Esercizi - Sistemi dinamici unidimensionali

Esercizio 1 Consideriamo i seguenti sistemi dinamici unidimensionali

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4x^2 - 16 \\ \dot{x} &= x - x^3 \\ \dot{x} &= 1 + \frac{1}{2}\cos x \\ \dot{x} &= \mathrm{e}^{\,x} - \cos x \end{aligned} \tag{0.1}$$

In ognuno di questi casi studiate il campo vettoriale sull'asse reale, trovate i punti fissi (anche graficamente) e studiate la loro stabilità.

Esercizio 2. Consideriamo l'equazione logistica

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{0.2}$$

con dato iniziale $N(0) = N_0$. Trovare una soluzione analitica (suggerimento: porre $N = \frac{1}{x}$ e risolvere l'equazione differenziale per x)

Esercizio 3. Consieriamo l'equazione

$$\dot{N} = -aN\ln(bN) \tag{0.3}$$

Determinare il campo vettoriale e l'andamento qualitativo delle soluzioni per $a > 0$e $b > 0$.

Esercizio 4. Consideriamo

$$\dot{x} = \alpha x - x^3 \tag{0.4}$$

Si studi la stabilità dei punti fissi al variare di α linearizzando il sistema.

Esercizio 5. Per i seguenti sistemi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x) \\ \dot{x} &= \sin x \\ \dot{x} &= -\sinh x \end{aligned} \tag{0.5}$$

si trovi il potenziale, si identifichino i punti di equilibrio e la loro stabilità.

Esercizio 6. Per i seguenti sistemi

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= 1 + rx + x^2 \\
\dot{x} &= r + x - \ln(1+x) \\
\dot{x} &= rx + x^2 \\
\dot{x} &= x - rx(1-x) \\
\dot{x} &= rx + 4x^3 \\
\dot{x} &= rx - 4x^3 \\
\dot{x} &= r - 3x^2 \\
\dot{x} &= 5 - r\,\mathrm{e}^{-x^2} \\
\dot{x} &= x + \tanh(r\,x)
\end{aligned} \tag{0.6}$$

determinate graficamente i campi vettoriali al variare di r e il valore di r per cui c'è una biforcazione. Quindi studiate il tipo di biforcazione e disegnate il diagramma di biforcazione.

Esercizio 7. Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = rx + ax^2 - x^3 \tag{0.7}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Per $a = 0$ abbiamo una biforcazione a forchetta. Discutere i diagrammi di biforcazione al variare di a.

Esercizio 8. Consideriamo il sistema

$$\dot{x} = x(1-x) - h \tag{0.8}$$

Si tratta di una modificazione dell'equazione logistica, per introdurre l'effetto di *harvesting*, dove una parte della popolazione viene rimossa (ad esempio a causa della caccia, o della pesca). Disegnare i campi vettoriali al variare di h. Si determini il valore h_c per il quale c'è una biforcazione e se discuta il carattere. Cosa succede nel lungo termine alla popolazione per $h < h_c$ e $h > h_c$?

Esercizio 9. Per i seguenti sistemi

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \sin(2\theta) \\
\dot{\theta} &= \sin\theta + \cos\theta \\
\dot{\theta} &= \sin(3\theta)
\end{aligned} \tag{0.9}$$

trovate i punti fissi e disegnate il ritratto di fase.