Sistemi Dinamici 1-dim e biforcazioni

Michele Cirafici

DMG & INFN & IGAP, Trieste, Italy
Email: mcirafici@units.it

Dispense per uso interno - da ricontrollare

23 marzo 2023

Indice

1 Introduzione

In questo capitolo consideriamo l'esempio più semplice di sistema dinamico, governato dalla singola equazione differenziale unidimensionale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f(x(t)) \tag{1.1}$$

Tutte le funzioni sono a valori reali. Notiamo che la funzione f non dipende esplicitamente dal tempo. Sistemi per i quali $f = f(x,t)$ sono detti non-autonomi. Prendiamo come funzione $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, dove l'intervallo I può eventualmente coincidere con $\mathbb{R}$.

Il modo standard di visualizzare la soluzione di (1.1) è quello di disegnare il grafico di una soluzione $\varphi(t,x_0)$ con condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, sul piano (t,x), cioé la *traiettoria* che parte da x_0.

Invece nella teoria dei sistemi dinamici è piùtile studiare il *campo vettoriale* associato. Questo è costruito prendendo l'asse delle x e costruendo il campo dei vettori che puntano da x a $x + f(x)$.

Definizione 1.2. *Un punto $x^* \in \mathbb{R}$ è detto punto di equilibrio (o punto critico) di* (1.1) *se* $f(x^*) = 0$.

In particolare x^* è una soluzione di (1.1); con le condizioni iniziali appropriate il sistema rimane in x^*.

Siccome il sistema è unidimensionale, l'asse delle x è lo spazio delle fasi. In ogni punto il flusso va verso destra se $f(x) > 0$ e verso sinistra se $f(x) < 0$. Quindi tra due zeri la soluzione $\varphi(t,x)$ è monotona. Allo stesso modo, siccome i moti non si possono incrociare vale che $x > x'$ implica $\varphi(t,x) > \varphi(t,x')$; quindi come funzione di x, $\varphi(t,x)$ è monotona crescente (ricordiamo che stiamo parlando della soluzione dell'equazione differenziale come funzione del dato iniziale).

Diremo che un punto di equilibrio x^* è stabile se le soluzioni che partono vicino a x^* vi restano vicine; in altre parole il flusso locale si muove verso il punto di equilibrio. Viceversa se il flusso locale si allontana dal punto fisso, parliamo di un punto di equilibrio instabile.

Possiamo avere un'idea più precisa guardando la struttura locale del sistema vicino al punto fisso x^*. Scriviamo $x(t) = \eta(t) + x^*$, dove $\eta(t)$ è una piccola perturbazione vicino a x^*. Linearizzando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t) = f(\eta(t) + x^*) = f(x^*) + \eta\, f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2) \tag{1.3}$$

Siccome x^* è un punto fisso, $f(x^*) = 0$. Quindi assumendo che sia $f'(x^*) \neq 0$ e trascurando i termini di ordine più elevato in η, troviamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t) \simeq \eta\, f'(x^*) \tag{1.4}$$

Da questa equazione vediamo che la perturbazione $\eta(t)$ cresce esponenzialmente se $f'(x^*) > 0$, mentre decade se $f'(x^*) < 0$. Quindi nel caso $f'(x^*) \neq 0$, è il segno della derivata di f al punto fisso a determinarne la stabilità. Se invece $f'(x^*) = 0$, è necessario analizzare i termini di ordine più elevato in η. Notiamo anche che, siccome le soluzioni del sistema linearizzato sono esponenziali, è il rapporto $1/|f'(x^*)|$ a fissare la scala temporale caratteristica del sistema, cioé il tempo nel quale la soluzione $x(t)$ varia in modo significativo.

Definizione 1.5. *Un punto di equilibrio x^* per cui $f'(x^*) \neq 0$ è detto iperbolico (o non-degenere).*

Un sistema dinamico si dice iperbolico se tutti i suoi punti critici sono iperbolici.

Un caso particolare l'abbiamo quando possiamo esprimere

$$f(x) = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\,, \tag{1.6}$$

dove quindi il potenziale

$$V(x) = -\int_0^x f(s)\mathrm{d}s\,. \tag{1.7}$$

In particolare

$$\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = -\left(\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \leq 0 \tag{1.8}$$

e quindi il potenziale $V(t)$ decresce lungo le traiettorie. Possiamo immaginare che l'equazione differenziale descriva il moto di un particella x, che quindi tende a muoversi sempre verso il basso rotolando lungo la figura del potenziale. In particolare punti di equilibrio sono i punti ove $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$, e i minimi locali di V sono punti di equilibrio stabili.

2 Biforcazioni

Supponiamo adesso che l'equazione (1.1) dipenda da un parametro μ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = f_\mu(x(t)) \tag{2.1}$$

Siamo interessati a comprendere come l'andamento qualitativo del sistema cambia in funzione di μ. Ad esempio, la condizione di avere un punto critico, $f_\mu(x(t)) = 0$ adesso dipende anche dal parametro μ.

Prima di capire cosa cambia, andiamo a vedere in che condizioni il sistema *non* cambia. Supponiamo di avere un valore μ^* per cui si abbia $f_{\mu^*}(x^*) = 0$ e $f'_{\mu^*}(x^*) \neq 0$, cioé x^* è un punto critico iperbolico. Allora possiamo usare il teorema della funzione implicita per vedere che il punto di equilibrio è *strutturalmente stabile*, cioé non può essere rimosso con una piccola variazione dei parametri. Ricordiamo che il teorema della funzione implicita determina sotto quali condizioni una equazione del tipo $g(x, \mu) = 0$ possa essere risolta unicamente per x per determinare una funzione $x(\mu)$. Nel nostro caso il teorema implica che esiste un'unica funzione regolare $\overline{x}(\mu)$ per $\mu \in U$ un intorno aperto di μ^*, tale che $\overline{x}(\mu^*) = x^*$ e $f_\mu(\overline{x}(\mu)) = 0$ identicamente in μ. A parole i punti critici iperbolici permangono per piccole variazioni del parametro μ, e continuano a essere iperbolici. Un punto di equilibrio non-degenere non può essere distrutto con piccole variazioni dei parametri esterni. Viceversa, fenomeni interessanti possono succedere per valori particolari dei parametri per i quali il punto critico cessa di essere iperbolico, cioé sia f_μ che la sua derivata f'_μ si annullano insieme. Questi fenomeni si dicono *biforcazioni*.

Biforcazione tangente. Si tratta del meccanismo più semplice attraverso il quale punti critici vengono creati o distrutti. L'esempio canonico è dato da

$$\dot{x} = r + x^2 \tag{2.2}$$

Vediamo che per $r < 0$ abbiamo due punti critici, uno stabile e uno instabile. All'aumentare di r, i due punti critici si muovono uno verso l'altro fino a collidere per $r = 0$ nel punto critico $x^* = 0$ (notiamo che per $r = 0$ sia f che la sua derivata si annullano nel punto critico). Appena $r > 0$ non ci sono più punti critici. Per descrivere la biforcazione a $r = 0$ abbiamo il *diagramma di biforcazione.*

Consideriamo ora un sistema più generale del tipo

$$\dot{x} = f(x; r) \tag{2.3}$$

e supponiamo che ci sia una biforcazione tangente per $x = x^*$ e $r = r_c$. Per una biforcazione abbiamo $f(x^*, r_c) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}|_{x^*,r_c} = 0$. Allora vicino ai valori della biforcazione abbiamo

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x^*, r_c) + (x - x^*)\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x^*,r_c} + (r - r_c)\frac{\partial f}{\partial r}\bigg|_{x^*,r_c} + \frac{1}{2}(x - x^*)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\bigg|_{x^*,r_c} + \dots \\
&= \alpha(r - r_c) + \beta(x - x^*)^2 + \cdots
\end{aligned} \tag{2.4}$$

In particolare per avere una biforcazione tangente, le due derivate $\alpha = \frac{\partial f}{\partial r}|_{x^*,r_c}$ e $\beta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{x^*,r_c}$ devono non essere nulle. In questo senso l'esempio che abbiamo appena visto è "canonico", è la struttura che appare al primo ordine non banale sviluppando in serie. La forma dell'esempio canonico è anche detta *forma normale.*

Biforcazione transcritica. In questo tipo di biforcazione cambia la stabilità di un punto fisso. La forma normale di una biforcazione transcritica è

$$\dot{x} = r\,x - x^2 \tag{2.5}$$

Notiamo la similarità con l'equazione logistica. In questo caso $x^* = 0$ è un punto critico indipendentemente dal valore di r, stabile per $r < 0$ e instabile per $r > 0$. C'è un altro punto critico per $x^* = r$, instabile per $r < 0$. All'aumentare di r i due punti critici si fondono per $r_c = 0$. Quando $r > 0$ il punto critico $x^* = 0$ è diventato instabile mentre il punto critico $x^* = r$ è diventato stabile. I due punti critici si scambiano di stabilità al variare di r.

Biforcazione a forchetta. Questa biforcazione può essere super-critica o sub-critica. Nel caso super-critico la forma normale è

$$\dot{x} = r\,x - x^3 \tag{2.6}$$

Notiamo che l'equazione è invariante per $x \longrightarrow -x$. Abbiamo che $x^* = 0$ è un punto di equilibrio per ogni valore di r. Per $r < 0$ l'origine è l'unico punto di equilibrio ed è stabile. Questo persiste per $r = 0$, ma per $r > 0$ l'origine diventa un punto critico instabile, mentre due nuovi punti critici appaiono, $x^* = \pm\sqrt{r}$, entrambi stabili. Il diagramma di biforcazione ha appunto la forma di una forchetta.

Nel caso subcritico

$$\dot{x} = r\,x + x^3 \tag{2.7}$$

l'andamento è invertito: i due punti critici $x^* = \pm\sqrt{-r}$ sono instabili ed esistono solo per $r < 0$.

3 Biforcazione: trattazione generale

Vediamo adesso alcune considerazioni più generali e rivisitiamo gli esempi appena visti. Prendiamo ancora l'equazione differenziale $\dot{x} = f(x;\mu)$ e supponiamo di avere un punto fisso iperbolico $f(x^*;\mu^*) = 0$ per (x^*,μ^*). Ricordiamo che per capire la stabilità di (x^*,μ^*) possiamo linearizzare

$$\dot{\eta} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,\mu^*} \eta \tag{3.1}$$

Siccome $f(x^*;\mu^*) = 0$ e $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,\mu^*} \neq 0$, per il teorema della funzione implicita esiste un'unica funzione $x(\mu)$ tale che $f(x(\mu),\mu) = 0$ per μ abbastanza vicino a μ^*, e $x(\mu^*) = x^*$. Per la continuità rispetto ai parametri, per μ sufficientemente vicino a μ^*, $\frac{\partial}{\partial x} f(x(\mu),\mu) \neq 0$. Quindi punti fissi iperbolici permangono iperbolici per piccole variazioni di μ e il carattere della stabilità non cambia.

Andiamo quindi a vedere cosa succede per $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,\mu^*} = 0$. Per semplicità, eventualmente con una ridefinizione delle funzioni, assumiamo che il punto fisso sia per $(x^*,\mu^*) = (0,0)$. Abbiamo la

Definizione 3.2. *Un punto fisso $(x,\mu) = (0,0)$ di una famiglia a un parametro di campi vettoriali unidimensionali è detto avere una biforcazione a $\mu = 0$ se il flusso per μ vicino a zero e x vicino a zero è qualitativamente diverso dal flusso per x vicino a zero e $\mu = 0$*

Andiamo a vedere le condizioni sotto le quali ritroviamo gli esempi precedenti.

Biforcazione tangente. In questo caso abbiamo un'unica curva di punti fissi, chiamiamola $\mu(x)$, che passa per $(0,0)$ ed è parametrizzata da x. Ha le proprietà

1. È tangente alla linea $\mu = 0$ nel punto $x = 0$, cioé $\left.\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0$
2. Giace interamente da un lato della linea $\mu = 0$, cioé localmente $\left.\frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} \neq 0$

Consideriamo una famiglia ad un parametro $\dot{x} = f(x;\mu)$ e supponiamo che $(0,0)$ sia un punto fisso non iperbolico, quindi $f(0,0) = 0$ e $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0$. Assumiamo che $\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)} \neq 0$. Allora per il teorema della funzione implicita esiste un'unica funzione $\mu = \mu(x)$ tale che $\mu(0) = 0$ (per x abbastanza piccolo di modo che $f(x,\mu(x))=0$). Allora avremo una biforcazione tangente se sono verificate le due condizioni esposte precedentemente.

Partiamo da $f(x,\mu(x))=0$. Derivando

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,\mu(x))=0=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} \tag{3.3}$$

e calcolando quest'espressione in $(0,0)$ troviamo

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\right|_{(0)}=\frac{-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} \tag{3.4}$$

che è uguale a zero perché il numeratore si annulla mentre il denominatore è diverso da zero. Quindi la curva di punti fissi è tangente alla linea $\mu=0$ nel punto $x=0$. Prendiamo la derivata seconda

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x,\mu(x))=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial \mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 \mu}\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}x^2} \tag{3.5}$$

Calcoliamo quest'espressione in $(0,0)$, dove come abbiamo visto $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$ si annulla; troviamo

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}x^2}\right|_{(0)}=\frac{-\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}}{\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}} \tag{3.6}$$

che è diverso da zero se $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}\neq 0$. Quindi per avere una biforcazione tangente abbiamo bisogno di un punto fisso non iperbolico tale che

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}\neq 0\,,\qquad\qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}\neq 0 \tag{3.7}$$

Notiamo che possiamo pensare di espandere in serie di Taylor il nostro campo vettoriale $f(x,\mu)$; allora quanto abbiamo appena visto si può riassumere dicendo che la dinamica vicino a $(0,0)$ è qualitativamente data dalla forma normale

$$\dot{x}=\mu\pm x^2 \tag{3.8}$$

Biforcazione transcritica. In questo caso la struttura vicino al punto di biforcazione è data da

1. due curve di punti fissi che passano per $(0,0)$, date da $x=0$ e $x=\mu$
2. entrambe le curve esistono da entrambi i lati della linea $\mu=0$
3. la stabilità di ogni curva di punti fissi cambia passando per $(0,0)$.

Consideriamo $(0,0)$ punto fisso non iperbolico. Siccome abbiamo due curve di punto fissi passanti per $(0,0)$ deve essere che $\left.\frac{\partial f}{\partial \mu}\right|_{(0,0)}=0$, altrimenti per il teorema della funzione implicita solo un'unica curva di punti fissi potrebbe passare per $(0,0)$. Imponiamo di avere una curva di punti fissi $x = 0$

$$\dot{x} = f(x, \mu) = x\, F(x, \mu) \tag{3.9}$$

dove

$$F(x,\mu) = \begin{cases} \dfrac{f(x,\mu)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,\mu)} & \text{se } x = 0 \end{cases}, \tag{3.10}$$

dove otteniamo il risultato per $x = 0$ espandendo in serie al primo ordine. Allora abbiamo che $F(0,0) = 0$ e inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{(0,0)} \tag{3.11}$$

e in particolare

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)} \tag{3.12}$$

Se vogliamo che $\mu(x)$ non coincida con $x = 0$ e sia presente da entrambi i lati di $\mu = 0$, dobbiamo avere

$$0 < \left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}(0)\right| < \infty \tag{3.13}$$

Assumiamo adesso che

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)} \neq 0 \tag{3.14}$$

Allora possiamo usare il teorema della funzione implicita per dire che esiste una funzione $\mu(x)$ definita per x abbastanza piccolo, tale che $F(x, \mu(x)) = 0$. Derivando questa condizione (come nel caso della biforcazione tangente, ma ora per F), troviamo

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\Big|_0 = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(0,0)}}{\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)}} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)}} \tag{3.15}$$

che deve essere diverso da zero e da infinito. Per riassumere per avere una biforcazione transcritica abbiamo bisogno di un punto fisso non iperbolico tale che

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)} \neq 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} \neq 0 \tag{3.16}$$

La struttura della biforcazione vicino a $(0,0)$ è data dalla forma normale

$$\dot{x} = \mu\, x \pm x^2 \tag{3.17}$$

Biforcazione a forchetta. La biforcazione a forchetta ha le seguenti caratteristiche

- due curve di punti fissi passano per $(0,0)$, $x = 0$ e $\mu = x^2$
- $x = 0$ esiste da ambo i lati di $\mu = 0$, mentre $\mu = x^2$ solo da un lato

- I punti fissi su $x = 0$ hanno stabilità diversa ai lati opposti di $\mu = 0$, mentre i punti fissi di $\mu = x^2$ hanno tutti la stessa stabilità

Come nel caso precedente, sia $(0, 0)$ punto fisso non iperbolico. Siccome vogliamo due curve di punti fissi che si intersecano deve essere $\frac{\partial f}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = 0$ (altrimenti potremmo usare il teorema della funzione implicita). Siccome vogliamo che $x = 0$ sia curva di punti fissi possiamo ancora assumere

$$\dot{x} = f(x, \mu) = x\, F(x, \mu) \tag{3.18}$$

dove

$$F(x, \mu) = \begin{cases} \dfrac{f(x, \mu)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,\mu)} & \text{se } x = 0 \end{cases}, \tag{3.19}$$

Se vogliamo che una seconda curva passi per $(0, 0)$, allora $F(0, 0) = 0$ con $\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} \neq 0$ per poter usare il teorema della funzione implicita: esiste una sola curva $\mu(x)$ per $(0, 0)$ tale che $F(x, \mu(x)) = 0$. Come nel caso della biforcazione tangente deve essere

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0} \neq 0 \tag{3.20}$$

Adesso il procedimento è lo stesso che per la biforcazione tangente, ma per la funzione F

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}\Big|_{0} &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{(0,0)}}{\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)}} = \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \mu}\Big|_{(0,0)}} \\ 0, \infty \neq \frac{\mathrm{d}^2\mu}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{(0)} &= \frac{-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}}{\frac{\partial F}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)}} = \frac{-\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{(0,0)}}{\frac{\partial^2 F}{\partial \mu \partial x}\Big|_{(0,0)}} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Per riassumere per avere una biforcazione a forchetta abbiamo bisogno di un punto fisso non iperbolico tale che

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}\Big|_{(0,0)} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)} = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}\Big|_{(0,0)} \neq 0\,, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_{(0,0)} \neq 0\,, \tag{3.22}$$

La struttura è qualitativamente la stessa ottenuta dalla forma normale

$$\dot{x} = \mu\, x \pm x^3 \tag{3.23}$$

4 Biforcazioni imperfette e transizioni di fase

Vediamo adesso un esempio, basato sulla teoria di Landau delle transizioni di fase. Semplificando, l'idea principale è di espandere l'energia libera (cioè l'energia che è effettivamente utilizzabile per un sistema a temperatura finita, cioè che non è occupata da entropia) in un parametro d'ordine che è zero in una fase disordinata e non zero in una fase ordinata. Ad esempio consideriamo un ferromagnete. La sua magnetizzazione M (se il campo magnetico esterno H è zero) è zero per $T > T_c$ (se pensiamo ad un ferromagnete come costituito da tanti magneti microscopici, una temperatura troppo elevata impedisce a questi di allinearsi e il campo medio risultate è nullo) e non zero per $T < T_c$.

Ad esempio $f(m) = f_0 + \frac{1}{2}am^2 + \frac{1}{4}bm^4$, dove i parametri sono funzioni della temperatura e $b > 0$ (per avere un minimo). L'energia libera è stazionaria per $\frac{\partial f}{\partial m} = 0$. Quindi: $m = 0$ e $m = \pm\sqrt{-a/b}$. Le ultime soluzioni sono accettabili per $a < 0$. Assumiamo che a sia una funzione monotona della temperatura, e che $a(T_c) = 0$. Minimizzando l'energia libera troviamo

$$T < T_c \qquad f = f_0 - \frac{a^2}{4b} \tag{4.1}$$

$$T > T_c \qquad f = f_0 \tag{4.2}$$

ed in particolare è continua (si può invece verificare che il calore specifico è discontinuo).

Adesso introduciamo un campo magnetico esterno H. Adesso abbiamo (tralasciando la costante f_0)

$$f(m) = -Hm + \frac{1}{2}am^2 + \frac{1}{4}bm^4 \tag{4.3}$$

Notiamo che il campo magnetico esterno rompe la simmetria $m \longrightarrow -m$. Empiricamente osserviamo che la magnetizzazione obbedisce l'equazione differenziale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t) = -\Gamma\frac{\partial f}{\partial m} \tag{4.4}$$

dove $\Gamma > 0$ è una costante. Cioè la mnagnetizzazione evolve verso un minimo dell'energia libera. Notiamo che l'energia libera diminuisce nel tempo

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\Gamma\left(\frac{\partial f}{\partial m}\right)^2 \tag{4.5}$$

Se adesso poniamo $m = x(b\Gamma)^{-1/2}$, $r = -a\Gamma$ e $h = (\Gamma^3 b)^{1/2}H$, otteniamo l'equazione differenziale

$$\dot{x} = h + rx - x^3 \tag{4.6}$$

con $f(x) = -\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{4}x^4 - hx$. Per $h = 0$ abbiamo una biforcazione a forchetta. Invece per $h \neq 0$ la simmetria è rotta. Questo esempio è più complicato perchè abbiamo due parametri. I punti fissi si possono determinare graficamente, intersecando le equazioni $y = rx - x^3$ e $y = -h$.

Quando $r < 0$ abbiamo sempre una soluzione. Quando invece $r > 0$ abbiamo una regione $h \in [-h_c(r), h_c(r)]$ dove ci sono tre soluzioni. Consideriamo il caso $r > 0$. Per un certo valore h_c c'è una biforcazione tangente (due punti critici vengono creati). Troviamo il valore di h per cui c'è questa biforcazione. Il massimo locale della cubica è per

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(rx - x^3) = r - 3x^2 = 0 \tag{4.7}$$

da cui $x_{max} = \sqrt{\frac{r}{3}}$. Al massimo $rx_{max} - (x_{max})^3 = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}}$. Similmente per il minimo.

Abbiamo una biforcazione tangente per $h = \pm h_c(r)$, con $h_c(r) = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}}$. Per $|h| < h_c(r)$ abbiamo tre punti critici, per $|h| > h_c(r)$ un solo punto critico.

Siccome abbiamo due parametri, ora possiamo parlare di una *curva di biforcazione* nel piano (h, r). Le due curve $\pm h_c(r)$ si incontrano tangenzialmente in $(0, 0)$, dove c'è una cuspide. In questo caso si può parlare di *catastrofe di tipo cuspide.*

5 Esercizio

Vediamo un applicazione

$$\dot{N} = RN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - p(N) \tag{5.1}$$

Questa equazione descrive l'andamento di una popolazione di insetti (ad esempio cavallette) sotto l'azione di un predatore, la cui azione è determinata da $p(N)$. Prendiamo ad esempio

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2} \tag{5.2}$$

Possiamo riscrivere il modello, introducendo $\tau = \frac{B}{A}t$, $r = \frac{RA}{B}$ e $k = \frac{K}{A}$ come

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} rx\left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1 + x^2} \tag{5.3}$$

Abbiamo un punto fisso instabile a $x^* = 0$. Gli altri punti fissi si determinano graficamente come soluzioni di

$$r\left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{x^2 + 1} \tag{5.4}$$

si noti che il lato destro è indipendente dai parametri del problema. Graficamente si vede che per k abbastanza grande abbiamo uno o tre punti fissi al variare di r, cioé una biforcazione tangente.

Andiamo a studiare la curva di biforcazione. Dobbiamo imporre che $r(1 - \frac{x}{k})$ intersechi $\frac{x}{x^2+1}$ tangenzialmente

$$\begin{aligned} r(1 - \frac{x}{k}) &= \frac{x}{x^2 + 1} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r(1 - \frac{x}{k}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Si trova

$$\begin{aligned} r &= \frac{2x^3}{(1 + x^2)^2} \\ k &= \frac{2x^3}{x^2 - 1} \end{aligned} \tag{5.6}$$

dove $(k(x), r(x))$ è quindi l'equazione della curva di biforcazione in forma parametrica.

6 Sistemi dinamici sul cerchio

Studiamo adesso

$$\dot{\theta} = f(\theta) \tag{6.1}$$

dove θ prende valori sul cerchio S^1 e f è una funzione regolare e periodica $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$. Adesso il campo vettoriale associa un vettore ad ogni punto di S^1.

Per esempio $\dot\theta=\sin\theta$. I punti fissi sono a $\theta^*=0$ (instabile) e $\theta^*=\pi$ (stabile). Un altro esempio è $\dot\theta=\omega$, una costante. La soluzione $\theta(t)=\omega t+\theta_0$ è periodica di periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Possiamo aggiungere una non-linearità

$$\dot\theta=\omega-a\sin\theta \tag{6.2}$$

Possiamo studiare l'esistenza di punti critici per $a<\omega$, $a=\omega$ e $a>\omega$. Nel primo caso non vi sono punti critici e quindi possiamo avere oscillazioni periodiche, di periodo

$$T=\int \mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\omega-a\sin\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-a^2}} \tag{6.3}$$

Infatti ($z=\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}$)

$$\frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-\alpha\sin\theta}=\frac{1}{\omega}\int_{|z|=1}\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2\,\mathrm{i}}(z-\frac{1}{z})}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}\,z}=\frac{2}{\omega}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_+)(z-z_-)} \tag{6.4}$$

dove $z_\pm=\frac{\mathrm{i}}{\alpha}(1\pm\sqrt{1-\alpha^2})$ tali che $|z_+|>1$ e $|z_-|<1$. Allora prendiamo il residuo all'interno del cerchio unitario

$$\frac{2}{\omega}2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}\frac{1}{(z-z_+)(z-z_-)}|_{z_-}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-a^2}} \tag{6.5}$$

Approfondimenti

- Steven H. Strogatz , *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* Westview Press CRC Press (2018)
- Wiggins S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* Springer (2003)