nell'unità di tempo l'unità d'area d'un bersaglio, interagiscono con esso

$$\frac{dN}{dt} = n_a v_a N_t \sigma$$



Rivelatore come in fig. rivela particelle b entro $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$

- $dR_b = r(\vartheta, \varphi) d\Omega / 4\pi$ frazione di rateo intercettata da rivelatore, con $r(\vartheta, \varphi)$ distrib. ang. delle particelle uscenti
- Se $d\sigma$ è frazione di sezione d'urto esplorata \Rightarrow

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r(\vartheta, \varphi)}{4\pi I_a N_t} \quad (\text{sez. d'urto differenziale})$$

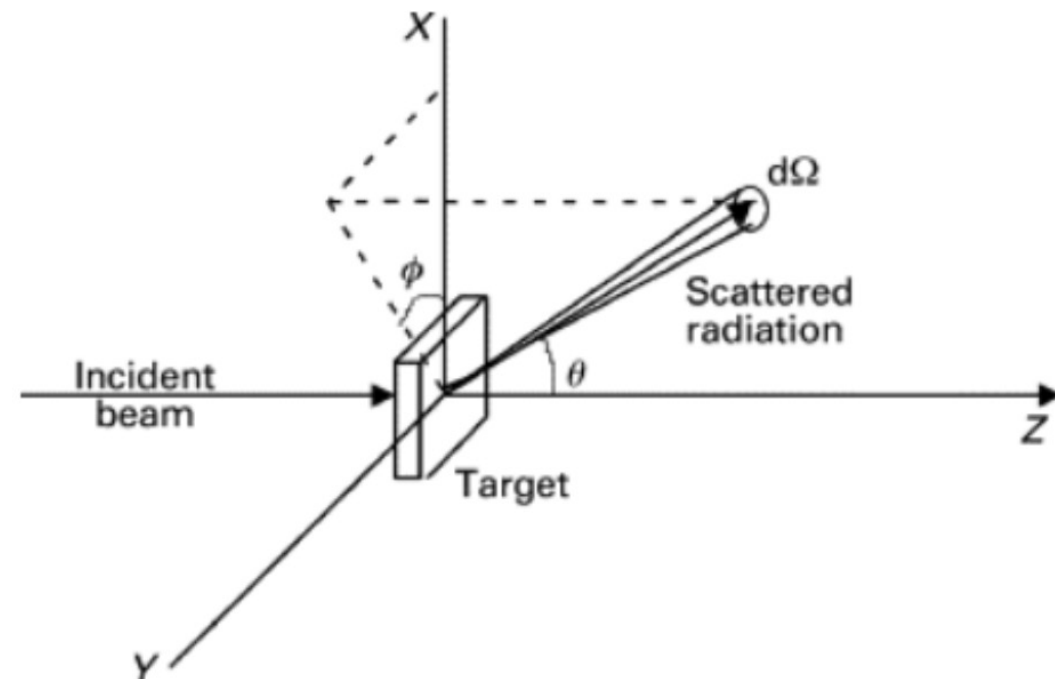
- **Sez. d'urto di reazione σ** integrando $d\sigma/d\Omega$ sull'angolo solido:

- **Sez. d'urto doppiamente differenziale:** $d^2\sigma/dE_b d\Omega$

- L'attenuazione del fascio è descritta dalla sezione d'urto considerata totale σ_{Tot} , senza distinzione per tipologie d'interazione

- Si può voler distinguere fra interazioni **anelastiche** ed **elastiche**, scrivendo

$$\sigma_{Tot} = \sigma_{el} + \sigma_{anel}$$



$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\varphi$$

Lunghezza di attenuazione

- Fascio di intensità I_0 su bersaglio spesso di densità $\rho \text{ kg}\times\text{m}^{-3}$ ($\text{g}\times 10^3\times\text{m}^{-3}$)
 z = percorso proiettili nel bersaglio. Si vuole intensità residua $I(z)$ in funzione di z

$dI(z) = -dR_i$, con dR_i # d'interazioni per unità di tempo fra proiettili e bersaglio nello spessore dz

Densità flusso incidente in funzione di z : $j_a(z) = \frac{I(z)}{S}$ con S area sez. retta del fascio

Se n_t densità volumetrica nuclei bersaglio

$$dI(z) = -dR_i = -\sigma_{Tot} j_a(z) S dN_t = -\sigma_{Tot} \frac{I(z)}{S} n_t S dz$$

da cui: $\frac{dI(z)}{I(z)} = -n_t \sigma_{Tot} dz$ e infine $I(z) = I_0 e^{-n_t z \sigma_{Tot}}$

Lunghezza d'attenuazione

$$L_{att} = \frac{1}{n_t \sigma_{Tot}}$$

(distanza percorsa dal fascio nel bersaglio, per ridurre intensità di $1/e$)

Esplicitando relazione fra ρ ed n_t , con N_0 num. Avogadro, A massa in grammi di una mole di nuclei bersaglio

$$n_t = \frac{\rho N_0 10^{-3}}{A}$$

Luminosità

Luminosità \mathcal{L} , urti potenziali nell'unità di tempo fra proiettili e centri diffusori bersaglio

$$I_a N_t S = I_a n_t \Delta z S \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = I_a N_t S = \frac{R_b}{\sigma} \quad [\mathcal{L}] = [m]^{-2} [s]^{-1} \quad R_b = \sigma \mathcal{L}$$

- Per due fasci di pacchetti **equi-spaziati** mutuamente collidenti in anello d'accumulazione di circonferenza C , si definisce luminosità come segue:
 - k pacchetti circolanti nei due versi con velocità $|v|$ e rispettivamente N_a ed N_t particelle;
 - opportuni campi magnetici li fanno collidere in un punto della traiettoria $(kv)/C$ volte al secondo; la luminosità è quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{(N_a N_b k v)/C}{S}$$

- Si definisce **luminosità integrata** $\mathcal{L}_{int} = \int \mathcal{L} dt$

- Numero $N(\Delta t)$ di interazioni osservabili nel tempo Δt $N(\Delta t) = \mathcal{L}_{int} \cdot \sigma_{Tot}$

Quantità utile per progettare acceleratori e definire tempi di misura su statistiche predefinite

Sezione d'urto in funzione dell'impulso

$$\sigma_{Tot} = \int_f \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}} d\mathbf{p}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{p} &\equiv dp'_x dp'_y dp'_z && \text{cartesiane ortogonali} \\ &\equiv p'^2 dp' \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi' && \text{sferiche} \\ &\equiv p'_\perp dp'_\perp dp'_\parallel d\varphi' && \text{cilindriche} \end{aligned}$$

Sezione d'urto invariante

- Caratteristiche processo non dipendono da sistema riferimento scelto per la misura
- Sez. d'urto è sostanzialmente superficie \perp velocità particelle incidenti \Rightarrow **invariante relativistico**
- Si può esprimere sez. d'urto differenziale in funzione di variabili invarianti: rapporto $d\mathbf{p}_\parallel/E$ è **invariante**, essendo $(E/c) = (p_\perp^2 + p_\parallel^2 + m^2c^2)^{1/2}$

$$\begin{aligned} dp'_\parallel &= \gamma (dp_\parallel - \beta dE) = \gamma dp_\parallel \left(1 - \frac{\beta p_\parallel}{E}\right) = \\ &= \frac{\gamma E - \beta \gamma p_\parallel}{E} dp_\parallel = \frac{E'}{E} dp_\parallel \end{aligned}$$

Quindi sez. d'urto

$$E \frac{d\sigma}{d\mathbf{p}}$$

è invariante

essendo indep. dal sist. rif. scelto per la misura

Probabilità di transizione e sezione d'urto

$$\boxed{dP_{i \rightarrow f}/dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP_{i \rightarrow f}}{dt} \frac{V}{v_a}} \quad \text{con} \quad V = A \times \Delta z$$

Approccio quantistico

Fissati intensità fascio e densità bersaglio \Rightarrow tasso reazioni dipende da proprietà potenziale d'interaz. e dal numero di possibili stati finali

Elemento matrice transizione:

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{int} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H}_{int} \psi_i dV$$

Volume occupato da particella in spazio fasi: $h^3 = (2\pi\hbar)^3$

Particella diffonde in volume V con modulo impulso $\in [p', p'+dp']$. Nello spazio degli impulsi è **guscio sferico** con **raggio minore** p' , **spessore** dp' e **volume** $4\pi p'^2 dp'$. Trascurando processi che modificano spin, il numero finale $dn(p')$ di stati disponibili è

$$\boxed{dn(p') = \frac{V 4\pi p'^2}{(2\pi\hbar)^3} dp'}$$

$$\text{Vol. di normalizz.} \quad V = v_a t S = \frac{I_a t}{n_a} = \frac{N_a}{n_a}$$

Ricordando che $dE' = v' dp'$ si ha $\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{4\pi p'^2 V}{v' (2\pi\hbar)^3}$

Regola d'oro esprime **tasso di reazione W per nucleo bersaglio e per particella incidente**

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a}$$

Sostituendo:

$$W = \frac{dN(E)/dt}{N_b N_a} = \frac{\sigma v_a}{V}$$

E di conseguenza, per la sezione d'urto:

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar v_a} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rho(E') V$$

- Noto il potenziale d'interazione si ottiene σ , oppure **dai valori misurati della sezione d'urto si ottiene l'elemento di matrice M_{fi}**